Проф. С. А. БОГОМОЛОВ

АКТУАЛЬНАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

(ЗЕНОН ЭЛЕЙСКИЙ и ГЕОРГ КАНТОР)

ACADEMIA

ПЕТЕРБУРГ
1923

Главлит № 715. Тираж 3.000.

Военная типография Штаба Р.-К. К. А. (Пл. Урицкого, 10).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Человек никогда не довольствовался познанием того небольшого уголка вселенной, который ему был непосредственно доступен; его разум всегда стремился к познанию бесконечности в ее различных видах. Но уже в отдаленные времена начало слагаться убеждение в недостижимости этой цели.

В частности, математика не могла обходиться без понятия о бесконечности; так, напр., ряд целых чисел бесконечен, в данном отрезке заключается бесчисленное множество точек, через данную точку можно провести бесконечное множество прямых, и т. д.

Из математики понятие бесконечности необходимо просачивалось в смежные науки, и прежде всего—в механику, изучающую движение на математической основе. Вот это научное понятие о бесконечности подверглось серьезной критике еще в эпоху расцвета эллинской науки, когда слагались все наши научные понятия. Элейская школа, в лице *Зенона*, с необыкновенной силой и глубиной критиковала возможность движения, вскрывая как будто бы неизбежную противоречивость этого понятия; указанные парадоксы, как увидим ниже, были тесно связаны с идеей бесконечности. По свидетельству известного историка математики *Морица Кантора*, диалектика элейской школы несомненно задержала развитие греческой науки, в особенности—математики и механики.

Одна из величайших эпох в развитии нашей науки связана с именем *Ис. Ньютона*, который стоял на точке зрения, диаметрально противоположной критике элеатов *). Ньютон вовсе не считался с их аргументами; он просто устранял такие соображения, исходя, повидимому, из постулата возможности знания. Известно, с каким пренебрежением относился великий ученый к созданию гипотез, выходящих за пределы опыта!

Созданный Ньютоном современный анализ оказался могучим средством и для теоретических, и для практических приложений. Между тем аргументы Зенона против основных понятий математики и механики, несмотря на многочисленные попытки, оставались неопровергнутыми.

Во 2-ой половине XIX столетия, вообще подвергшего основы математики тщательному пересмотру, появились работы немецкого ученого *Георга Кантора* (род. в 1845 г. в С.-Петербурге), несомненно принадлежащие к одному из видных достижений этого плодотворного столетия. Кантор создал математическую науку о бесконечном, ясно разграничив те методы, с которыми можно подходить к этим понятиям, от тех, применение которых приводит к неизбежным противоречиям. Учение Кантора пролило новый свет на апории Зенона и об'яснило в них то, что вообще поддается об'яснению.

Трансфинитная арифметика явилась новой отраслью математики и, таким образом, расширила область доступного для человеческой мысли; однако использовать ее, как это повидимому считал возможным сам

---

*) См. ниже в примечании XI.

автор, в интересах некоторых положений метафизического и теологического характера, — с математической точки зрения было бы неправильно.

Учение Кантора об актуальной бесконечности, испытанное на огне тончайшей диалектики древних, является, несомненно, ценным вкладом в современную культуру. Вот почему автор настоящего сочинения счел долгом пойти навстречу предложению издательства, поставившего себе целью разобрать основные моменты этой культуры. Первоначально статья о Зеноне была напечатана в 1915 г. в „Журнале Мин. Нар. Просв.“; для настоящего издания автор переработал ее и значительно дополнил. При издании отдельной книгой оказалось возможным войти в такие подробности, которые были бы неуместны в журнальной статье (напр., очерк учения Кантора о трансфинитных числах). С другой стороны, было заманчиво использовать, в интересах основной темы, некоторые новые достижения научной мысли, получившие широкое распространение (мы имеем в виду учение *Минковского* о пространстве и времени).

Все более значительные дополнения помещены в примечаниях после текста. Такие примечания отмечены римскими цифрами.

С. Богомолов.

Петроград
17/XII 1922.

I

Глубокая древность завещала нам несколько знаменитых аргументов или „*апорий*" *Зенона Элейского*, которые, будучи облечены подчас в чуждую математике форму, обнаруживали с достаточной ясностью серьезные трудности, лежащие в основе чисто математических понятий континуума и бесконечности. В течение целых столетий ученые скорее отмахивались от этих досадных парадоксов, чем старались их разрешить, и *Гегель* имел полное основание сказать, что зенонова диалектика материи доныне не опровергнута *). Лишь в новое время учение о совокупностях, разработанное *Г. Кантором*, выяснило до конца спорные понятия континуума и бесконечности и дало ключ к пониманию названных выше аргументов; вместе с тем оно показало, каким глубоким и проницательным мыслителем был древний философ, которого иные склонны были считать за самого обыкновенного софиста.

Мы начнем с выяснения основного положения *Г. Кантора*—о законности понятия об актуально-бесконечном; это положение находится в коренном противоречии со свидетельствами многих признанных авторитетов.

Понятия „об'ект", „совокупность" (последнее мы считаем равнозначащим с понятием класса), „принадлежность об'екта к данной совокупности" мы примем за основные, оставляя в стороне их логический

*) *Hegel* „Vorlesungen üb. d. Gesch. d. Phil." Bd. 1, p. 312. *Гамильтон*, признавая ложным заключение, к которому приводят аргументы Зенона, тем не менее считал их неопровержимыми (см. *St. Mill* „La philosophie de Hamilton", Paris 1869, p. 520).

анализ. Совокупность считается *вполне определенной*, коль скоро относительно любого данного нам об'екта мы в состоянии решить, принадлежит ли он этой совокупности, или нет I).

Как известно, совокупности или классы можно задавать двояко: *по об'ему* и *по содержанию*. Первый способ состоит в прямом перечислении всех членов класса, второй—в указании общего им признака. Некоторые классы можно задавать любым из этих способов (напр.: совокупность учеников такого-то учебного заведения), другие же—только последним (напр.: совокупность целых чисел или точек данного отрезка). *В различии двух этих способов лежит ключ к решению всех вопросов, связанных с понятием бесконечности.*

Две совокупности называются *равномощными*, если между их элементами возможно установить одно-однозначное соотношение, так что каждому элементу одной совокупности отвечает один и только один элемент другой; напр., очевидно, что равномощными будут совокупности четных и нечетных чисел, точек окружности и лучей из ее центра. В самом деле, каждому четному числу можно привести в соответствие то нечетное число, которое меньше его на единицу, а каждому нечетному—то четное, которое больше его на единицу. Точно так же, каждому лучу, исходящему из центра окружности, будет соответствовать на окружности точка пересечения этих линий, а каждой точке окружности—луч, идущий из центра к этой точке. О равномощных классах говорят также, что они имеют одну и ту же *мощность* или одно и то же число членов. В дальнейший анализ понятия числа мы вдаваться не будем, так как это понятие для последующего имеет лишь вспомогательное значение.

Одна совокупность является *частью* другой, если любой элемент первой входит в состав второй, при чем эта последняя содержит элементы, не принадлежащие первой; вторая совокупность по отношению к первой называется *целым*; о ней будем говорить также, что она *обширнее* первой (оставляя слово *больше* для чисел). Таким образом, аксіома: „целое обширнее части" у нас будет суждением несомненно аналитическим.

Мы подошли теперь к основному вопросу учения о трансфинитном: может ли часть оказаться равномощной целому?

Подобное допущение совершенно невозможно для совокупностей, задаваемых по об'ему. В самом деле, возьмем одну из таких совокупностей α и будем действительно перечислять ее члены, давая им последовательно названия: 1-й, 2-й и т. д.; перебрав все, мы последнему дадим некоторое название „n-ый"; тогда n будет числом членов совокупности α, как это устанавливается в основах ариѳметики. Возьмем теперь какую-нибудь часть β данной совокупности и, проделав для нее то же самое, дойдем до числа n_1; это n_1 непременно меньше n, так как теперь не будет уже нескольких шагов в процессе перечисления элементов; но если бы β оказалась равномощной с α, то n было бы равно n_1, что невозможно. Совокупности, которые не равномощны ни с одной из своих частей, называются *конечными*; мы видим, что все классы, задаваемые по об'ему,—конечны.

Перед нами теперь естественно возникает вопрос: будет ли непременно конечной всякая вполне определенная совокупность или нет? Другими словами, можно ли говорить о существовании вполне определенной совокупности, которая была бы равномощной со своей частью? Во избежание всяких недоразумений отметим, что равномощность целого и части ни в коем случае не совпадает с их тождественностью, так что о таком грубом противоречии говорить здесь нельзя. Действительно, говоря о равномощности двух совокупностей, мы утверждаем лишь возможность установить между их элементами одно-однозначное соответствие; для тождественности наших совокупностей это будет одним из необходимых условий, но совершенно ясно, что оно далеко не достаточно. Итак, ставится вопрос, совместимы ли в понятии класса признаки: „обширнее данной совокупности" и „равномощный с нею". Ответ будет утвердительным, так как мы в состоянии указать действительно существующие совокупности, которые обладают обоими признаками одновременно; они существуют постольку, поскольку мы приписываем существование основным понятиям математики. Остановимся на некоторых примерах.

1) Совокупность натуральных чисел, конечно, обширнее совокупности только четных чисел; тем не менее между обеими совокупностями можно установить одно-однозначное соответствие: стоит только каждому натуральному числу отнести то четное число, которое вдвое его больше, и каждому четному—то натуральное число, которое равно его половине.

2) Совокупность всех вещественных чисел z, удовлетворяющих условиям: $0 \leq z \leq 1$, обширнее совокупности вещественных чисел z', определенных неравенствами $0 \leq z' \leq \frac{1}{2}$, и тем не менее обе совокупности— равномощны. Это становится ясным, если мы условимся считать взаимно соответственными такие два числа z и z' наших совокупностей, между которыми имеет место соотношение:

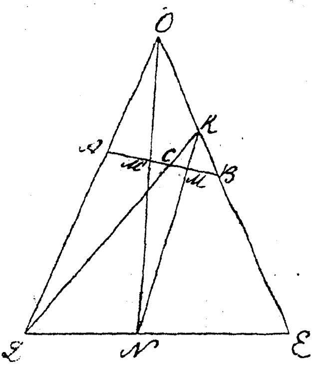
$$zz' + z' - z = 0;$$

отсюда находим:

$$z' = \frac{z}{1+z} \text{ и } z = \frac{z'}{1-z'},$$

и совершенно очевидно, что каждому значению z соответствует одно и только одно значение z', и наоборот; далее, если z непрерывно возрастает от 0 до 1, то z' тоже непрерывно возрастает, но уже от 0 до $^1/_2$, и обратно.

3) Отрезок BC (см. черт. 1) есть часть отрезка BA; тем не менее между точками этих отрезков возможно установить одно однозначное соотношение; достигается это с помощью следующего построения. Возьмем точку O вне отрезка AB и проведем лучи OA и OB; на OA берем точку D так, чтобы прямая DC пересекала отрезок OB, и точку пересечения отметим буквой K; наконец, соединяем D с точкой E, выбранной на продолжении OB. Пусть теперь задана любая точка M отрезка BC; для нахождения соответствующей ей точки отрезка BA, соединяем K и M и продолжаем KM до пересечения с DE в точке N; прямая ON пересечет отрезок BA в одной вполне определенной точке M', которую и будем считать соответственной точке M. Из чертежа совершенно ясно, что подобное же построение каждой точке отрезка BA соотнесет одну и только одну точку BC. Следовательно, отрезки BC и BA, рассматриваемые как совокупности точек—а в геометрии их именно так и определяют,—являются равномощными, хотя первый служит частью второго II).



Черт. 1.

Итак, существуют совокупности, равномощные с одной из своих частей; такие совокупности будем называть *бесконечными*, или лучше—*актуально-бесконечными*, чтобы подчеркнуть одно различие, о котором еще будет речь. Очевидно, что всякая совокупность либо конечна, либо бесконечна, и эти оба случая исключают друг друга. Легко также убедиться, что актуально-бесконечный класс нельзя задать по об'ему: если бы оказалось возможным пересчитать его члены, то, как мы видели выше, этот класс был бы конечным. Следовательно, никакое число натурального ряда не может служить выразителем мощности актуально-бесконечной совокупности; это, однако, не значит, что здесь уже совсем нельзя говорить о числе. Великая заслуга Г. Кантора в том и состоит, что он расширил наше понятие о числе, введя особые трансфинитные числа. Впрочем, говорить о них не входит в наши намерения; мы ставим себе более скромную цель, а именно: защитить от различных нападок основы этого учения; сейчас наша задача—общая апология актуальной бесконечности III).

В понятии актуально-бесконечной совокупности важно выдвинуть две стороны: во-первых, полную определенность и законченность этой совокупности и, во-вторых, ее неисчерпаемость конечными средствами: мы не можем последовательно пересчитать всех ее элементов. Вот это то понятие о законченной бесконечности и вызывало всегда нападки; в далекую древность уходит известное положение: „*infinitum actu non datur*". Мы ограничимся рассмотрением двух наиболее серьезных возражений против указанного понятия.

Известно, что из отрицания завершенной бесконечности *Кант* сделал решающее употребление при доказательстве тезиса 1-й математической антиномии, именно—антиномии величины мира. Этот тезис гласит: „мир имеет начало во времени и ограничен также в пространстве“; тогда как антитезис утверждает, что мир—бесконечен как во времени, так и в пространстве. Замечательно, что в примечании к тезису *) находим одно из возможных определений бесконечности: „Истинное... понятие бесконечности состоит в том, что последовательный синтез единицы при измерении количества никогда не может быть закончен“. Отсюда *Кант* заключает, что „бесконечный аггрегат действительных вещей не может быть рассматриваем, как данное целое“ **). Выше на примерах из области математики мы видели, что это не так; и суть дела в том, что, помимо „последовательного синтеза единицы“, т. е. счета, существует другой способ задания бесконечных совокупностей. Позиция Канта становится сильнее, когда он рассматривает специально временной ряд и настаивает на невозможности законченной бесконечности в этом случае. Доказательство указанной части тезиса построено следующим образом ***): „В самом деле, если мы допустим, что мир не имеет начала во времени, то до всякого данного момента времени протекла вечность и, следовательно, протек бесконечный ряд следующих друг за другом состояний вещей в мире. Но бесконечность ряда именно в том и состоит, что он никогда не может быть закончен путем последовательного синтеза. Следовательно, бесконечный протекший ряд в мире невозможен; значит, начало мира есть

*) «Критика чистого разума», пер. Н. О. Лосского, стр. 268.

**) Ib., стр. 266. Этим словам как будто бы противоречит другое место „Критики“ (стр. 44), где говорится о пространстве, как о бесконечной данной величине. Во всяком случае, приходится отметить у Канта некоторое колебание мысли по указанному вопросу.

***) Ib., стр. 266.

необходимое условие его существования, что и требовалось доказать". Здесь Кант касается действительной трудности, связанной с представлением истекшего бесконечного временного ряда; по существу это—та же самая трудность, которая лежит в основе знаменитой апории Зенона: Ахилл потому и не догонит черепахи, что для этого потребуется завершение некоторого бесконечного ряда. Этой специальной трудности, относящейся к течению времени и движению, мы коснемся в своем месте; а пока отметим, что у Канта мы не нашли уничтожающих возражений против идеи актуальной бесконечности вообще.

Хотя доказательства в пользу существования актуально-бесконечных совокупностей мы нашли в области математики, однако, нет недостатка в возражениях против законности указанного понятия именно со стороны математиков. С открытием дифференциального и интегрального исчислений понятие бесконечности, казалось, завоевало себе прочную позицию в математике; и действительно, некоторые ученые того времени склонялись к пониманию бесконечно-большого и бесконечно-малого в смысле актуальной бесконечности. Но именно такое понимание заставляло другую часть математиков относиться недоверчиво к новым методам, а его сторонников подчас приводило к не совсем правильным результатам. По мере того как выяснялись основы анализа бесконечно-малых, оттуда изгонялась актуальная бесконечность. Решительный голос в пользу этого изгнания был подан *Гауссом*, и критические работы второй половины XIX века обосновали дифференциальное и интегральное исчисления на понятии предела, так что, повидимому, из анализа исчез всякий намек на актуальную бесконечность; термины „бесконечно-большое" и „бесконечно-малое" остались в качестве традиционных и удобных сокращений, но понятия эти получили определенный смысл и перестали заключать в себе что-то мистическое. Слова *Гаусса* можно считать как бы программой этой реформы; но в них утверждается и нечто большее. В известном письме к *Шумахеру* *), по поводу одного предложенного последним доказательства для аксиомы параллелей, Гаусс пишет: „..... прежде всего я протестую против пользования бесконечной величиной в качестве законченной, каковое пользование в математике никогда не дозволяется. Бесконечное является лишь *façon de parler*, между тем как речь идет собственно о пределах, к которым известные отношения приближаются произвольно близко, тогда как другим предоставляется возрастать без ограничения“. Далее Гаусс считает вполне естественным, что „конечный человек не отваживается рассматривать бесконечное, как нечто данное и доступное его привычной интуиции“; здесь этот вопрос, по его мнению, уже непосредственно касается области метафизики. Нельзя игнорировать слова знаменитого ученого, а в этих словах как будто заключается полное изгнание актуальной бесконечности из математики. Против такого понимания цитаты из Гаусса не только нужно указать, что в новейшее время появилась арифметика трансфинитных чисел, но следует сослаться и на то, что понятие об актуальной бесконечности нельзя совершенно удалить даже из области обычной математики. Выше уже было кое-что указано в этом направлении; в виду важности вопроса, считаем нужным войти здесь снова в некоторые подробности.

Начнем с понятия о бесконечно-большом в том его значении, которое единственно допускается в совре-

---

*) *Gauss* „Werke“ Bd. VIII, p. 215—218; интересующее нас письмо помечено 12-м июля 1831 года.

менном анализе. Всякое руководство, всякий профессор математики неизменно подчеркивают своим ученикам, что здесь прежде всего идет речь о величине переменной. Пусть x есть переменная, и между ее значениями каким-либо способом установлена последовательность, так что можно говорить о значениях, следующих за данным; тогда полное определение интересующего нас термина будет таково. Переменная x называется бесконечно большой, если, каково бы ни было данное положительное число N, среди значений x всегда найдется такое x', что $|x'| > N$, и это неравенство остается в силе для дальнейших значений x *). Такая бесконечность, которая резко отличается от рассмотренной выше отсутствием полной определенности — ведь мы имеем здесь дело с переменной,—называется *потенциальной*. Некоторые математики склонны утверждать, что это—единственная бесконечность, допустимая в их науке; но, как остроумно заметил Г. Кантор, потенциальная бесконечность необходимо предполагает актуальную.

Нетрудно подметить, что в понятии переменной сочетаются особым образом полная определенность некоторой совокупности с двусмысленностью (точнее — с многосмысленностью) выбора элемента этой совокупности. Если мы говорим о какой-либо переменной, то прежде всего нам должна быть задана область ее изменения, т. е. совокупность всевозможных ее значений; это необходимо, чтобы отличить ее от других переменных и высказать о ней хоть что-нибудь; напр., если говорят, что z есть непрерывная вещественная переменная, то необходимо задается совокупность всех вещественных чисел. Раз совокупность значений переменной строго определена, то и каждое отдельное зна-

*) Символом $|x'|$ обозначается численное значение x'.

чение ее вполне определено, т. е. является постоянной; если же при этих условиях мы всетаки говорим о переменной, то делаем это лишь потому, что здесь имеется в виду *какое-нибудь* из ее возможных значений без указания, какое именно. Следовательно, в понятии переменной вполне определенная совокупность сочетается с произвольным выбором ее элемента.

Для нас важно отметить, что в подавляющем большинстве случаев областью изменения переменной служит актуально-бесконечная совокупность. Обратимся снова к бесконечно-большой величине, о которой говорилось выше; совокупность значений x должна быть вполне определенной и в то же самое время она не может быть конечной. Действительно, если она конечна, то, сравнивая попарно различные x, мы найдем среди них численно наибольшее, и пусть это будет x''; если теперь взять положительное число $N > |x''|$, то уже окажется невозможным найти такое x, чтобы имело место неравенство $|x| > N$, что противоречит определению. Из сказанного вытекает, что совокупность значений x—актуально-бесконечна; таковой же будет и совокупность значений переменной z, если последняя стремится к определенному пределу a, ибо абсолютную величину разности $(a - z)$ можно тогда сделать менее всякого наперед заданного положительного числа. Если принять во внимание, что в различных отделах математики постоянно говорится о совокупностях всех целых, всех рациональных или вещественных чисел, о совокупностях точек отрезка, лучей пучка и т. д. и если вспомнить, что все эти совокупности—актуально-бесконечны, то необходимо притти к следующему заключению: хотя из некоторых отраслей математики—во многих случаях совершенно законно и с прекрасными результатами—стараются изгнать актуальную бесконечность, эта последняя тем не менее лежит в основе важнейших понятий нашей науки; и *признать незаконным стремление к достоверному знанию об актуально-бесконечных совокупностях,—значит подорвать основы всей математики* IV).

Итак, заканчивая 1-ую главу настоящей статьи, мы должны решительно отвергнуть утверждение финитистов, что вполне определенная совокупность может содержать лишь конечное число членов, и признать полную законность понятия об актуальной бесконечности V).

II

Понятие бесконечности с давних времен представляло различные трудности для человеческого ума; с ним связаны некоторые парадоксы, завещанные нам древностью. Действительно, достаточно лишь бегло ознакомиться с апориями Зенона Элейского, чтобы подметить, какую существенную роль в них играют свойства бесконечной делимости, разложение на бесконечное число частей и т. п. Поэтому интересно будет поставить вопрос, не внесло ли новейшее учение о трансфинитном чего-либо нового в разрешение названных парадоксов. Посвященная аргументам Зенона литература довольно значительна *); но, насколько

*) Авторы многих статей, посвященных критике аргументов Зенона, исходят из предпосылок, резко отличающихся от наших. Так, в 1-м томе журнала „Revue de Métaphysique et de Morale" (1893) находим ряд таких мемуаров. *Noël* в статье „Le mouvement et les arguments de Zénon d'Élée" отвергает у понятия континуума всякую идею о составе из отдельных частей; движение и скорость—для него особые состояния движущегося тела, внутренне присущие ему (о движении с нашей точки зрения см. ниже); движение для него есть становление пространственных и временных величин. *Evellin* („Le mouvement et les partisans des indivisibles") допускает существование простейших элементов той же

нам известно, только у *Ресселя* в его „Principles of Mathematics“ можно найти несколько страниц, где эти аргументы разбираются при помощи учения Г. Кантора о бесконечном и непрерывном; однако и эту работу нельзя считать исчерпавшей до конца всю глубину вопроса. Во-первых, Рессель рассматривает лишь четыре аргумента против движения, оставляя в стороне аргументы против множественности; между тем, здесь формулировано наиболее древнее и немаловажное возражение против современных воззрений на континуум. Это тем более странно, что названный автор весьма занят философией континуума, и в проводимых им идеях заключается в сущности все необходимое для разрешения парадокса Зенона Во-вторых, что касается аргументов против движения, то здесь Рессель ограничивается чисто арифметической стороной их, совершенно отвлекаясь от специальных трудностей движения, хотя в его же книге мы находим (в дальнейших главах) и философское исследование принципов механики. Наконец, в том, что дано им, чувствуется некоторая недоговоренность, мешающая оценить по достоинству все те связанные с понятиями бесконечности и непрерывности трудности, которые были вскрыты глубоким умом одного из первых диалектиков древности.

природы, что и целое, но дальше уже неделимых; в своей книге „Infini et Quantité“ он является противником актуальной бесконечности. *Lechalas* („Note sur les arguments de Zénon d'Elée“) отрицает непрерывность движения и понятие о бесконечном числе. В последнем с ним согласен *Milhaud* („Le concept du nombre chez les pythagoriciens et les éléates“); он отрицает также у континуума возможность актуальной разделенности на части (о континууме см. ниже). Сюда надо отнести еще статью *Petronievics'a* „Zenos Beweise gegen die Bewegung“ (Archiv für Geschichte der Philosophie, Bd. 20), в которой автор является убежденным финитистом.

Поскольку дело идет о возможно точной формулировке аргументов Зенона, мы руководились главным образом изложением *Целлера**); подлинные греческие тексты можно найти в известной книге *Дильса***).

Как известно, аргументов против множественности существующего имеется несколько; не все они для нас одинаково интересны и не все они одинаково сильны. Иногда мы встретимся здесь и с явно неверными утверждениями, например: вполне определенная совокупность должна быть конечной. Но если мы обратимся к первому аргументу, касающемуся величины существующего, то увидим, что на его первой половине стоит остановиться подробнее. „Если бы существующее было многим,—так излагает Целлер ход мыслей Зенона***),—то оно должно было бы быть одновременно и бесконечно-малым и бесконечно-большим. Оно было бы бесконечно-малым, так как каждая из многих частей должна или сама быть неделимой единицей, или состоять из таковых единиц вследствие того, что каждое множество есть собрание единиц, а настоящая единица есть только неделимое; а то, что неделимо, не может иметь никакой величины: ведь все, что имеет величину, делимо до бесконечности. Поэтому отдельные части, из которых состоит многое, не имеют никакой величины... Следовательно, многое—бесконечно мало, ибо каждая составная часть его настолько мала, что она есть ничто". В этой цитате нужно прежде всего исправить одну неловкость: термин „бесконечно-малое" употреблен здесь неправильно; но сам Зенон в этом неповинен: из греческого

---

*) *Zeller* „Die Philosophie der Griechen" (5-te Auflage), erster Theil, p. 584—606.

**) *Diels* „Die Fragmente der Vorsokratiker", p. 130—135.

***) Zeller, l. c., p. 591.

текста явствует, что дело идет об абсолютном нуле, а не о бесконечно-малом *). *Виндельбанд* в своей „Истории древней философии“ подобным же образом излагает сущность рассматриваемого аргумента **): „.... совокупность какого угодно множества частей, из которых каждая сама, как неделимая, не имеет никакой величины, в свою очередь не может составить никакой величины“.

Для нас в изложенном аргументе Зенона важно не его место и значение в системе элейской философии, а то, что здесь впервые было формулировано возражение против одного из основных понятий современной математики; мы имеем в виду понятие континуума. Из рассуждений Зенона выходит, что нечто, имеющее величину, нельзя мыслить множественным, так как тогда необходимо придется мыслить его состоящим из неделимых частей; а последние, не имея совсем величины, ни в каком количестве не могут дать целого, имеющего величину. Прежде всего не трудно вскрыть здесь связь с идеей актуальной бесконечности; в самом деле, все, что имеет величину, делимо до бесконечности; отсюда следует, что если подобный об'ект и можно мыслить состоящим из *неделимых* частей, то число последних уже не может быть конечным, так как тогда не имела бы места бесконечная делимость. Так, по всей вероятности, рисуется дело и Целлеру, потому что он пытается опровергнуть рассуждения Зенона именно на почве отрицания актуальной бесконечности: „действительно выполненное бесконечное деление есть contradictio in adjecto: число частей всегда ограничено...“ ***). Мы не согласимся с Целлером, как это следует из рассу-

*) Μικρὰ δὲ οὕτως, ὥστε μηδὲν ἔχειν μέγεθος.
**) Стр. 58.
***) Ib., p. 604.

ждений I главы, а потому и не можем воспользоваться таким простым средством для полемики с греческим философом. Между тем, рассматриваемый вопрос для нас далеко небезразличен.

Возьмем какой-нибудь определенный математический континуум; напр.: совокупность вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x \leq 1$, или конечный отрезок, рассматривая его, как совокупность точек. Здесь мы, несомненно, имеем нечто, обладающее величиной и беспредельной делимостью; но математик строит указанные об'екты, исходя из простых неделимых элементов: отдельных чисел и геометрических точек. С помощью совокупностей таких простейших элементов—и при том актуально-бесконечных совокупностей,—охарактеризованных известным образом, мы и подходим к понятию о математическом континууме. Но такое его построение как раз является невозможным с точки зрения Зенона: неделимые ни в каком числе не дадут величины, обладающей беспредельной делимостью. Здесь, таким образом, возражение исходит из способа построения континуума; другой не менее знаменитый аргумент берет уже готовое представление и, при всем отличии идей его автора от элейской философии, оперирует с теми же понятиями беспредельной делимости и неделимой части: мы имеем ввиду 2-ю математическую антиномию Канта—*антиномию содержания мира* *). Здесь разби-

*) У нас будет еще случай убедиться в связи математических антиномий Канта с апориями Зенона; здесь уместно будет вспомнить слова Гегеля: „антиномии Канта не идут дальше того, что в этой области сделал уже Зенон" (Hegel, l. c., p. 326). Ту же мысль проводит *Salinger* в статье „Kants Antinomien und Zenons Beweise gegen die Bewegung" (Arch. f. Gesch. d. Phil., Bd. 19); к сожалению, автор высказывает о математическом континууме и о методе анализа бесконечно малых совершенно неправильные суждения.

рается вопрос о составе сложных субстанций, при чем из рассуждения особым образом выделяются пространство и время. Что сказано о них, относится к понятию континуума вообще, так как источником математических знаний у Канта являются именно эти чистые интуиции. Тезис утверждает, что сложные субстанции состоят из простых частей; но оказывается, что это неприложимо к пространству и времени, и, напр., „точка возможна только, как граница пространства" *). В антитезисе же утверждается, что ни одна сложная вещь в мире не состоит из простых частей, и доказывается это тем путем, что вопрос сейчас же сводится к пространству: „... пространство, занимаемое сложною вещью, должно состоять из стольких же частей, из скольких состоит сложная вещь. Но пространство состоит не из простых частей, а из пространств" **). Несколько ниже ***) читаем также: „... ни одна часть пространства не проста". Таким образом, эти строки „Критики чистого разума" свидетельствуют, что Кант, для которого пространство и время служили прообразом всякого континуума, отрицал его состав из простых неделимых частей. Что касается до аргументов в пользу такого мнения, то они выражены чрезвычайно кратко; надо полагать, что суть дела—в бесконечной делимости пространства: сколько бы мы ни подразделяли его на части, всегда будем получать новые, хотя и меньшие, пространства и никогда не дойдем до частей, уже не поддающихся дальнейшему делению: точек мы таким образом не получим.

Итак, математик берет неделимые элементы и, соединяя их в одно целое по известным законам,

*) „Критика чист. раз.", стр. 272.
**) Ibid., стр. 271.
***) Ibid., стр. 275.

надеется получить континуум. Философы же возражают, что это—невозможно: с одной стороны, неделимые части ни в каком числе не могут дать хотя бы весьма малой величины; с другой—величина, обладающая бесконечной делимостью, не может быть разложена на неделимые части с помощью последовательных делений.

Последний аргумент был бы уничтожающим для тех, кто отрицает актуальную бесконечность. В самом деле, сторонники этого мнения принимают, что всякая вполне определенная совокупность должна состоять из конечного числа элементов; но в этом случае конечное число подразделений поведет к такому разложению ее на части, что каждая часть будет содержать лишь по одному неделимому элементу, и процесс разложения будет закончен. Но если данный об'ект обладает бесконечной делимостью, то указанный процесс никогда к концу не придет, и потому число его простых элементов не может быть конечным. Для тех, кто допускает актуальную бесконечность, ничего ужасного в этом нет. Выше мы видели, что математические образы, которым приписывается непрерывность, как раз представляют собою бесконечные совокупности; если это вспомнить, то бесконечная делимость континуума становится вполне совместной с его построением из неделимых элементов: как бы далеко мы ни продолжали *последовательного* подразделения континуума, число частей всегда будет конечным, и мы никогда не получим его разложения на простейшие элементы, ибо число их—бесконечно. Однако, разложение на неделимые части дано иным способом, а именно—в силу самого определения; здесь мы опять встречаемся с существенным свойством бесконечных совокупностей: их можно задать по содержанию, но не по об'ему. Противники математического континуума менее склонны нападать на численный континуум, который легче признать за свободное создание человеческого ума; их ударам более подвергаются соответственные построения в области геометрии, так как здесь, говорят они, необходимо считаться с данными непосредственной интуиции; а она свидетельствует, что все сложно и делимо и ничто не просто. Но Рессель *) справедливо указывает, что если в одном случае бесконечная делимость считается совместной с неделимостью элементов, то уже нет *чисто-логических* оснований отрицать это и в другом. Что же касается показаний пространственной интуиции, то их нельзя считать безусловно непогрешимыми, и ее требованиям можно удовлетворить различными гипотезами. VI).

Остается еще одно возражение против математического понятия континуума: неделимые части ни в каком числе не могут дать величины. Нам говорят, что если точка не имеет измерения, то каким же образом совокупности этих точек могут быть непрерывными образами, имеющими одно или более измерений? На такой геометрической постановке вопроса мы и остановимся, так как ее разрешение типично для всех случаев. Если мы говорим, что точки не имеют измерений, то под этим понимаем лишь, что они являются теми простейшими элементами, из которых создаются протяженные образы. Если мы будем брать произвольные совокупности точек, то, конечно, не всегда будут получаться непрерывные образы; очевидно также, что одной актуальной бесконечности мало, чтобы признать данную совокупность за континуум. Возьмем, напр., совокупность „рациональных" точек прямой, т. е. таких точек, расстояния которых от данной точки выражаются рациональными числами. Эта совокупность

*) *Russell* „The Principles of Mathematics", p. 460–461.

не только обладает актуальной бесконечностью, но у ней имеется еще свойство, в силу которого между каждыми двумя ее точками лежит бесконечное множество других ее точек; и всетаки такая совокупность точек не есть континуум. Здесь не хватает точек с расстояниями, которые *несоизмеримы* с принятой единицей, а ведь такие расстояния существуют; напр., диагональ квадрата со сторонами $=1$ измеряется числом $=\sqrt{2}$. *Кантор* доказал, что совокупность рациональных точек—исчислима, а полный континуум обладает высшей мощностью. Таким образом, о континууме можно говорить лишь при определенной трансфинитной мощности. Многих философов можно обвинить в том, что они, говоря о континууме, не стараются дать такого же отчетливого определения этого понятия, которое дается в математике и отграничивает его от смежных понятий Перейдем к этому математическому определению континуума.

Для того, кто знаком с современными воззрениями математиков, вопрос ясен: суть дела заключается в идее порядка, в тех отношениях, которые устанавливаются между элементами данной совокупности, выделяя ее тем самым из множества остальных. Если мы говорим, что отрезок или прямая имеют лишь одно измерение, то это значит, что названные образы являются простыми или однократными рядами точек. В другом месте *) мы разобрали эту сторону дела подробнее и видели, что задача, так называемых, аксиом расположения и заключается в первом ответе на вопрос, как отрезок и прямая слагаются из отдельных точек. Аксиомы расположения определяют геометрические образы, как *сплошные* ряды простейших элемен-

*) „Вопросы обоснования геометрии", статья об идее порядка в геометрии.

тов *); чтобы признать их *непрерывными*, математик должен постулировать еще дальнейшие свойства отношений; так, по методу Дедекинда прямая делается непрерывным рядом с помощью допущения, что каждое „сечение“ ее производится некоторой ее же точкой VII). Таким образом, совокупность элементов, не имеющих измерения, превращается в непрерывный ряд одного или более измерений в силу устанавливаемых между ними отношений; и здесь, как во многих других отделах математики, на первое место выступает идея порядка; она сообщает то единство множеству элементов, которое характеризует континуум; благодаря ей, целое получает свойства, отсутствующие у частей его.

Итак, утверждение, что континуум не может состоять из простых неделимых элементов, для своего рассмотрения требует прежде всего точного определения термина „континуум“; там, где оно дается (именно. в математике), это делается так, что его состав из отдельных элементов (чисел или точек) становится очевидным. От противников нужно требовать, чтобы свои возражения они обосновывали на таких же точных определениях. Одной интуиции, как показали новейшие математические исследования, здесь недостаточно; свойство бесконечной делимости также не вполне определяет непрерывные образы, ибо оно присуще и слитным рядам.

С составом континуума из неделимых элементов необходимо считаться и при рассмотрении аргументов Зенона против движения **).

---

*) Ряд называется *слитным*, если между каждыми двумя его элементами имеются другие его элементы.

**) Кузэн справедливо указывает, что эти аргументы развиваются на фоне исключительной гипотезы множественности, которая, конечно, является исходной предпосылкой не самого Зенона, а противников элейского учения (Cousin „Nouveaux fragmens philosophiques“, p. 119).

III

Всем четырем аргументам Зенона, подлежащим теперь нашему исследованию, понятие движения придает особенно наглядный, живой характер; отвлекаться всецело от названного понятия, как это делает Рессель,—значит лишать апории Зенона гениально выбранной формы, хотя суть дела поддается формулировке и независимо от механических терминов. Поэтому приступающему к рассмотрению этих аргументов неизбежно столкнуться с вопросом: что такое движение? Признавая заслуги логико-математической школы в деле уяснения целого ряда принципиальных вопросов математического знания, мы склонны поискать там ответа и на этот вопрос; быть может, он заключается в той „статической“ теории движения, которую находим в книге Ресселя *).

С точки зрения рациональной механики—а критика Зенона и есть рациональная критика эмпирических данных—движение есть не что иное, как занимание в различные моменты времени различных мест в пространстве **). Пусть, напр., материальная точка, не меняя направления движения на обратное, перемещается по траектории, не имеющей двойных точек; тогда между всеми моментами времени, в течении которого совершалось движение, и точками пространства, образующими указанную траекторию, существует одно-однозначное непрерывное соотношение; сама материальная точка играет лишь роль посредника или средства, благодаря которому устанавливается это соответствие.

Если в течении некоторого промежутка времени различным моментам соответствуют различные точки

*) *Russell*, l. c., p. 465 и след.

**) Ib., p. 473.

пространства, то наша материальная точка—говорим мы—находится в движении; если же всем различным моментам времени соответствует одна и та же точка, то мы говорим о покое. Однако приходится иметь дело с различными движениями: одна и та же часть траектории может быть соотносима с различными промежутками времени, что—заметим мимоходом — уже требует признания актуальной бесконечности. Поэтому для более полной характеристики данного движения необходимо прибегнуть к вспомогательным понятиям и прежде всего—к понятию скорости. На последнее Рессель смотрит, как на известного рода фикцию,— в том смысле, что скорость не есть свойство движущейся точки, присущее ей в данный момент независимо от остальных; напротив, скорость в данный момент есть предел средней скорости, т. е. она определяется поведением точки в течении известного промежутка времени, и в силу этого понятие скорости служит лишь для более полного описания движения. Само определение приводит сейчас к тому, что скорость покоющейся точки приходится считать равной нулю, а это в свою очередь ведет к понятию о мгновенном покое, когда скорость в данный момент равна нулю, между тем как различным смежным моментам соответствуют различные положения точки в пространстве; так, напр., брошенное вверх тело находится во мгновенном покое в высшей точке своего пути. Таким образом, если взять две материальных точки, из которых одна обладает в данный момент скоростью, отличной от нуля, а скорость другой равна нулю, и если рассматривать эти моменты изолированно от смежных с ними, то, кроме неодинакового положения в пространстве, всякое различие между нашими точками исчезает. „Состояния движения"—нет; различные скорости указывают лишь на различные движения обеих точек в течении ближайшего промежутка времени. Отрицание „состояния движения“ вполне аналогично отрицанию „состояния изменения“ в анализе: каждое отдельное значение переменной есть постоянная, а переменная является таковой лишь в силу того, что она может принимать любое из этих значений; подобно этому, в каждый отдельный момент времени движущаяся точка ничем не отличается от покоющейся, но различие сейчас же обнаруживается, как только мы переходим к смежным моментам.

Итак, в движении мы видим только установление известного непрерывного соответствия между моментами времени и точками пространства. Можно, конечно, указать, что эта „статическая“ теория движения не уясняет нам до конца его сущности; но какая же другая теория могла бы похвалиться этим? Недаром *Спенсер* отнес сущность движения к области непознаваемого VIII).

Нетрудно подметить, в какой тесной связи с вышеприведенными рассуждениями находится 3-й аргумент Зенона, посвященный летящей, но покоющейся стреле. По Целлеру и приводимым им, отчасти исправленным, текстам, доказательство Зенона рисуется так *): „Если какое-либо тело занимает равную ему часть пространства, то оно покоится; но летящая стрела в каждый данный момент занимает равную ей часть пространства, а потому покоится; следовательно, летящая стрела на самом деле вообще неподвижна“. Другие авторы **) не согласны с вышеупомянутыми исправлениями; они

*) *Zeller*, l. c., p. 598—599; см. также *Diels*, l. c., p. 181 (n. 27-й).

**) *Dunan*, „Les arguments de Zénon d'Elée contre le mouvement“ (Paris 1884); *Hamelin*, „Sur un point du troisième argument de Zénon contre le mouvement“ (L'année philosophique, t. 17); *Noël*, l. c.

считают возможным сохранить и истолковать подлинный текст Аристотеля. По их мнению, содержание аргумента таково: „То, что занимает равное ему пространство, либо движется, либо покоится *); но летящая стрела в каждый данный момент занимает равное ей пространство, а так как в течении неделимого момента движение невозможно, то она покоится во все время своего полета“. Какое бы толкование ни принять, сущность аргумента заключается в том, что отрицается возможность движения в каждый отдельный момент, и сюда присоединяется соображение, что последовательность положений покоя не может составить движения.

Философы, полемизировавшие с Зеноном, возражали против его разложения движения на отдельные моменты с определенным положением движущагося тела в каждый момент. Не только *Гегель*, для которого наличие противоречия не исключало еще возможности мысли, утверждал: „двигаться—это значит быть и в то же самое время не быть в данном месте“ **), но и *Гербарт* считал „стрелу“ ошибочной на основании следующих рассуждений: о движущемся „совершенно невозможно утверждать, что оно где-либо находится во время движения, так как оно находится и более не находится в месте, из которого приходит, находится и еще не находится в месте, в которое вступает“ ***). Математик наших дней едва ли согласится с подобными утверждениями; но, конечно, и среди

*) Как указывает Hamelin (l. c., p. 43), сам Аристотель полагал, что в отдельный момент нет ни движения, ни покоя,—что покоя вообще не может быть в течении неделимой части времени. Зенон же был противоположного убеждения: из отсутствия движения он заключал к покою.

**) *Hegel*, l. c., p. 322.

***) *Herbart*, „Lehrbuch zur Einl. in d. Philos.“, p. 201.

философов они не встретят полного сочувствия: так, Целлер *) говорит: „если я спрашиваю, где находится летящая стрела в этот момент, то нельзя отвечать: в переходе из простванства A в пространство B, или—что то же самое—в A и B, но можно только сказать, что она находится в пространстве A“. Сам Целлер, в согласии с Аристотелем, выясняет сущность аргумента так: в отдельный момент, как таковой, никакое движение невозможно; если же допустить, что время слагается из отдельных моментов, то движение станет вообще невозможным. Названный философ считает однако такое воззрение на природу времени противоречащим его непрерывности. Мы сталкиваемся здесь, в применении ко времени, с тем вопросом о составе континуума, который был разобран выше; современная точка зрения диаметрально противоположна аристотелевой, так что в нашем распоряжении не имеется такого простого выхода из зеноновой апории.

Если теперь мы подойдем к *„стреле“* с точки зрения изложенной выше теории движения, то нам нельзя будет согласиться с тем, что стрела в каждый момент своего полета покоится, ибо скорость ее не равна нулю; но это, во всяком случае, не будет возражением по существу, а коснется лишь формы, в которую, быть может, неудачно, Зенон облек свою мысль. Суть же дела заключается в том, что он, как и современные исследователи, отрицал *состояние движения* в отдельные моменты; в каждый из них движущееся тело *как бы* покоится, не отличаясь ничем от покоющегося при изолированном рассмотрении этого момента. Таково именно учение „статической“ теории движения, и Рессель имел некоторое основание сопоставить Зенона с современными математиками **). Но только

*) *Zeller*, l. c., p. 600.

**) *Russell*, l. c., p. 347, 350—352.

из отрицания состояния движения в каждый данный момент еще не следует отрицание движения вообще: в каждый данный момент стрела занимает абсолютно определенное положение, но в различные моменты она может занимать и действительно занимает различные положения, т. е. движется. То, в чем Зенон и его современники видели противоречие, для нас является необходимой основой математического естествознания. Нечто подобное мы имеем при рассмотрении континуума: неделимые части дают целое, обладающее величиной и бесконечной делимостью, и все дело сводилось там к отношениям, устанавливаемым между элементами.

Итак, в отдельные моменты нельзя говорить о движении, равно как нельзя говорить и о покое. Если *Hamelin* верно передает мысль Аристотеля, что в *отдельный момент нет ни движения, ни покоя*, то здесь великий философ древности предвосхитил современные идеи о движении, и в этом утверждении лежит ключ к разрешению „стрелы“.

Если при рассмотрении „стрелы“ мы встретились с понятием скорости, то 4-ый аргумент Зенона—так называемый „*стадий*“—целиком основан на недостаточной разработанности этого понятия. Следует, впрочем, заметить, что, в виду краткости дошедших до нас указаний, аргумент этот понимается различно. По Целлеру *) сущность его заключается в следующем. Пусть в части пространства DE (см. черт. 2) помещены три одинаковой величины ряда, состоящие из равной величины тел **): $A_1 \ldots$ $B_1 \ldots$ $C_1 \ldots$; их взаимное распо-

*) *Zeller*, l. c., p. 601—603; *Diels*, p. 132.

**) Аристотель употребляет здесь термин ὄγκοι. Спор между Целлером и П. Таннери (см. ниже) сводится к тому, следует ли понимать под этим словом тела или точки.

ложение указано на верхней половине рисунка. Пусть ряд *A* остается неподвижным, а оба других с одинаковой и постоянной скоростью движутся параллельно ему, но в противоположных направлениях; по проше-

D $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ E

$\qquad\qquad A_1\ A_2\ A_3\ A_4$

$B_4\ B_3\ B_2\ B_1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad C_1\ C_2\ C_3\ C_4$

$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$

$B_4\ B_3\ B_2\ B_1$

$C_1\ C_2\ C_3\ C_4$

(Черт. 2).

ствии некоторого времени все три ряда придут в положение, изображенное на нижней половине чертежа. Таким образом, C_1 пройдет мимо всех *B* в то же самое время, в какое оно успеет пройти только мимо половины всех *A*, а ряд *A* занимает такое же пространство, как и ряд *B*. Но в случае равномерного движения, время движения пропорционально пройденному пространству, так что промежуток времени, потребный для прохождения ряда *A*, должен быть вдвое больше того, который нужен для прохождения его половины; между тем, выше мы видели, что эти промежутки равны, т. е. законы движения приводят нас к противоречию. Уже Аристотель *) указал на основ-

*) *Diels*, l. c.

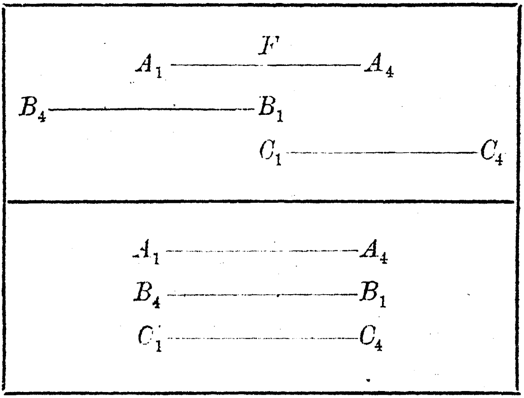
ной грех приведенного рассуждения: пройденный путь измеряется то по отношению к покоющемуся телу, то—по отношению к движущемуся; другими словами, здесь нет ясного понятия об относительной скорости. Целлер об'ясняет ошибку Зенона тем, что он был первым, рассуждавшим о законах движения во всей их общности и к тому же был заранее убежден, что натолкнется на противоречия.

Однако не все согласны допустить у Зенона такую грубую ошибку; так, *П. Таннери* *) толкует разбираемую апорию совершенно иначе. По его мнению, с помощью „стрелы“ Зенон достаточно опроверг тех, кто утверждал, что в каждый данный момент движущееся тело находится в определенном месте, и теперь переходит к борьбе с учением, по которому каждый данный момент соответствует переходу из одного положения в непосредственно за ним следующее. При таком положении в приведенном выше чертеже под A_1, B_1, C_1 и т. д. надо понимать отдельные точки **), образующие вполне упорядоченное множество, т. е. такой ряд, в котором для всякого элемента (кроме последнего) имеется элемент, непосредственно за ним следующий. В течение времени, когда наши три ряда из первого положения переходят во второе, точка C_1 имеет по отношению к ряду A два перехода из одного положения в другое, непосредственно за ним следующее, а по отношению к ряду B—четыре таких

*) *P Tannery*, „Le concept scientifique du continu“ (Revue philosophique, t. XX), p. 393—394; такое же понимание 4-го аргумента находим в цитированной выше статье Noel'я и у Ресселя.

**) Таннери приписывает им известные массы, понимая под ними нечто в роде атомов или материальных точек; так что он не заслуживает упрека Целлера в неправильном толковании термина ὄγκοι.

перехода; таким образом, один и тот же промежуток времени состоит и из 2 и из 4 моментов, что приводит к противоречию воображаемых противников Зенона. Целлер, полемизируя с Таннери, между прочим, указывает, что невероятно допустить существование во времена Зенона такого учения о движении. Судить об этом не беремся; нельзя, однако, не заметить одного обстоятельства, которое как будто бы говорит в пользу французского ученого: Зенон взял дискретные ряды отдельных масс, тогда как если бы он не имел в виду перехода из одного положения в непосредственно за ним следующее, то мог бы просто взять три непрерывных тела одинаковой длины *), изобразив их, напр., в виде трех равных отрезков (см. черт. 3); тогда точка C_1 прошла бы мимо всего



(Черт. 3).

*) Именно так излагает 4-ый аргумент P. Bayle в IV томе своего „Dictionnaire historique et critique", p. 539.

отрезка B_1 B_4 в то же время, в какое она успела бы пройти только мимо половины отрезка A_1 A_4, и т. д. Заметим, что если бы Зенон поступил так, как мы только что указали, то он мог бы натолкнуться на один из парадоксов, в которые впадает всякий, отрицающий существование актуально-бесконечных совокупностей. Дело в том, что, во все время движения отрезков C_1 C_4 и B_1 B_4, на одной вертикальной линии с точкой C_1 всегда находится по определенной точке отрезков B_1 B_4 и FA_1, при чем последний равен половине первого; таким образом, благодаря движению, получается однозначное соотношение между точками отрезков, из которых один вдвое больше другого. Быть может, нечто подобное Зенон имел в виду, если справедливо толкование в духе Целлера. Что же касается толкования Таннери, то здесь Зенон в сущности борется с допущением в пространственных и временных континуумах элементов, непосредственно следующих за данными. Такое допущение с современной точки зрения совершенно ошибочно, так как задолго до полного анализа понятия континуума ему уже приписывали свойство, по которому между каждыми двумя его элементами имеются еще элементы, так что нельзя говорить об элементе, непосредственно следующем за данным.

Как бы то ни было, „стадий“ не представляет для нас большого интереса: при одном понимании он содержит явную ошибку, при другом—борется с явно ошибочным утверждением IX).

Нам остается рассмотреть два первых аргумента Зенона, которые являются наиболее интересными и сильными. Один из них издавна носит имя „*Ахилла*“; другой обыкновенно называется „*дихотомией*“ в силу применяемого здесь повторного деления пополам.

IV.

„Дихотомия“ и „Ахилл“, подобно другим аргументам Зенона против движения, имеют целью вскрыть различные противоречия, вытекающие из этого понятия, и тем самым отнять у него всякое реальное значение. Что касается их содержания, то относительно “Ахилла“ никаких сомнений не возникает: Ахилл, известный быстротой своего бега, никогда не догонит медлительной черепахи. Обосновывается это так: прежде всего Ахиллу нужно добежать до того места, где находилась черепаха, когда он только начал свой бег; но за это время и черепаха успеет несколько продвинуться вперед; когда Ахилл достигнет этого второго положения черепахи, она опять-таки отойдет от него вперед, хотя и на еще меньший кусок пути, и т. д.; так что черепаха будет всегда впереди быстрейшего бегуна Эллады.

С „дихотомией“ дело обстоит сложнее: сущность утверждений Зенона понимается различно. Исходное положение этого аргумента по Аристотелю *) состоит в том, что „движущееся тело, прежде чем достигнуть конечной точки своего пути, должно достигнуть его середины“. Пользуясь этим бесспорным положением, Целлер **), в согласии с древними источниками, строит такое рассуждение: для того, чтобы движущееся тело перешло от одной точки к другой, оно должно сначала совершить половину этого пути; но чтобы пройти половину, оно должно сначала пройти половину этой половины, т. е. четверть всего пути; но чтобы пройти четверть пути, надо сначала пройти одну восьмую его, и т. д.; так как для всякой части пути можно говорить об ее половине, то процесс этот беспределен, и

*) *Diels*, l. c., p. 131 (см. пункт 25-й).
**) *Zeller*, l. c., p. 597.

мы видим, что наше тело должно пробежать бесконечное число отдельных частей пространства; но оно не может этого сделать в конечное время, т. е. движение вообще невозможно. Бросается в глаза, что при таком истолковании „дихотомия“ почти тожественна с „Ахиллом“: и там и здесь долженствующий быть пройденным путь разлагается на бесконечное число частей, и затруднение состоит в том, что нельзя произвести синтеза этих частей в конечное время. Указанное сходство было подмечено и древними; так, Аристотель *) видит различие обеих апорий лишь в различных способах деления на части рассматриваемого промежутка. Трудно допустить, чтобы это соображение ускользнуло от Зенона; если же принять, что он сознательно пошел на повторение, и все различие между „дихотомией“ и „Ахиллом“—как утверждает Целлер—состояло в том, что в первом случае мы имеем дело с постоянной границей, а во втором—с подвижной, то для полной аналогии было бы естественнее в первом аргументе делить пополам *оставшуюся* часть пути: сначала тело должно пройти половину пути, потом опять половину оставшейся его части (т. е. четверть), потом половину оставшейся (т. е. одну восьмую), и т. д. до бесконечности. Основываясь на этом, было бы вполне в духе Зенона утверждать, что движущееся тело никогда не достигнет конца своего пути: на сколько бы оно ни продвинулось вперед, всегда оставалось бы нечто, отделяющее тело от его цели. Если бы, напротив, дело шло о том, чтобы выдвинуть в центр рассуждения именно бесконечность частей, то на ум читателя или слушателя можно было бы сильнее воздействовать при ином способе деления промежутка: разделим его пополам, потом *каждую* по-

*) *Diels*, l. c., p. 131 (см. п. 26-2).

ловину пополам, потом *каждую* четверть пополам, и т. д.; число частей возрастало бы значительно быстрее. Однако Зенон ничего подобного не делает; его способ деления таков, что он отодвигает все дальше и дальше ту часть пути, которая должна быть пройдена *первой*. Поэтому мы считаем правильнее понимание Гербарта*), по которому сущность „дихотомии" заключается в том, что *движение не может начаться*: никакая часть пути не будет достаточно малой для того, чтобы быть первой, ибо от всякой части можно взять половину, и чтобы пробежать эту часть, нужно сначала пробежать ее половину. Как бы то ни было, на подобном толковании можно остановиться, так как с другим, все равно, придется встретиться при рассмотрении „Ахилла".

Итак, мы примем, что в „дихотомии" Зенон производит такое деление пути, что различные его части располагаются в последовательности прохождения их движущимся телом; при этом оказывается, что в полученном ряду нет первого члена, так что движение как будто бы не может начаться.

Со времен Аристотеля старались опровергнуть аргументы Зенона с помощью утверждения, что пространство и время, как и другие непрерывные образы, нельзя мыслить *разделенными* на бесконечное число частей: они только *делимы* до бесконечности**). Так, Целлер о доказательствах Зенона говорит: „Все они исходят из предположения, что данная непрерывная величина разложена на бесконечно многие части, и из этого предположения они выводят противоречия и

---

*) *Herbart*, l. c., p. 200; см. также *Noël*, l. c., p. 103; *Dunan*, l. c., p. 30.

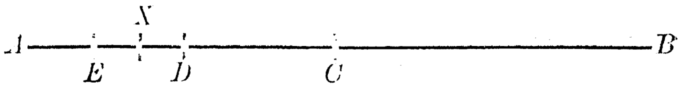
**) *Zeller*, l. c., p. 603 — 604; *Diels*, l. c., p. 131 (п. 25-й); см. также *Hegel*, l. c., p. 313, 316.

нелепости, которые тотчас исчезают, если уяснить себе, что деление такой величины, именно вследствие ее бесконечной делимости, никогда не может достигнуть последней границы. — что число частей, на которые она разложена, никогда не может быть бесконечным, а всегда будет только конечным". Несколько ниже приведенного места он прибавляет, что сказанное относится не только к пространству, но и к тому времени, в течении которого движется тело; поэтому, сколько бы мы ни дробили на части путь этого тела, то же самое можно сделать и с соответствующим промежутком времени, так что каждой части пространства будет отвечать известная часть времени*). Против установления такого соотношения между частями пространства и времени спорить, конечно, не приходится: в этом заключается сущность изложенной выше теории движения. Однако Целлер ошибается, думая, что на самом деле нельзя разложить часть пространства (напр.: прямолинейный отрезок) на актуально-бесконечное число частей. Конечно, если итти путем Зенона—путем последовательного деления пополам,—то достигнуть конца этого разложения никогда не удастся; но подобное возражение касается лишь той формы, в которую облечено деление промежутка в рассматриваемом аргументе. В действительности же можно разделить данный отрезок на актуально-бесконечное число частей, при чем это будет как раз то деление, которое нужно Зенону.

---

*) На бесконечную делимость времени, которая вполне покрывает бесконечную делимость пространства, указывали также в своих замечаниях Декарт и Лейбниц (см. статью Dunan'a, p. 18), а также Ст. Милль (l. c., p. 522). Замечания эти были сделаны по поводу „Ахилла", но по существу они направлены и против других аргументов Зенона.

Пусть речь идет об отрезке AB (см. черт. 4). В направлении от B к A разделим его на части так, чтобы



(Черт. 4).

1-я (BC) равнялась половине AB, 2-я (CD)—четверти, 3-я (DE)—одной восьмой AB, и т. д.; словом, деление должно произвести так, чтобы всякая часть, непосредственно следующая за другой в направлении BA, равнялась ее половине и чтобы совокупность всех частей вполне исчерпывала данный отрезок. Последний представляет из себя не что иное, как известную совокупность точек; поэтому деление будет завершено, если для каждой точки отрезка AB будет указана та часть, которой она принадлежит; именно, достаточно указать номер этой части. Мы условимся из двух точек, определяющих каждый частичный отрезок, только первую, т. е. его начало, относить к этому отрезку; а вторую, т. е. его конец или начало следующего отрезка, будем причислять к последнему. Условимся также обозначать длину отрезка AB через a; тогда та часть нашего отрезка, которая носит номер n, будет равна $\frac{a}{2^n}$. Положение любой точки X отрезка AB вполне определяется, если задано ее расстояние от точки B; это расстояние будем обозначать через x, так что $BX = x$.

Очевидно, что точка X тогда и только тогда принадлежит n-й части, когда x больше суммы длин первых (n—1) частей (или равно ей) и меньше суммы длин этих частей плюс еще длина n-й части. Первая сумма равна:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{a}{2^{n-1}}=\frac{a}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right\}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=a\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

а вторая получается отсюда путем прибавления $\frac{a}{2^n}$, так что она равна:

$$a\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Итак, условие необходимое и достаточное для того, чтобы точка X лежала в n-й части, заключается в неравенствах:

$$(*)\qquad a\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\leq x< a\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$$

Это замечание позволяет указать простой прием для определения номера той части, которой принадлежит точка X; искомый номер есть целое положительное число n, удовлетворяющее неравенствам:

$$(**)\qquad 2^{n-1}\leq\frac{a}{a-x}<2^n;$$

такое число n существует для всякого x, меньшего a, и единственно*). Прием этот основан на том, что неравенства (*) вытекают из (**). Действительно:

$$2^{n-1}\leq\frac{a}{a-x}\qquad\qquad \frac{a}{a-x}<2^n$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\geq\frac{a-x}{a}\qquad\qquad \frac{a-x}{a}>\frac{1}{2^n}$$

$$x\geq a\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\qquad\qquad a\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>x,$$ что

и требовалось доказать.

---

*) Оно находится с помощью конечного числа действий.

Таким образом, каждая точка отрезка AB попадает в одну и только в одну часть, и наша задача выполнена. Нетрудно доказать, что совокупность получаемых по изложенному способу частичных отрезков равномощна с совокупностью натуральных чисел, т. е., что для всякого натурального числа найдется отрезок, имеющий это число своим номером, и обратно: всякий отрезок имеет своим номером одно из чисел натурального ряда. В самом деле, если дано целое положительное число n, то соответствующая часть— n-ая по порядку, считая в направлении от B к A, и по величине равная $\frac{a}{2^n}$, найдется после n последовательных делений пополам отрезка BA в том же направлении; обратно, если дана какая-нибудь из тех частей, на которые разбит отрезок BA, то достаточно взять любую ее точку, чтобы по вышеизложенному способу найти соответствующее число натурального ряда—ее номер. Отсюда, между прочим, следует, что если перебирать эти части в порядке убывающей величины, в том самом порядке, в котором они следуют от B к A, то получается бесконечный ряд: в этом ряду не будет последнего члена, как его нет и в ряду натуральных чисел. Если теперь мы пожелаем мыслить части отрезка AB расположенными в обратном порядке, т. е. в направлении от A к B или в порядке возрастающей величины, то в этом ряду уже не будет первого члена. Мы снова пришли к основному положению разбираемого аргумента Зенона, при чем теперь действительно осуществлено разложение пути на актуально-бесконечное число частей. Возражение Целлера и его единомышленников, таким образом, падает.

Ничего не дало бы для разрешения „дихотомии“ указание, что, допуская бесконечную разделенность пространства, мы должны допустить и бесконечную разделенность времени; так что каждой из бесконечного множества частей пути будет соотнесена соответствующая часть времени *). Само по себе указание это—совершенно правильно; но оно, не разрешая зеноновой апории, в состоянии лишь ярко осветить ее сущность. Дело в том, что если мы соответственным образом разделим промежуток времени, в течение которого тело пробегает путь AB, то точно так же получим ряд частей, расположенных в порядке возрастающей величины, при чем в этом ряду не будет первого члена.

Отсутствие первого члена в так называемом открытом **) ряду содержало бы в себе противоречие лишь в случае конечного числа членов: перебирая их попарно, мы непременно дошли бы до элемента, предшествующего всем остальным, который и был бы началом ряда. Но если считать законным понятие об актуально-бесконечных совокупностях, то указанное ограничение не является безусловно необходимым. Примеры рядов, не имеющих начала, мы видим в совокупности всех отрицательных целых чисел, расположенных в порядке возрастающей величины, а также в различных частях, так называемых, слитных ***) рядов. Последние характеризуются тем, что между каждыми двумя их членами имеются другие члены, вследствие чего нельзя говорить об элементе, непосредственно следующем за данным; теперь стоит только взять совокупность членов слитного ряда, следующих за данным, чтобы получить ряд, не имеющий начала. В качестве примера можно привести любой арифмети-

*) Такое указание делает Цетлер (l. c., p. 604), исходя, впрочем, из иного понимания „дихотомии“ (см. выше).

**) Об этом см. „Вопросы и пр.“, стр., 159.

***) Ib., стр. 157—158.

ческий или геометрический континуум, так как последний прежде всего обладает свойствами слитного ряда; действительно, берем ряд вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x < 1$, и убеждаемся, что этот ряд не имеет первого члена. То же самое можно сказать о точках любой прямой, следующих за данной ее точкой в указанном направлении. *Представить* себе структуру подобных совокупностей мы не можем; но *мыслить* их и иметь о них достоверное знание—можем, как показывает пример анализа и геометрии.

Для нашей способности воображения затруднения усиливаются, если перейти ко времени. Тогда как элементы арифметических и геометрических образов могут сосуществовать и вообще даны независимо от течения времени,—промежутков времени, по самой сущности этого понятия, мыслится нами, как последовательность отдельных моментов; между тем, нет момента, непосредственно следующего за данным. Вот в этой-то „апории“ и заключается суть первого аргумента Зенона. Пусть некоторая материальная точка до момента t_1 включительно покоилась, а потом пришла в движение; *указать первый момент движения—мы не можем*; следовательно, говорит Зенон, движение не могло начаться,—оно вообще невозможно. Но что, собственно, обозначают наши утверждения при свете изложенной выше теории движения? „До момента t_1 включительно точка покоилась“—следовательно, различным моментам времени, предшествовавшим t_1, и самому этому моменту была соотнесена одна и та же точка пространства; „момент t_1 был последним моментом покоя, после чего началось движение“—следовательно, различным моментам времени, следовавшим за t_1, были соотнесены различные точки пространства. Указать среди этих моментов первый по порядку—

мы не можем, да его и нет; тем не менее нет ничего противоречивого в указанном соотношении между элементами временного и пространственного континуумов. *Представить* себе подобное соотношение во всех подробностях действительно нельзя, но *мыслить*— вполне возможно, как это показывает пример рациональной механики.

Таким образом, в своем первом аргументе Зенон отрицал возможность движения, исходя, повидимому, из того соображения, что во всяком открытом ряду должен существовать первый член. Как мы видели, последнее мнение было бы неопровержимым, если бы принять, что всякая вполне определенная совокупность должна состоять из конечного числа элементов. Мнение это, однако, ошибочно, и понятие об актуальной бесконечности проливает свет и на рассматриваемую апорию, делая возможным существование ряда, не имеющего первого члена.

С Зеноном случилось здесь то самое, с чем приходилось встречаться и современным математикам. Исходя из обычных представлений о покое и движении, о переходе тела из одного состояния в другое, Зенон подверг их логико-математическому анализу и дошел до понятия о ряде, не имеющем начала, что, в применении к конечному времени, уже превосходило всякую способность представления. Точно так же математики новейшего времени, исходя из представлений об эмпирической кривой с определенной касательной в каждой точке, о движении точки с определенной скоростью и т. д., пришли к понятиям о непрерывности и производной; однако, указав строгое определение этих понятий, они получили следствия, уже ускользавшие от всякой возможной интуиции; назовем, например, кривую *Вейерштрасса*, не имеющую касательной ни в одной из своих точек *). Ошибка Зенона состояла в том, что из невозможности вообразить начало движения он заключил к невозможности самого движения и достоверного знания о нем; тогда как современные математики не считают интуицию единственным и безошибочным источником математических знаний и, при помощи основных понятий и законов рассудочного мышления, с успехом исследуют вопросы (в том числе и функцию Вейерштрасса), превосходящие силы нашей интуиции. Ошибка Зенона вполне об'ясняется уровнем математических знаний в его время и не уменьшает его заслуги **).

Мы должны признать, что в дихотомии Зенон указал на серьезные трудности, которые создаются для способности воображения понятиями континуума и движения; они связаны с самым существом понятия о бесконечности: к этому понятию, говоря определеннее—к понятию о бесконечно-актуальных совокупностях, мы не можем подходить со всеми теми методами (напр., с заданием по об'ему), с которыми мы подходим к конечным классам. Это влечет за собою невозможность для нашей интуиции разобраться в некоторых вопросах, связанных с трансфинитными множествами. Однако в нашем распоряжении остаются

---

*) Подробнее об этом см. „Вопросы и пр.", стр. 64 и след. Отсутствие касательной об'ясняется тем, что эта кривая в каждом конечном промежутке делает бесконечно большое число бесконечно-малых колебаний; так что секущая, при сближении точек пересечения, не имеет предельного положения.

**) Очень высокое мнение о „дихотомии" высказывает цитированный выше Dunan (p. 38—43), считая ее единственным твердо обоснованным аргументом из всех четырех. По его мнению, здесь доказано, что время, пространство и движение суть только данныя представления и не имеют абсолютной реальности; т. е. Зенон посредством „дихотомии" установил не более и не менее, как основное положение Канта.

другие методы (напр., определение по содержанию), при помощи которых мысль может овладеть вопросом; а потому следует самым решительным образом отвергнуть скептические выводы из аргументов Зенона. Математики давно уже привыкли к тому, что рассудок справляется с вопросами, перед которыми бессильна интуиция.

V

Содержание „Ахилла" было изложено выше; связь этой апории с понятием актуальной бесконечности еще явственнее, чем у предыдущей. Как справедливо указывает Рессель *), она становится неразрешимой, если допустить, что часть не может быть равномощной целому. Действительно, если Ахилл догонит черепаху, то путь, пройденный последней, составит часть пути, пройденного Ахиллом; между тем, оба эти отрезка равномощны, как совокупности одновременных положений обоих бегунов. Мы признаем законным понятие об актуальной бесконечности; а потому нам необходимо поставить обратный вопрос: что может дать это понятие для разрешения „Ахилла" и разрешает ли оно его до конца?

Прежде всего формулируем математически задачу Зенона. Пусть точки *А* и *Ч* (представляющие собою Ахилла и черепаху) равномерно перемещаются по одной и той же прямой в одном и том же направлении, при чем *Ч* находится впереди *А* на расстоянии, равном a; пусть *А* перемещается с постоянною скоростью, равною единице скоростей, а *Ч*—движется в k раз ($k > 1$) медленнее; спрашивается, когда и где *А* догонит *Ч*. Так как мы имеем дело с равномерным дви-

*) *Russell* l. c., p. 350, 358.

жением, и скорость A равна 1, то путь, пройденный этой точкой, численно равен протекшему времени; таким образом, на оба поставленных вопроса ответ получается одновременно. Задачу эту можно решать различными способами.

Во-первых, можно исходить из понятия об относительном движении. В самом деле, абсолютное перемещение A и $Ч$ в пространстве для нас безразлично; важно лишь разделяющее их расстояние, т. е., их относительное положение. Поэтому можно допустить, что $Ч$ находится в покое, а A движется со скоростью, равною $(1-\frac{1}{k})$; тогда, если через z обозначить промежуток времени, в течении которого A догонит $Ч$, то

$$z=a:(1-\frac{1}{k}) = \frac{ak}{k-1}.$$

Во-вторых, легко составить уравнение, если за неизвестную принять z — путь, пройденный A до соединения с $Ч$ (это же число даст нам и соответственный промежуток времени). Действительно, точка $Ч$ пройдет тогда отрезок, равный $(z-a)$, и так как она движется в k раз медленнее, то

$$\frac{z}{z-a}=k, \text{ откуда } z=\frac{ak}{k-1}.$$

В-третьих, можно применить метод Зенона, т. е. разлагать искомый отрезок или промежуток времени на бесконечно-большое число беспредельно убывающих частей и пытаться найти искомую величину путем синтеза всех этих частей. Для того, чтобы A догнало $Ч$, первой точке необходимо прежде всего достигнуть исходного положения $Ч$, т. е. пройти путь, равный a; но в течении этого времени точка $Ч$, двигаясь в k

раз медленнее, тоже продвинется вперед на отрезок, равный $\frac{a}{k}$; тогда A, преследуя $Ч$, должно пройти прежде всего этот отрезок $\frac{a}{k}$; но в это же время $Ч$ продвинется вперед на расстояние, равное $\frac{a}{k^2}$, и т. д. Таким образом, путь, который должна пройти точка A, разлагается на такую бесконечную последовательность частей:

$$(1) \quad a, \ \frac{a}{k}, \ \frac{a}{k^2}, \ \frac{a}{k^2}, \ \ldots \ldots \ldots$$

Так как $k>1$, то этот ряд будет сходящимся, и мы получаем возможность говорить о его сумме; обозначив ее через z, имеем:

$$z = \frac{a}{1-\frac{1}{k}} = \frac{ak}{k-1} \quad X).$$

Заметим, что вычисление z по 3-му способу основано на понятиях предела и бесконечно-малой величины.

Из всех этих способов Зенон, без сомнения умышленно, выбрал тот, который связан с бесконечным процессом; по его методу, путь Ахилла разлагается на бесконечное число частей, и так как последовательный синтез этих частей никогда не может завершиться, то отсюда делается заключение о невозможности для Ахилла догнать черепаху, т. е. о противоречивости понятия движения вообще.

Мы условились под „движением“ понимать не что иное, как установление соотношения между точками пространства и моментами времени; само по себе понятие о таком соотношении трудностей не представляет. Но будем ли мы говорить о пути Ахилла или о соответствующем промежутке времени, мы встретимся в методе Зенона с одной и той же „апорией“: придется произвести последовательный синтез континуума из его частей, при чем число их не может быть конечным.

То обстоятельство, что точка A стремится к цели, которая сама находится в движении, не является связанным необходимым образом с существом рассматриваемого аргумента. В самом деле, первый способ решения задачи, основанный на понятии относительного движения, показывает, что она равносильна другой, где дело идет о достижении неподвижной границы; вероятно, нечто подобное имел в виду Целлер, утверждая, что „если быстрее движущемуся телу невозможно догнать движущееся медленнее, то вообще невозможно достигнуть указанной цели....“ *). Основываясь на этих соображениях, возможно на ряду с „Ахиллом“ поставить другой парадокс, который был уже намечен выше: движущаяся точка никогда не пройдет данного отрезка, ибо сначала она должна пройти его половину, потом половину оставшейся половины (т. е. четверть), потом половину оставшейся четверти (т. е. одну восьмую), и т. д. без конца. Здесь путь, предстоящий точке (назовем его через b), разлагается на такие части:

$$(2) \quad \frac{b}{2}, \frac{b}{2^2}, \frac{b}{2^3}, \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

получается бесконечный сходящийся ряд, и его сумма равна:

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = b.$$

Бросается в глаза полная тожественность математической природы обоих парадоксов: и там и здесь

*) *Zeller* l. c., p. 598.

путь точки является суммой бесконечного ряда; и там и здесь, как бы далеко мы ни шли в последовательном синтезе частей пути, всегда останется некоторый, хотя и сколь угодно малый отрезок, который еще должна пробежать движущаяся точка.

Тем не менее теория пределов и при указанном методе решения позволяет найти пройденный путь или соответствующий ему промежуток времени. Существует мнение, что исчисление бесконечно-малых, всецело основанное на теории пределов, вообще разрешает зеноновы апории *); мы не считаем возможным согласиться с этим. Во-первых, надо заметить, что не одна лишь теория пределов решает задачу; выше были указаны и совершенно элементарные пути для ее решения. Нет сомнения, что и Зенон сумел бы найти искомую часть пространства или времени; едва ли он сомневался, что в мире эмпирической действительности Ахилл догонит черепаху; но анализ понятия движения, по его мнению, вскрывал внутреннюю его противоречивость, а потому и заставлял отрицать за ним высшую, метафизическую реальность. Во-вторых, мы полагаем, что присоединение методов теории пределов к рассуждениям Зенона ничего в них по существу не меняет. Рассмотрим, в самом деле, что дает нам здесь эта теория. Идет ли дело о ряде (1) или (2), сумма членов его—назовем ее S—есть предел S_n, т. е. суммы n первых членов ряда, при возрастании n до бесконечности; так как члены обоих рядов положительны, то при всяком n имеем: $S_n < S$. Следовательно, хотя разность $(S—S_n)$ можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа, она всегда сама будет числом положительным, т. е.,

*) См., напр., *Виндельбанд*, l. с., стр. 58.

никакое значение переменной S_n не окажется равным ее пределу S. Но ведь это—как раз то самое утверждение, которое делает Зенон: как бы далеко мы ни шли в последовательном синтезе пути Ахилла из его частей, мы никогда полностью этого пути не получим. Если допустить, что вычисление по способу пределов вполне решает вопрос, т. е. считать законным скачок от S_n к S, то надо быть последовательным и допустить такое же рассуждение в применении к „дихотомии"; тогда от рассмотрения беспредельно убывающих частей $\frac{a}{2^n}$ мы перейдем к их пределу, т. е. к нулю, и скажем, что первая часть пути равна нулю: другими словами, будет доказано, что движение не начнется XI).

Итак, теория пределов со свойственной математике определенностью и ясностью понятий способна лишь укрепить позицию Зенона *).

---

*) *Mouret* в статье „Le problème d'Achille" (Revue Philos., t. XXXIII), критикуя книгу Frontera („Etude sur les arguments de Zénon contre le mouvement", Par. 1891), упрекает его в том, что он от ряда переходит к его пределу, не замечая скрытой здесь действительной трудности, подмеченной Зеноном. Однако, дальнейшие рассуждения автора показывают, что он и сам, стоя на старой точке зрения „компенсации ошибок", не вполне правильно представляет себе методы анализа бесконечно-малых. *Loewe*, соглашаясь в своей статье „Ueber die Zenonischen Einwürfe gegen die Bewegung" (Abhandl. d. Königl. böhm. Gesellschaft d. Wiss., VI Folge, I Bd.) с критикой Аристотеля, говорить по поводу затронутой в нашем тексте попытки следующее (p. 31): „существование предела никогда не оспаривалось, а оспаривалось только то, что движение когда-либо его достигнет. Вышеуказанные ряды тем менее доказывают противное, что предел никогда не получается с помощью действительного суммирования". *Evellin*, позиция которого была уже отмечена, делает подобное же замечание о пути Ахилла, представленном в виде суммы бесконечной прогрессии („Infini et Quantité" Paris 1880, p. 73—74).

На понятии суммы бесконечного ряда основана и критика „Ахилла“ в логике Минто *). Для простоты там положено $a = 100$ саж. и $k = 10$, так что путь Ахилла разлагается в бесконечный ряд, которого сумма равна $111^1/_9$ саж. По мнению Минто, рассуждения Зенона доказывают лишь, что Ахилл не догонит черепахи, пока не пробежит расстояния, равного сумме указанного ряда. Поэтому греческий философ обвиняется в *ignoratio elenchi*: „софист хочет доказать то, что Ахилл никогда не догонит черепахи, а на самом деле доказывает только то, что Ахилл перегоняет ее между 111 и 112-й саженями их пути“. Однако, существо рассуждений Зенона, как было установлено выше, и заключается в том, что движущееся тело не может пробежать пути, состоящего из бесконечного числа частей, ибо невозможен последовательный синтез бесконечного множества об‘ектов. Что суть дела именно в этом, вытекает из рассмотрения другого равносильного Ахиллу парадокса, где речь идет о пробеге определенного пути с неподвижной границей. Нам кажется, что Минто просмотрел указанную сторону вопроса, и его возражение само может послужить примером *ignoratio elenchi*. Эвелэн **) о подобных рассуждениях совершенно правильно говорит, что мы спрашиваем о том, *как* возможна встреча Ахилла с черепахой, а нам отвечают, как если бы мы спрашивали, *когда* она возможна.

Были, конечно, и другие попытки разрешить разбираемую апорию. Так, со времен Аристотеля некоторые философы в своих возражениях исходили из понятия о бесконечной делимости континуума. Такую

*) Минто „Дедуктивная и индуктивная логика“. (2-е изд.), стр. 288—289. См. также *Dunan*, l. c., p. 22—23.

**) *Evellin* „Infini et Quantité“, p. 71.

критику находим, например, у Целлера, и то, что у него направлено против „Ахилла“, по существу не отличается от того, что направлено против „дихотомии“; Целлер даже формулирует свои возражения сразу по адресу обоих аргументов (надо припомнить, что это еще оправдывается его пониманием „дихотомии“). С такой точки зрения прежде всего сошлются на *потенциальную* бесконечную делимость континуума, отрицая возможность мыслить последний, как уже разделенный на *актуально* бесконечное число частей. На это можно ответить тем, что, как и в случае „дихотомии“, на самом деле указать подобное разложение. Если мы для простоты возьмем не самого „Ахилла“, а другой упомянутый выше и равносильный ему парадокс, то нужное нам деление всего отрезка в вполне законченном виде было указано в предыдущей главе; теперь его части расположены в порядке убывающей величины, так что между ними нет последней, а это именно и требуется для второго аргумента Зенона. Если же противники сдадут указанную позицию и скажут, что бесконечной разделенности пространства соответствует, во всяком случае, и бесконечная разделенность времени и что, таким образом, каждой части пространства будет соотнесена определенная часть времени, то мы согласимся с таким утверждением, но добавим, что оно ничего не об‘ясняет: идет ли дело о пространстве или времени, мы одинаково не в состоянии совершить последовательный синтез бесконечного числа делимых или неделимых частей, на которые разложен данный континуум *). Более того, рассматриваемый аргумент Зенона и про-

*) Неоднократно было уже указано, что ссылка на бесконечную делимость времени, которая в состоянии покрыть таковую делимость пространства, не меняет дела, ибо пространство и время дают место одинаковым трудностям (см., напр., *Dunan*, l. c., p. 19).

являет всю свою силу, когда мы прилагаем его рассуждения именно к промежутку времени: здесь приходится иметь дело с протекшей бесконечностью отдельных моментов.

Предполагаемая недопустимость последнего понятия, как было указано выше, положена Кантом *) в основу доказательства тезиса 1-й антиномии: „Но бесконечность ряда именно в том и состоит, что он никогда не может быть закончен путем последовательного синтеза. Следовательно, бесконечный протекший ряд в мире невозможен"...

Итак, в основе 2-го аргумента Зенона лежит мысль, которая потом повторяется в антиномиях Канта, а именно—мысль о невозможности завершить бесконечный ряд путем последовательного синтеза. С этой предпосылкой необходимо согласиться, ибо она указывает существенное свойство актуально-бесконечных совокупностей: выше мы видели, что элементы таких совокупностей не могут быть пересчитаны. Но прежде чем делать отсюда какие-либо выводы, необходимо вспомнить, что *если нельзя определять бесконечных совокупностей по об'ему, то остается еще путь определения по содержанию, который позволяет нам иметь о них достоверное знание*; вот этой-то второй возможностью и пренебрегает разбираемая апория.

Действительно, я не могу последовательно рассмотреть все бесконечное число частей, на которые Зенону было угодно разбить путь Ахилла; но я могу охватить все их одним понятием и высказать о *любой* из них определенное суждение (напр., определить ее величину).

Зенон, как и всякий человек, живущий в мире эмпирической действительности, неоднократно, конечно,

*) „Критика чистого разума", стр. 266.

наблюдал, как „Ахилл догоняет черепаху“. Внешние чувства свидетельствовали ему об этом, повидимому, с полной достоверностью; но разум, раскрывая внутренние противоречия, связанные с понятием движения, низводил в его глазах эти наблюдения на степень простого обмана чувств. Возражение Диогена, начавшего ходить перед философом, развивавшим аргументы Зенона против движения, еще древними считалось слабым именно потому, что дело шло о сущности движения, а не об его видимости *). *Противоречия, которые Зенон видел в понятии движения, целиком об'ясняются свойствами бесконечных совокупностей, присущими исключительно им в отличие от совокупностей конечных.* Так, в предыдущей главе было выяснено, что „дихотомия“ основана на особенностях актуально-бесконечных рядов, в силу которых у них может и не быть *первого* члена; в „Ахилле“ выступает на первый план возможное отсутствие *последнего* члена. Оба признака могут и сосуществовать, например, у ряда вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x < 1$, или у ряда моментов времени, протекших между полуднем и первым ударом часов.

Основываясь на подобных соображениях, Бэйль **) говорит: „если бы час содержал в себе бесконечное множество частей, он никогда не мог бы ни начаться, ни кончиться“. Однако мы полагаем, что час содержит бесконечное множество моментов, и этот час истек; следовательно, на наших глазах завершилась бесконечная последовательность моментов. Кант отрицал

*) Этот спор между философами описан в остроумном стихотворении Пушкина „Движение“; оно заканчивается словами:

„Ведь каждый день пред нами солнцо ходит,
Однакож прав упрямый Галилей“.

**) *Bayle*, l. c., p. 539.

безначальность мира на том основании, что при таком допущении до настоящего момента протекла бы вечность, то-есть, завершился бы бесконечный ряд моментов; он упустил из вида, что с математической точки зрения такое же самое затруднение представляет любой истекший час, истекшая минута и вообще всякий конечный промежуток времени. Все эти „апории“ получают особенную силу именно в применении ко времени, ибо к существенным признакам времени относится последовательность отдельных моментов.

Выход может быть только один: признать ограниченность нашей познавательной способности пред лицом бесконечности; признать, что методы рассмотрения конечных рядов и совокупностей мы не вправе переносить на случай бесконечного числа членов. Ошибка Зенона—только в том, что из непредставимости или даже прямой невозможности для нас некоторых действий с актуально-бесконечными совокупностями он заключил к их полной непознаваемости и невозможности в подлинном бытии. Тем более это неправильно, что у нас самих есть иные методы, благодаря которым становится возможным достоверное знание об актуальной бесконечности; это показали глубокие исследования Г. Кантора. Учение о трансфинитных числах, вся арифметика и геометрия свидетельствуют о том, что, хотя мы и ограничены в своих силах там, где идет дело о бесконечности, однако, и в этих случаях не может быть речи о полном бессилии.

К манящей вершине бесконечности мы можем пробираться определенной узенькой тропинкой; если же, привлеченные кажущейся доступностью, мы свернем на соседние откосы, то безнадежно провалимся в ту или другую „апорию“.

ПРИМЕЧАНИЯ.

I) Надо отметить, что *практически* указанное решение не всегда возможно. Пусть, напр., речь идет о совокупности рациональных чисел, лежащих между 0 и 1; далее, ставится вопрос о принадлежности к этой совокупности некоторого числа, которое по своей величине заключается между указанными границами, но само оно задается таким бесконечным рядом или таким определенным интегралом, которые мы не можем найти в конечном виде. Вопрос сводится к тому, будет ли заданное число рациональным или иррациональным. В некоторых случаях математика разрешает подобные вопросы; напр., нечто подобное сделано для чисел e и π. Но может случиться, что в данном вопросе мы окажемся бессильны сделать определенное заключение о природе заданного числа. Основываясь на подобных соображениях, иногда возражают против определения, сделанного в тексте. Так, пишущему эти строки пришлось однажды выслушать такое возражение со стороны одного из наших математиков, известных своим интересом к философским вопросам. Последний привел, между прочим след. пример: один из присутствующих в комнате записал в своей записной книжке определенное число n, никому не показывая, спрятал книжку в карман; спрашивается, принадлежит ли это вполне определенное число к совокупности целых чисел, или нет.

Такие исключения основаны на том, что об'ект и совокупность задаются не одинаковыми способами, и у нас не хватает данных, чтобы сделать их однородными. Недостаточность знаний в некоторых случаях не может служить возражением против приведенного выше определения. Между тем, всякое вещественное число либо соизмеримо, либо нет; всякое число—либо целое, либо—нет. Сомневаться в этом можно, лишь отрицая закон исключенного третьего.

II) *Рссселъ* (в своих „Principles of Mathematics") приводит еще один интересный пример, который он называет *„парадоксом Тристрама Шэнди"*. Последний решил подробно описать свою жизнь, и на описание первых двух дней своего существования потратил два года; после этого он, конечно, отчаялся в своем предприятии. Но допустим, что Тр. Шэнди—бессмертен; спрашивается, опишет ли он всю свою жизнь, работая с прежней скоростью? На этот вопрос придется ответить утвердительно. В самом деле, какой бы день жизни писателя мы ни выбрали, он будет иметь определенный номер: он будет n-ым, считая с первого дня появления его на свет; а потому этот день будет описан в течение n-го года жизни автора. Если же каждый день жизни будет описан, то можно сказать, что вся жизнь будет описана. Правда, описание никогда не закончится; но это вполне естественно в виду бессмертия автора.

„Парадокс Тр. Шэнди" в фантастической форме делает совершенно верное утверждение, а именно: совокупность дней (в вечности) равномощна с совокупностью годов.

III) В тексте мы не могли войти в подробности о трансфинитных числах, так как это отвлекло бы нас слишком далеко в сторону; но указанные пояснения будет уместно предложить читателю в особом примечании. Эти сведения, интересные сами по себе, покажут более явственно, что об актуально-бесконечных совокупностях возможно доказательное знание, и тем подкрепят утверждения, делаемые в тексте.

Мы ограничимся, конечно, самыми элементами; дальнейшие выводы читатель найдет в след. книгах:

„Новые идеи в математике", сборник № 6: *„Учение о множествах Г. Кантора"* (СПБ. 1914).

И. Жегалкин „Трансфинитные числа" (Москва 1907); там же см. указание литературы.

Итак, понятия: „актуально-бесконечная совокупность", „равномощные совокупности", „мощность", „часть", „обширнее"—нам известны из текста. Мощность иначе называется *кардинальным* (количественным) *числом*. Числа натурального ряда:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots\ n,\ \ldots\ldots$$

каждое в отдельности, дают нам конечные мощности. Но еще *блаж. Августин*, по цитате Г. Кантора, сказал об этих числах: „*singuli quique finiti sunt et omnes infiniti sunt*". Действ., в тексте мы видели, что указанная совокупность натуральных чисел равномощна с совокупностью четных чисел, т. е.—со своею частью, а потому, является актуально-бесконечной. Мощность натурального ряда Кантор обозначает еврейской буквой *алеф* с ноликом; для нас будет удобнее назвать ее через α_0. Далее, всякое множество (этот термин имеет то же самое значение, что и „совокупность"), равномощное с рядом натуральных чисел, называется *исчислимым*; установив означенное соответствие его элементов с числами натурального ряда, мы можем расположить их в виде следующего просто-бесконечного ряда:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots\ a_n,\ \ldots\ldots$$

Из каждого актуально-бесконечного множества можно выделить, в качестве его части, исчислимую совокупность; отсюда нетрудно вывести, что α_0 есть наименьшее из трансфинитных кардинальных чисел.

Вообще мощность совокупности M обозначается Кантором через $\overline{\overline{M}}$, показывая двумя черточками, что здесь мы отвлекаемся и от состава элементов и от их порядка; остается известное количественное свойство, общее всем совокупностям, равномощным с данной.

Основные арифметические действия с конечными числами нам известны; посмотрим, как видоизменяются они, если присоединим сюда новое трансфинитное число α_0. Если даны две совокупности M и N, то под их суммой $(M+N)$ будем понимать новую совокупность, составленную из элементов обоих данных. Тогда суммой мощностей $\overline{\overline{M}}$ и $\overline{\overline{N}}$ называется мощность суммы $(M+N)$, так что:

$$\overline{\overline{M}}+\overline{\overline{N}}=(\overline{\overline{M+N}}).$$

Таким путем можно, например, доказать равенство:

$$3+5=8;$$

но сейчас нам интересны те случаи, когда в качестве слагаемых появляются трансфинитные числа; заметим, что по самому определению суммы, порядок слагаемых не имеет значения; следовательно, это свойство суммы, равно как и сочетательный закон сложения:

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

переносятся на трансфинитные числа. С другой стороны, найдем сумму (α_0+k), где k – любое целое положительное число. Первую мощность α_0 имеет исчислимое множество:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots\ a_n\ \ldots\ldots;$$

а число k будет мощностью такой конечной совокупности:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots\ b_k.$$

След., сумма (α_0+k) определяется, как мощность множества:

$$(*)\ \ldots\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_k,\quad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n\ \ldots$$

(порядок слагаемых—безразличен).

Нетрудно видеть, что эта последняя совокупность—исчислима; в самом деле, элементы b можно привести в соответствие с числами:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ k;$$

а элементы a—с числами:

$$k+1,\ k+2,\ k+3, \ldots \ldots k+n \ldots \ldots ;$$

так что совокупность (*) окажется в однозначном соответствии с рядом натуральных чисел. Но всякая исчислимая совокупность имеет мощность $= \alpha_0$; и вот мы приходим к неожиданному равенству:

$$(1) \qquad \alpha_0 + k = k + \alpha_0 = \alpha_0.$$

Здесь, по словам Г. Кантора, лежит „великий камень преткновения“ на пути к учению о бесконечности, который порождал истинный *horror infiniti*. Между тем, ничего нет особенного в том, что действия с новыми трансфинитными числами складываются иначе, чем с издавна известными нам конечными; никого, ведь, не поражает, что теоремы неевклидовой геометрии резко отличаются от теорем евклидовой.

Более того, можно доказать, что:

$$(2) \qquad \alpha_0 + \alpha_0 = \alpha_0.$$

Действ., совокупности четных и нечетных чисел, как равномощные с совокупностью натуральных чисел (см. текст), обе—исчислимы, т. е. имеют мощности, равные α_0; поэтому слагаемые в предыдущем равенстве можно рассматривать, как мощности таких множеств:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots \ldots 2n, \ldots \ldots$$
$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots \ldots (2n-1), \ldots ;$$

тогда от соединения этих множеств получим ряд натуральных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots \ldots (2n-1),\ 2n, \ldots \ldots ;$$

что и доказывает равенство (2).

Произведение двух мощностей можно определить, как сумму равных слагаемых, так что равенство (2) перепишется так:

$$(2^1) \ldots \ldots \ldots \ldots \alpha_0 \,.\, 2 = \alpha_0.$$

Но можно ввести произведение непосредственно. Пусть множество M состоит из элементов m, а N—из n; составим новое множество $(M.N)$ из всевозможных пар:

$$(m,\ n),$$

образованных с помощью элементов данных множеств. Произведение данных мощностей определяется, как мощность новой совокупности:

$$\overline{M} \,.\, \overline{\overline{N}} = (\overline{\overline{M\,.\,N}}).$$

Таким путем можно, напр., найти равенство:

$$3 \, . \, 5 = 15.$$

Предложим себе вычислить сразу произведение $\alpha_0 \, . \, \alpha_0$; из равенства (2^1) уже нетрудно вывести, что:

$$\alpha_0 \, . \, k = \alpha_0,$$

где k — конечное число. Заметим, что приведенное выше определение произведения не зависит от порядка множителей. Переходя к определению произведения α_0 на α_0, надо взять два исчислимых множества (напр.: два ряда натуральных чисел) и образовать всевозможные пары, беря 1-й элемент произвольно из 1-го ряда, а 2-й—из 2-го. Совокупность указанных пар можно привести в одно-однозначное соответствие с квадратиками нижеследующей таблицы (читатель благоволит пока не обращать внимания на числа, стоящие внутри квадратиков, кроме верхней строки и левого столбца, которые нужны с самого начала):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67		
2	3	5	8	12	17	23	30	38	47	57	68			
3	6	9	13	18	24	31	39	48	58	69				
4	10	14	19	25	32	40	49	59	70					
5	15	20	26	33	41	50	60	71						
6	21	27	34	42	51	61	72							
7	28	35	43	52	62	73								
8	36	44	53	63	74									
9	45	54	64	75										
10	55	65	76											
11	66	77												
12	78													
13														

Действ., каждый квадратик связан с двумя числами (в верхней строке и в левом столбце), определяющими те полосы, на пересечении которых стоит рассматриваемый квадратик; так, напр., квадратик, внутри которого стоит число 49, связан с парой чисел 7 и 4, квадратик 64 связан с парой 3 и 9, и т. д. Обратно, задание пары чисел вполне определяет соответствующий квадратик; так. напр., паре чисел 4, 9 соответствует квадратик 75, и т. д. След., мощность совокупности этих квадратиков и будет мощностью произведения $\alpha_0 \cdot \alpha_0$.

С другой стороны, совокупность квадратиков равномощна с совокупностью натуральных чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \ldots n, \ldots \ldots$$

Для того, чтобы в этом убедиться, перенумеруем квадратики с помощью этих чисел по косым линиям так, как это указано на таблице; тогда каждый квадратик, как бы далеко он ни стоял, получит определенный номер, и обратно: для каждого натурального числа найдется соответствующий квадратик. Выходит, что мощность совокупности квадратиков равна α_0, и читатель волей-неволей должен согласиться с равенством:

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_0 \cdot \alpha_0 = \alpha_0.$$

Степень мы определим обычным образом,—как произведение равных сомножителей, так что равенство (3) дает тогда:

$$\alpha_0^2 = \alpha_0.$$

Далее имеем:

$$\alpha_0^3 = \alpha_0^2 \cdot \alpha_0 = \alpha_0 \cdot \alpha_0, = \alpha_0$$

и вообще:

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_0^k = \alpha_0,$$

где k — любое число натурального ряда.

После всего изложенного читатель, пожалуй, придет к выводу, что действия над α_0 всегда будут приводить к той же самой мощности. Однако, возвышение в степень не оправдает этих ожиданий; сейчас мы докажем, что уже 2^{α_0} будет мощностью, большей α_0. Указанную степень мы будем рассматривать, как произведение:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \ldots,$$

где совокупность множителей—исчислима, т. е.—имеет мощность $= \alpha_0$.

Для вычисления мощности произведения, сделаем естественное обобщение правила, данного для двух множителей, и составим всевозможные комбинации:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots\ldots v_n, \ldots\ldots),$$

где v_1 — один из элементов 1-й двойки, v_2 — один из элементов 2-й двойки, и т. д. Пусть число 2 представляет мощность совокупности, состоящей из двух элементов x и y; тогда любое v_n или $= x$, или $= y$. След., 2^{α_0} будет мощностью множества, составленного из всевозможных совокупностей:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots\ldots v_n, \ldots\ldots),$$

где для каждого v возможны 2 и только 2 значения, а именно: x или y. Попробуем допустить, что это множество—исчислимо, т. е. что его элементы можно расположить в просто бесконечный ряд:

$$(*) \ldots V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4, \ldots\ldots V_n, \ldots\ldots,$$

и пусть:

$$V_1 = (v_{11},\ v_{12},\ v_{13}, \ldots\ldots v_{1n}, \ldots\ldots)$$
$$V_2 = (v_{21},\ v_{22},\ v_{23}, \ldots\ldots v_{2n}, \ldots\ldots)$$
$$V_3 = (v_{31},\ v_{32},\ v_{33}, \ldots\ldots v_{3n}, \ldots\ldots)$$

и т. д.;

при чем каждое v_{mn} или $= x$, или $= y$.

Так. обр., мы допускаем, что ряд (*) вполне исчерпывает элементы рассматриваемого множества; но сейчас мы без труда укажем элемент этого множества, который не заключается в ряду (*). Таковым будет:

$$U = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4, \ldots\ldots u_n, \ldots\ldots)$$

при условии, что:

$$u_n = x, \text{ если } v_{nn} = y$$

и

$$u_n = y, \text{ если } v_{nn} = x;$$

так, напр., если $v_{11} = x$, то $u_1 = y$; если $v_{22} = y$, то $u_2 = x$; если $v_{33} = x$, то $u_3 = y$, а если $v_{33} = y$, то $u_3 = x$, и т. д. След., совокупность U отличается от каждой из совокупностей (*) по крайней мере одним элементом; а потому U не находится в ряду (*). Таких совокупностей U можно построить сколько угодно (на основании подобных же правил); но уже сказанного достаточно, чтобы установить, что 2^{α_0} и α_0—не равномощны.

Выше мы видели, что α_0 — наименьшая из трансфинитных мощностей; след., мы должны признать, что:

$$2^{\alpha_0} > \alpha_0,$$

и мы пришли к мощности, большей первого алефа.

О других трансфинитных мощностях мы скажем ниже; а сейчас применим полученные результаты к определению мощностей некоторых множеств.

Какова мощность совокупности всех положительных рациональных чисел? Что эта совокупность—трансфинитна, в достаточной мере ясно: уже в промежутке между двумя любыми целыми числами лежит бесконечное множество дробей. Каждое рациональное число есть выражение вида:

$$\frac{p}{q},$$

где p и q — любые числа натурального ряда. След., рассматриваемое множество равномощно с совокупностью всевозможных пар:

$$(p, q);$$

мощность же последней совокупности $= \alpha_0$, как было указано выше.

Итак, множество всех положительных дробей—исчислимо. Надо добавить, что для расположения их в просто бесконечный ряд:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$$

надо вывести их из обычного расположения в порядке возрастающей величины; в этом порядке они не могут быть соотнесены с натуральным рядом, ибо для данной дроби нет дроби, непосредственно за ней следующей: какую бы близкую к ней дробь вы ни взяли, всегда найдется другая дробь, лежащая между двумя данными (напр.: их арифметическое среднее); тогда как для каждого целого числа имеется число, непосредственно за ним следующее. Для того, чтобы обнаружить исчислимость множества рациональных чисел, надо выписать их в том самом порядке, в котором выше были перенумерованы пары чисел (см. таблицу); тогда получим след. ряд:

$$\frac{1}{1};\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3};\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4};\ \frac{5}{1},\ \ldots$$

(верхняя строка дает числителя, левый столбец—знаменателя).

Г. Кантор доказал даже, что совокупность всех вещественных алгебраических чисел (т. е. чисел, служащих корнями алгебраических уравнений) тоже имеет мощность $= \alpha_0$.

Займемся мощностью континуума, о котором придется так много говорить в тексте по поводу одной из апорий Зенона.

Посредством подстановки:

$$z' = \frac{1}{1+z} \text{ и } z = \frac{1}{z'} - 1$$

совокупность всех положительных вещественных чисел оказывается равномощной с совокупностью вещественных чисел, лежащих в промежутке между 0 и 1. Действ., когда z пробегает все значения от 0 до ∞, число z' изменяется в промежутке от 1 до 0 и обратно, при чем указанное соотношение очевидно обладает свойством одно-однозначности. Поэтому, говоря о мощности континуума, можно ограничиться промежутком от 0 до 1 (для отрицательных чисел можно сделать подобные же заключения). Все числа этого промежутка (как рациональные, так и иррациональные) можно задать по двоичной системе счисления, т. е.—приняв за основание счисления число 2 вместо обычного 10; именно, эти числа будут заданы бесконечными сходящимися рядами вида:

$$\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \frac{\varepsilon_3}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \ldots\ldots,$$

где каждое ε может $= 1$ или $= 0$. Тогда в двоичной системе такое число x можно записать так:

$$x = 0, \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots\ldots \varepsilon_n \ldots\ldots$$

(подобно тому, как мы пишем десятичные дроби в обычной системе счисления). После этого континуум оказывается равномощным с совокупностью всевозможных комбинаций:

$$(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots\ldots \varepsilon_n, \ldots\ldots),$$

где каждое ε может иметь одно из двух раз на всегда заданных значений. Мы видели выше, что мощность такой совокупности равна 2^{α_0}, и след. такова будет и мощность континуума *). Мы убеждаемся, что мощность континуума превосходит мощность целых, рациональных и алгебраических чисел.

Кантор доказал, далее, что мощность континуума k измерений одинакова с мощностью линейного континуума; после всего изложен-

*) Ради экономии места, мы не останавливаемся на одном затруднении, связанном с тем, что при нашем обозначении некоторые числа повторятся дважды; это не повлияет на мощность рассматриваемой совокупности.

ного читателю нетрудно будет согласиться с этим (вспомним, напр., что $\alpha_0^K = \alpha_0$), а нам пора кончать заметку о мощностях. Добавим только, что *Пеано* иллюстрировал это предложение, построив кривую, заполняющую площадь квадрата; координаты (x, y) переменной точки суть функции переменной независимой t; и когда последняя пробегает промежуток от 0 до 1, указанная точка принимает всевозможные положения внутри квадрата со стороной $= 1$.

Изученные нами мощности или кардинальные числа, отвлекаясь от состава элементов данного множества и от их порядка, выражают его количественное свойство; теперь нам предстоит познакомиться с другими трансфинитными числами, связанными с идеей порядка или расположения элементов. Начать придется с некоторых определений.

Пусть дано множество M с элементами $a, b, c, \ldots$; положим, что между этими элементами каким-нибудь способом устанавливаются известные соотношения, которые выражаем слевами: „один элемент *предшествует* другому" (а этот последний *следует* за первым); в интересах сокращения письма, условимся эти отношения обозначать символами: „прш" и „сл".

Множество наз. *упорядоченным*, если о всякой паре его элементов a и b мы можем утверждать, что:

$$\text{или } a \text{ прш } b, \text{ или } b \text{ прш } a,$$

при чем, если имеем:

$$a \text{ прш } b \text{ и } b \text{ прш } c,$$

то необходимо должно быть:

$$a \text{ прш } c.$$

Так, напр., если возьмем совокупность всех рациональных чисел и условимся говорить, что „a прш b", если $a < b$, то, как легко убедиться, получим упорядоченное множество.

Два упорядоченных множества наз. *подобными*, если между их элементами можно установить такое одно-однозначное соответствие, при котором относительный порядок элементов остается неизменным. Последнее утверждение надо понимать так: если a и a', b и b' суть 2 пары соответственных элементов в совокупностях M и M' и если a *прш* b, то должно быть a' *прш* b'. Легко видеть, что подобные множества—равномощны, но обратного утверждать нельзя: совокупность рациональных чисел имеет мощность$=\alpha_0$, но в описанном выше расположении она не подобна натуральному ряду чисел, ибо в последнем для каждого члена есть *непосредственно* за ним следующий, тогда как для рациональных чисел этого нет.

Подобно тому, как мощность была определена в качестве свойства, общего всем равномощным друг с другом множествам, так и теперь мы определим *тип расположения*, как то общее, что присуще всем подобным между собою множествам.

Тип множества M Кантор обозначает через $\overline{M}$, указывая одной черточкой на то, что здесь мы отвлекаемся лишь от состава элементов, принимая во внимание их порядок. В частности, тип натурального ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n \ldots$$

Кантор обозначает греческой буквой ω (это множество становится упорядоченным, если под отношением „пгш“ понимать отношение „меньше“). Далее, тип упорядоченного выше множества рациональных чисел обозначается греческой же буквой η.

Наконец, упорядоченное множество M наз. *вполне упорядоченным* при соблюдении след. условий:

1) M имеет первый элемент;

2) если в M вообще имеются элементы, следующие за всеми элементами к.-л. части его M', то среди них имеется первый элемент.

Применяя последнее условие к части, состоящей из одного элемента, получаем характерное свойство вполне упорядоченного множества: всякий элемент имеет первый, непосредственно за ним следующий; исключением может явиться лишь последний элемент, если таковой существует. Так, напр., совокупности:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_{k-1}, b_k;$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

очевидно будут вполне упорядоченными; только первая—конечна, а вторая—трансфинитна.

Тип всякого вполне упорядоченного множества и называется *ординальным* (порядковым) *числом*. Так, напр., введенное выше ω будет числом, а η не будет таковым, хотя оно является одним из типов расположения. Ординальное число не надо смешивать с порядковыми числительными: 1-й, 2-й, и т. д.; из предыдущих определений ясно, что это—нечто совершенно иное.

Различие между кардинальными и ординальными числами проявляется в полной мере лишь для актуально-бесконечных совокупностей; для конечных же эти два понятия почти сливаются. Так, число 5, помимо известной мощности, является также типом след. конечной вполне расположенной совокупности, имеющей указанную мощность:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.$$

Пересчитывая элементы любой пятерки, мы располагаем их именно в такой ряд, и никакой другой вполне упорядоченной совокупности из 5 членов построить нельзя; так что обе точки зрения здесь тесно связаны друг с другом. Между тем, мы сейчас познакомимся с бесчисленным множеством различных вполне упорядоченных множеств, имеющих одну и ту же трансфинитную мощность α_0.

Первое трансфинитное ординальное число есть ω, которое служит типом расположения натурального ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \ldots n, \ldots \ldots ;$$

сложение, умножение и возвышение в степень дадут нам сейчас другие трансфинитные числа.

Пусть $\overline{M}$ и $\overline{N}$ суть типы двух вполне упорядоченных множеств M и N. Образуем новое вполне упорядоченное множество след. образом: выпишем все элементы множества M, сохраняя их порядок, а за всеми ими заставим следовать элементы множества N,—тоже не нарушая их первоначального расположения. Тогда тип нового множества будет суммой $\overline{M} + \overline{N}$. Исходя из этого определения суммы, найдем числа $(1 + \omega)$ и $(\omega + 1)$.

Первое будет типом множества:

$$b_1; \; a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n, \ldots \ldots,$$

т. е., оно—тождественно с ω; а 2-е связано с вполне упорядоченной совокупностью:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n, \ldots \ldots ; \; b_1,$$

и оно отлично от ω, ибо новый ряд имеет последний член, чего нет в типе ω. Итак:

$$1 + \omega = \omega \quad \text{и} \quad \omega + 1 \neq \omega;$$

точно так же докажем вообще:

$$k + \omega = \omega \quad \text{и} \quad \omega + k \neq \omega, \tag{5}$$

где k—любое конечное ординальное число.

Мы убеждаемся, что переместительный закон сложения не имеет места для трансфинитных ординальных чисел; но сочетательный закон остается в силе, как это нетрудно доказать. Читатель согласится без труда, что мощность типа $(\omega + k)$ будет тем же α_0, ибо:

$$\alpha_0 + k = \alpha_0.$$

Произведение типов $\overline{M}$ и $\overline{N}$, где $\overline{M}$—множимое, а $\overline{N}$—множитель (это здесь необходимо тщательно различать) определяется следующ.

образом. Возьмем множество N и каждый элемент его заменим множеством типа M; таким образом, в каждом из таких множеств элементы следуют друг за другом в том же порядке, что и в M; а сами отдельные множества типа $\overline{M}$ расположены друг по отношению к другу совершенно так же, как элементы в совокупности типа $\overline{\overline{N}}$. Произведение $\overline{M}\,.\,\overline{N}$ и определяется, как тип нового вполне упорядоченного множества. Найдем, для примера, произведения:

$$2\,.\,\omega \text{ и } \omega\,.\,2.$$

Первое будет типом ряда:

$$a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ a_3,\ b_3;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad a_n,\ b_n;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

нетрудно видеть, что мы снова получаем число ω. Что касается второго произведения, то для него надо составить ряд:

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ .\ .\ .\ .\ a_n,\ .\ .\ .\ .\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ .\ .\ .\ .\ b_n,\ .\ .\ .\ .\ ,$$

и это будет новый тип, отличный от ω (элемент b_1 не имеет непосредственно предшествующего ему, имея вообще предыдущие элементы, чего нет в типе ω).

Итак:

$$2\,.\,\omega = \omega \text{ и } \omega\,.\,2 \neq \omega;$$

точно так же получим вообще:

$$(6)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad k\,.\,\omega = \omega \text{ и } \omega\,.\,k \neq \omega.$$

Переместительный закон и здесь не выполняется (а сочетательный остается в силе).

От умножения нетрудно перейти к степени; напр. ω^2 определится, как произведение $\omega\,.\,\omega$; здесь мы, очевидно, придем к новому типу, но все той же мощности α_0.

Г. Кантор дает правила для построения ординальных чисел, определяемых символами:

$$\omega\,.\,k + m,\ .\ .\ .\ .\ \omega^2,\ .\ .\ .\ .\ \omega^2 + k,\ .\ .\ .\ \omega^2 + \omega + 1,$$
$$.\ .\ .\ \omega^2 + \omega\,.\,2,\ .\ .\ .\ .\ .\ \omega^2 + \omega\,.\,k + m,\ .\ .\ .\quad .\ \omega^2\,.\,2,$$
$$.\ .\ .\ \omega^2\,.\,k,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \omega^3,\ .\ .\ .\ \omega^k,\ .\ .\ .\ .\ \omega^\omega\ .\ .\ .$$
$$\omega^{\omega^{\omega}},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

все они суть типы вполне расположенных исчислимых множеств.

Последнее замечание служит основанием для деления чисел на классы. Конечные ординальные числа образуют I класс; II же класс составляют всевозможные типы вполне упорядоченных множеств, имеющих мощность $= \alpha_0$; сюда относятся те трансфинитные числа, о которых только что шла речь.

Но если мы рассмотрим множество, составленное из всех чисел II класса, то мощность его уже будет больше α_0; Кантор обозначает ее через α_1; это—2-ая трансфинитная мощность, по величине непосредственно следующая за α_0.

Затем Кантор рассматривает всевозможные типы вполне упорядоченных множеств мощности α_1 и называет их числами III класса. Оказывается, что совокупность всех чисел III класса имеет мощность, следующую по величине за α_1; эта мощность обозначается через α_2, и т. д.

Так. обр., получается бесконечный ряд возрастающих трансфинитных мощностей:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$$

Находится ли в этом ряду и мощность континуума, равная 2^{α_0} или нет,—вопрос еще не выяснен. К нерешенным вопросам принадлежит еще теорема *Zermelo*: „всякое множество можно мыслить вполне упорядоченным". Доказательство этой теории подверглось оживленной критике, и, в виду тонкости вопроса, дело нельзя считать выясненным окончательно. Если принять теорему *Zermelo*, то мощность континуума будет равна одному из алефов.

IV) Мы изложили основы учения об актуально-бесконечных совокупностях и числах, при чем здесь имелось в виду *бесконечно большое*; можно ли развить подобно этому учение об актунально-*бесконечно-малых* величинах? В прежнее время были попытки смотреть на дифференциалы, как на величины такого рода [напр.,—*Пуассон*]; но метод пределов раз навсегда устранил это заблуждение. Сам Кантор, творец трансфинитного, является ярым противником актуально-бесконечно-малых; он доказывает, что они несовместимы с понятием линейной числовой величины. Если под этим термином понимать понятие о континууме, как оно сложилось в новейшее время, главным образом благодаря работам *Дедекинда*, то нетрудно убедиться в справедливости утверждения Кантора. Действ., если a есть конечное число, а ε — актуально-бесконечно-малое, то должно быть:

$$n \cdot \varepsilon < a$$

при всяком целом положительном n; в этом заключается сущность рассматриваемого понятия. Между тем, из аксиомы непрерывности [носящей также имя Дедекинда] вытекает так наз. „*начало Архимеда*“, которое гласит, что для любой пары чисел a и ε найдется такое натуральное число n, что

$$n \cdot \varepsilon > a.$$

След., актуально-бесконечно-малым не место в числовом континууме, с которым мы имеем дело в анализе.

Когда указанное обстоятельство выяснилось, то появились попытки создать „не-архимедовы“ системы чисел, в которых нашлось бы место для актуально-бесконечно-малых.

Итальянский геометр *Веронезе* в своих „*Fondamenti di Geometria*“ пытался осуществить такую очень глубоко и широко задуманную систему чисел, которая должна была послужить потом основой для его геометрических изысканий. Однако, Веронезе был обвинен в противоречиях, и его построения не получили общего признания. Построить не-архимедову систему чисел—и притом довольно просто—удалось немецкому ученому *Гильберту* в его *Grundlagen der Geometrie* (вышло на русском языке). Суть дела заключается в следующем.

Рассматривается совокупность таких алгебраических функций от t, которые получаются из t с помощью четырех основных действий и еще пятого действия, задаваемого выражением:

$$\left| \sqrt{1 + W^2} \right|,$$

где W обозначает функцию, уже принадлежащую нашей совокупности. Указанные функции будут вещественными и однозначными. Пусть v— одна из них; так как она имеет конечное число корней, то для достаточно больших положительных значений t функция v будет сохранять один и тот же знак.

На функции указанной совокупности будем теперь смотреть, как на особого рода комплексные числа. В этой системе комплексных чисел все обычные законы действий очевидно остаются в силе. Далее возьмем 2 различных „комплексных“ числа a и b и условимся говорить, что a больше или меньше b, смотря по тому, будет ли разность:

$$a - b = v,$$

как функция от t, для достаточно больших положительных значений t, всегда положительной, или всегда отрицательной. Благодаря этому условию, наши комплексные числа можно расположить в ряд по их величине, и неравенства между ними подчиняются обычным законам.

Единица войдет в рассматриваемую систему, так как ее можно получить, деля t на t; след., сюда войдут и все натуральные числа. Сравним теперь 1 и t, чтобы выяснить вопрос о начале Архимеда; имеем:

$$n . 1 - t = n - t,$$

где n—любое целое положительное число. Для достаточно больших положительных значений t, разность $(n - t)$, которая есть функция от t, будет сохранять знак минус. Поэтому мы должны признать, что при всяком n будет:

$$n . 1 < t;$$

отсюда видно что 1, в сравнении с t, является актуально-бесконечно-малой.

Полученную „комплексную" систему чисел Гильберт использует в интересах своих геометрических исследований, посвященных главным образом аксиоме непрерывности. За этими пределами его актуально-бесконечно-малые применяются редко.

V) Противники актуальной бесконечности находят последнее прибежище в указании на те противоречия, которые встретились в учении о множествах и трансфинитных числах. В виде предварительных указаний, сделаем следующие ссылки:

1) *Жегалкин*, l. c., стр. 342—345.

2) *Bernstein* „Ueber die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen" [Math. Ann. Bd. 60].

3) *Russell* неоднократно возвращался к этому вопросу в своих работах; в окончательном виде его мнение изложено в книге" Principia Mathematica" (vol. I, p. 63 и сл.), написанной в сотрудничестве с *Whitehead*'ом. Взгляды этих авторов кратко очерчены в нашей книге „Вопросы обоснования геометрии" (стр. 104 и сл.; 241).

Читатель, пожелавший углубиться в вопрос, найдет в указанных работах дальнейшие указания литературы.

Противоречие, относящееся к учению об ординальных трансфинитных числах, было впервые указано итальянским ученым *Burali-Forti*; суть его заключается в следующем. В примечании III мы познакомились с бесконечным (не исчислимым) рядом трансфинитных ординальных чисел:

$$(*)\ 1, 2, 3, \ldots n, \ldots \omega, \omega + 1, \ldots \omega . 2, \ldots \omega^2, \ldots \omega^{\omega} \ \ldots$$

Нетрудно видеть, что здесь мы имеем дело с некоторым вполне упорядоченным множеством, тип которого обозначим через Ω. Это Ω будет новым ординальным числом, которое есть не что иное, как тип расположения *всех* ординальных чисел в порядке возрастающей величины; само Ω будет больше всякого числа из ряда (*), ибо в противном случае оно соответствовало бы только части этого ряда. Но для всякого ординального числа, в том числе и для Ω, можно путем прибавления единицы получить число, непосредственно за ним следующее; таким образом получаем число:

$$\Omega + 1 > \Omega.$$

Однако ряд (*) содержит *все* ординальные числа, а следовательно, и новое число $\Omega + 1$; но тогда будет:

$$\Omega + 1 < \Omega,$$

и мы приходим к противоречию.

В изложенном рассуждении жало противоречия направлено против учения о трансфинитных числах, чем и воспользовались противники этого учения (сюда относятся и некоторые выпады *Пуанкарэ* против „канторизма"). Не очень скоро были найдены такие же противоречия характера общелогического; так что затронутыми оказались не только интересы „канторизма", но и всего человеческого мышления.

Прежде всего вспомнили, что один из парадоксов восходит к глубокой древности: „Эпименид-критянин утверждает, что все критяне — лгуны; и пусть действительно все другие утверждения критян оказались ложью. Сказал ли Эпименид правду, или солгал?". Допустим, что он сказал правду; но тогда *все* критяне на самом деле—лгуны, а это будет правдой лишь при условии, что и наш Эпименид солгал. Допустим, что он солгал; но тогда очевидно, что все критяне—лгуны, и следовательно Эпименид говорит правду.

Рессель придал такому противоречию отвлеченно-логическую форму. Существуют классы, которые не являются членами самих себя; так, например, класс „человек" не есть человек, но класс „нематериальное" сам не материален. Условимся под W понимать класс всех таких классов, которые не являются членами самих себя; так что утверждение: „класс x есть член класса W" при любом x равносильно такому: „класс x не есть член класса x". Давая переменной x значение W, находим, что утверждение: „класс W есть член класса W" равносильно утверждению: „класс W не есть член класса W". Таким образом, получается явное противоречие.

Во всех указанных противоречиях Рессель находит общую черту, которую он называет возвратностью; так в противоречии *Burali-Forti* затруднение причиняет ординальное число ряда, состоящего из *всех* ординальных чисел. В каждом из отмеченных противоречий, нечто утверждается относителяно *всех* случаев известного рода, и этим утверждением как будто создается новый случай, который и относится и не относится к полной совокупности случаев, давшей материал для нашего утверждения. Но это является признаком того, что речь идет об об'ектах, неправильно об'единенных в одно целое.

Чтобы избежать таких неправильностей, *Рессель* и *Уайтхэд* создали „теорию типов", которая значительно усложнила построение символической логики и обоснование математики. Имея в виду последнее противоречие, надо сказать, что элементы класса суть об'екты одного типа, а составленный из них класс уже—об'ект другого высшего типа. Об'екты различных типов не могут заменять друг друга в одном и том же предложении. Поэтому о классе собственно нельзя утверждать ни того, что он является членом самого себя,—ни того, что он не является членом самого себя. Если держаться этого правила, то противоречие Ресселя не может возникнуть. Точно так же суждения критян и суждение Эпименида об этих суждениях принадлежат к различным типам, и их нельзя ставить на одну доску. Наконец „ординальное число ряда всех ординальных чисел" должно относиться к ординальным числам одного определенного типа; а потому само оно имеет высший тип. След., это Ω, равно как и $(\Omega + 1)$, не являются членами данного ряда, и противоречие исчезает.

Согласится читатель с решением Ресселя, или нет,—все равно он должен видеть, что все эти противоречия опасны не только для учения о трансфинитных числах, но и для основных понятий нашего мышления вообще. След., нет оснований утверждать на изложенном какие-либо возражения специально против учения об актуально-бесконечном.

VI) Интуиция пространства, как известно, играла весьма видную роль в прежних построениях геометрии и даже была провозглашена Кантом в качестве основы геометрического метода; новейшие изыскания по основам геометрии развенчали интуицию и отвели ей место вспомогательного средства, весьма, впрочем, ценного. Мы имели случай подробно разобрать этот вопрос в статье: „Интуиция, как источник геометрического знания" („Вопросы обоснования геометрии" Москва, 1913). Здесь мы заметим лишь, что некоторые из современных авторов пришли к мысли различать геометрию *„прикладную"* от *„чистой"*. Первая имеет дело с реальным пространством и так или иначе должна считаться с данными опыта, в котором мы познаем это пространство. Но так как всякий опыт имеет ограниченную точность, то его можно одинаково успешно обработать с помощью различных математических теорий; так, напр., в основу об'яснения природы можно положить любую из 3-х геометрий: *Евклида*, *Лобачевского*, *Ри-*

мана, ибо, при известных условиях, разность в предвычисленных величинах вполне покрывается погрешностями наблюдений. Если мы всетаки предпочитаем евклидову геометрию, то только—благодаря ее большей простоте; такого мнения держался, напр., покойный *А. Пуанкарэ.*

Чистая же геометрия есть не что иное, как отвлеченно-логическая система истин, вытекающих из поставленных во главе аксиом. Здесь мы имеем дело с таким же свободным созданием человеческого духа, как и в области анализа; единственные ограничения ставятся обще-логическими требованиями избегать противоречий и т. д. Прекрасные слова Г. Кантора: „сущность математики заключается именно в ее свободе“ относятся в равной мере и к анализу, и к геометрии.

VII) Считаем нелишним войти в некоторые подробности здесь, не прерывая изложения в тексте. Прямая появляется в геометрии прежде всего, как некоторая совокупность точек; цель дальнейших аксиом—постепенно указать существенные свойства этой совокупности. Аксиомы расположения устанавливают между точками прямой отношения „предшествовать“ и „следовать“ (*Вайляти*) или отношение „между“ (*Гильберт*); тем самым они характеризуют прямую, как *просто бесконечный ряд* точек. Кроме того, одна из аксиом расположения устанавливает *слитность* этого ряда: так или иначе утверждается, что между двумя любыми точками прямой имеются другие ее точки. Но этого еще мало для понятия континуума. Математикам пришлось много потрудиться, чтобы отчетливо высказать сущность этого понятия; решение вопроса удалось *Дедекинду*, и аксиомы непрерывности обычно формулируются в его духе. Спачала идет речь об отрезке, а потом уже нетрудно распространить доказанное и на всю прямую.

Возьмем отрезок AB и разделим его точки на 2 класса так, что будут соблюдены след. два условия:

1) каждая точка отрезка попадает в один из классов; начало A отрезка находится в I классе, а конец B—во II.

2) любая точка I класса предшествует любой точке II класса в направлении AB.

Такое деление отрезка на два класса иногда называется его „сечением“. Так вот аксиома непрерывности утверждает, что *данное сечение отрезка производится некоторой его же точкой* C. Это значит, что всякая точка его, предшествующая точке C, попадает в I-й класс, а всякая точка, следующая за C, попадает во II-й класс. Сама же точка C может быть в том или в другом классе,—в зависимости от свойств данного деления на классы.

В интересной статье *Витали* (сборник: „Вопросы элементарной геометрии" под ред. *Энрикеса*) показано, как эта аксиома применяется к доказательству ряда теорем, связанных с непрерывностью геометрических образов. В частности, на аксиоме непрерывности основано измерение отрезков; а вместе с числом на отрезки переносятся все свойства *величины*.

VIII) Изложенные воззрения получили в последнее время сильную поддержку в исследованиях, связанных с принципом относительности; главным образом мы имеем здесь в виду „четырехмерный мир" *Минковского* [*Минковский* „Пространство и время" („Новые идеи в математике" сборник № 5); см. также *Эйнштейн* „Принцип относительности" 1922].

Статья *Минковского* начинается словами: „отныне пространство и время, рассматриваемые отдельно и независимо, обращаются в тени, и только их соединение сохраняет самостоятельность"; действительно, „никто не замечал места иначе, как в определенное время, и не замечал времени иначе, как в определенном месте". Какое-нибудь событие, происходящее в данной точке в данный момент, называется „*мировой точкой*" и определяется заданием четырех величин: (x, y, z, t) Но уж скоро эта символика, напоминающая о прежнем разграничении пространства и времени, уступает место другой:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

совершенно обезличивающей каждую координату в отдельности. Вот эту четырехмерную непрерывность Минковский называет „*миром*". Возможность различного определения времени, аналогичная привычному нам произвольному выбору координатных осей, приводит названного автора к основной аксиоме: „существующая в какой-либо мировой точке субстанция может быть всегда рассматриваема, как покоющаяся при подходящем выборе пространства и времени". Таким образом, старое „состояние движения" окончательно отходит в область предания!

Более того, по словам Эйнштейна (l. c., стр. 102): физика становится из „происходящего" в трехмерном пространстве, в некотором смысле, „существующим" в четырехмерном „мире". След., связь между отдельными положениями движущейся точки с различными моментами времени сводится целиком к связи между значениями трех переменных со значениями 4-й, при чем эта последняя ничем по существу (с теоретической точки зрения) не отличается от трех остальных. „Статическая" теория движения получает здесь новое и неожиданное подкрепление.

IX) Здесь уместно будет вспомнить еще об одном знаменитом парадоксе древности, а именно—о *„колесе Аристотеля“* (см., напр., *Klügel* „Mathematicshes Wörterbuch“ Bd. IV, p. 171—174). Пусть некоторая окружность катится по прямой таким образом, что развертывается на отрезке, равном ее длине. Возьмем другую окружность, концентрическую с первой и неизменно с нею связанную; эта окружность в свою очередь развернется на отрезке, равном тому, на котором развернулась первая окружность. Как же это может быть, чтобы две окружности различных радиусов развернулись на отрезках одной и той же длины?

Развитие механики выяснило, что катание окружности по прямой не сопровождается непременно равенством между длиной ее дуги и тем отрезком, на котором последняя развертывается. Здесь особенно важно понятие скорости; с одной стороны,—ее вспомогательная роль при описании движения, которая была выяснена в тексте по поводу „стрелы“; с другой,—разложение скоростей составного движения. Механик скажет, что круг катится по прямой „без скольжения“, если во всякий момент скорость той его точки, в которой он в этот момент касается прямой, равна нулю; другими словами, указанная точка должна находиться в мгновенном покое. Небольшое вычисление показывает, что это будет только тогда, когда скорость поступательного движения центра равна произведению угловой скорости вращения на радиус. При таком соотношении обоих скоростей, окружность развернется на отрезке, равном ее длине; а при другом отношении этого уже не будет, что и замечаем на „колесе Аристотеля“.

Механик может одинаково рассматривать как такой случай катания окружности по прямой, когда скорость точки касания равна нулю, так и такой, когда эта скорость отлична от нуля. В обоих случаях в каждый отдельный момент прямая и окружность имеют только одну общую точку, и в различные моменты точки касания—различны. Но, в зависимости от скорости точки касания, окружность развертывается на отрезке, равном или неравном ее длине.

В конечном счете „колесо Аристотеля“ сводится к геометрическому парадоксу, заключающемуся в том, что в двух неравных окружностях оказывается одинаковое число точек: ведь обе они, точка за точкой, соотносятся с одним и тем же отрезком. К этому выводу можно притти и чисто геометрическим путем: проводя радиусы из общего центра, мы установим одно-однозначное соответствие между точками обоих окружностей.

С такими „парадоксами“ мы уже встречались; так, на черт. 1 мы убедились, что отрезок BA равномощен со своею частью BC; мы видели также, что совокупность всех вещественных чисел равномощна с промежутком от 0 до 1, и т. п. Во всех подобных случаях мы имеем дело с актуально-бесконечными совокупностями, а их существенное свойство состоит в том, что они оказываются равномощными со своими частями.

Так обр., парадокс Аристотеля поставит втупик только того, кто свойства конечного множества считает обязательными для всякого множества.

X) Пусть задан бесконечный ряд чисел:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots;$$

возьмем сумму его n первых членов и обозначим ее через S_n:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Если эта сумма имеет определенный предел при неограниченном возрастании n, то ряд называется *сходящимся*, а указанный предел—его *суммой*. В тексте мы имеем дело с самым простым случаем, а именно—с бесконечно-убывающей геометрической прогрессией, которая рассматривается в элементарной алгебре.

XI) По поводу того значения, которое имеют теория пределов и анализ при разрешении апорий Зенона, будет уместно привести здесь некоторые выводы из нашей статьи о воззрениях *Ньютона*—одного из основателей анализа бесконечно-малых („Общие основания Ньютонова метода первых и последних отношений"—напечатано во 2-м юбилейном выпуске „Известий Физ.-Мат. Общ. при Казанском Унив.").

Некоторые отличия рассуждений Ньютона от современных заставили нас поставить вопрос о том, достигает ли переменная своего предела или нет. Обзор литературы приводит к выводу, что большинство современных математиков держатся мнения о недостижении предела; т. е., они не относят предела к совокупности значений переменной. Ньютон же, наоборот, полагал, что всякая переменная с течением времени достигает своего предела.

Отсюда естественно было притти к сопоставлению двух великих мыслителей: Зенона Элейского и Ис. Ньютона. Ньютон делает свое утверждение, руководствуясь опытом и понятием об абсолютном времени. Ньютон не опровергал апорий Зенона; он просто не желает считаться с такими рассуждениями (вспомним знаменитое „*Hypotheses non fingo!*“), и его опора в том—истинная природа времени, этой единственной и всеобщей переменной независимой. Для науки последствия такого освобождения от тяготевшей над древностью Зеноновой диалектики были огромны.

Логическое усовершенствование способа пределов вновь привело к торжеству Зенона; только слова: „Ахилл не догонит черепахи“ на современный язык перевели так: „переменная не достигает своего предела“.

Положение было бы безвыходным, если бы учение Г. Кантора о трансфинитных совокупностях не показало, что, будучи с известной точки зрения неразрешимыми, апории Зенона вовсе не свидетельствуют о бессилии математической мысли перед миром движений.