В. Ф. КАГАН

ЛОБАЧЕВСКИЙ И ЕГО ГЕОМЕТРИЯ

К СТОЛЕТИЮ
СО ДНЯ СМЕРТИ
ЛОБАЧЕВСКОГО

В. Ф. КАГАН

ЛОБАЧЕВСКИЙ
И
ЕГО ГЕОМЕТРИЯ

ОБЩЕДОСТУПНЫЕ ОЧЕРКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1955

11-3-1

ПОДГОТОВЛЕНО К ИЗДАНИЮ
И. Н. БРОНШТЕЙНОМ

ПРЕДИСЛОВИЕ

24 февраля 1956 г. исполнится сто лет со дня смерти великого русского ученого Николая Ивановича Лобачевского. Лобачевский построил новую геометрическую систему — неевклидову геометрию, носящую его имя. Это открытие произвело переворот в науке. Оно дало новое направление не только геометрии, но и всей математике, нанесло сокрушительный удар господствующей в то время идеалистической философии Канта, сыграло важнейшую роль в вопросах теоретического обоснования современной физики.

Знание основ геометрии Лобачевского необходимо в настоящее время не только специалистам-математикам. Работники в области точного естествознания, истории науки, культуры, философии, пропагандисты материалистического мировоззрения должны быть знакомы с основным содержанием творения Лобачевского. Неевклидова геометрия, завоевав прочное место в науке, завоевывает теперь его в общем образовании широких кругов нашей интеллигенции. Интерес к геометрии Лобачевского возрастает из года в год, и, несомненно, дата столетия со дня смерти ее творца послужит новым толчком для ее широкого распространения.

Сама геометрия Лобачевского увлекает своим необычайным строением и того, кто с нею впервые знакомится, и того, кто ее углубленно изучает. Но не менее увлекательна и история ее открытия. Возникшая два тысячелетия назад неразрешимая проблема параллельных линий, многовековые попытки «очистить Евклида от всяких пятен», сознание безнадежности этих попыток, робкие зачатки новой геометрии у предшественников Лобачевского и, наконец, рождение неевклидовой геометрии и борьба за ее признание — эти страницы истории науки принадлежат к наиболее волнующим. Наконец, цельная и в то же время многогранная личность самого Лобачевского, его жизнь, полная кипучей деятельности и напряженной борьбы, вызывают в нас чувство законной гордости за нашего великого соотечественника.

Теперь имеется много хороших и доступных работ о геометрии Лобачевского, об истории ее открытия, о самом Лобачевском. Наиболее яркими из них являются работы недавно скончавшегося советского геометра Вениамина Федоровича Кагана (1869—1953), который начал распространение идей Лобачевского еще в ту пору, когда в нашей стране о ней знали очень немногие [1]).

В настоящем сборнике помещены одна речь и пять общедоступных очерков В. Ф. Кагана о Лобачевском и его геометрии. Написанные крупнейшим специалистом в области неевклидовой геометрии, они читаются как художественные произведения. Хотя эти очерки писались в разное время и с различными целями, но, вместе взятые, они представляют собой стройное и полное изложение; их рекомендуется прочесть в том порядке, как они расположены в книге.

«*Речь на торжественном заседании*», которой открывается сборник, является как бы авторским вступлением к книге. В образных выражениях, можно сказать, в поэтической форме автор говорит о революционном значении открытия Лобачевского. «Inde irae» — «отсюда гнев» — заключает он свою речь, говоря о тех реакционных силах, которые поднялись против этой революции.

Для того чтобы понять содержание геометрии Лобачевского, необходимо знать историю проблемы параллельных линий, которая привела к ее открытию. Этому по-

---

[1]) Первая работа В. Ф. Кагана о геометрии Лобачевского — «Очерк геометрической системы Лобачевского» — начала печататься в журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики» еще в 1893 г. Вышла отдельной книгой в 1900 г.

священ первый очерк настоящего сборника — «*Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии*». Попытки доказать постулат Евклида о параллельных линиях составляют первую половину так называемой «предистории неевклидовой геометрии». О них рассказывается во всех учебниках по основаниям геометрии. Но В. Ф. Каган предпочитает не излагать их своими словами, а заставляет говорить крупнейших математиков, которые дают новые «доказательства» вечной проблемы и опровергают старые. На страницах книги возникает спор ученых разных веков и народов. Начинает Евклид, его «исправляют» Прокл и Насир-Эддин, Саккери критикует Насир-Эддина, затем выступают Валлис, Бертран и Лежандр, Лежандра опровергает Гаусс, и очерк заканчивается откровенным признанием Гаусса:

> «И все же, если хотим говорить честно и открыто, то нужно сказать, что по существу мы не ушли в этом вопросе дальше, чем Евклид, за 2000 лет».

Второй очерк — «*Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке*» — является центральным в сборнике. Сначала автор говорит о значении открытия Лобачевского и снова напоминает историю вопроса, который привел к этому открытию. Затем начинается биография Лобачевского. Когда В. Ф. Каган доходит до 1826 г. — «дня рождения геометрии Лобачевского», он прерывает изложение биографии и развертывает перед читателем содержание этого странного и в то же время стройного мира. Конечно, это делается не в строго математической, а в описательной форме, почти без доказательств: в рамках небольшой статьи дать строгое изложение невозможно[1]). Но читателю становится совершенно ясным существо открытия Лобачевского, и

[1]) Полные систематические изложения геометрии Лобачевского имеются в книгах В. Ф. Кагана «Очерк геометрической системы Лобачевского» (см. предыдущую сноску) и «Основания геометрии» (Том I: Геометрия Лобачевского и ее предистория, М.—Л., 1949). Читателю, который хотел бы ознакомиться с кратким, но строгим изложением основ неевклидовой геометрии,

он понимает, почему в результате этого открытия «воззрения Канта в их многообразных модификациях, служившие последним прибежищем идеалистической философии, разлетались как дым». Очерк заканчивается продолжением биографии Лобачевского и дальнейшей историей развития его идей.

Этот очерк — одна из самых ярких научных биографий. В очерке органически связаны жизнеописание и творчество великого человека[1]).

До открытия Лобачевским новой геометрической системы ее зачатки имелись в работах других математиков (Саккери, Ламберт, Гаусс, Швейкарт, Тауринус). Эти работы известны Лобачевскому не были; они составляют вторую главу «предистории неевклидовой геометрии». Правда, работы Саккери формально можно отнести к первой главе: Саккери думал, что доказывает пятый постулат Евклида, но на самом деле он, сам того не подозревая, развертывал начала неевклидовой геометрии. Дальше всех продвинулся в этом направлении Гаусс, но именно он сыграл тормозящую роль в развитии новой геометрии своим запретом даже упоминать об этих его работах: только после его смерти смогла прозвучать «иерихонская труба из могилы Гаусса», как образно говорит В. Ф. Каган.

Об этих работах упоминается и в очерке «Великий русский ученый Лобачевский», но специально им посвящен третий небольшой очерк в настоящем сборнике: «*Элементы неевклидовой геометрии у других геометров*».

можно рекомендовать превосходную работу П. А. Широкова — «Краткий очерк основ геометрии Лобачевского», М.—Л., 1955.

Из сочинений самого Лобачевского, посвященных новой геометрии, следует начать прежде всего с его небольшой работы «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (перевод и комментарии В. Ф. Кагана), помещенной в I томе Полного собрания сочинений Лобачевского, М.—Л., 1946; вышло также отдельным изданием, М.—Л., 1945.

[1]) Имеется также большая монография В. Ф. Кагана о Лобачевском, его жизни и творчестве (В. Ф. Каган, Лобачевский, М.—Л., 1944; 2-е изд., 1948), которую мы рекомендуем прочесть.

Очерк представляет большой интерес, так как личность Лобачевского, его страстная борьба за утверждение новой геометрии особенно ярко предстают перед нами при сравнении с его предшественниками и современниками.

Говоря об элементах неевклидовой геометрии у других геометров, В. Ф. Каган особенно выделяет замечательного венгерского математика Яноша Больаи, который первый после Лобачевского и независимо от него открыл неевклидову геометрию и дал систематическое изложение ее основ. «Аппендикс» Яноша Больаи, как и работы самого Лобачевского, — это уже следующая глава истории науки, — это открытие новой геометрии, в которой почетное место принадлежит Больаи. Ему посвящен специальный четвертый очерк — «*Янош Больаи*», помещаемый в этом сборнике. Очерк написан с большой теплотой и оканчивается словами, к которым присоединятся советские читатели:

> «Гордость венгерского народа — Янош Больаи — справедливо может быть причислен к классикам мировой науки».

Таким образом, до Лобачевского неевклидова геометрия находилась в зародыше у его предшественников — как тех, кто ее развертывал, не понимая этого, так и тех, кто догадывался об истине. В наибольшей степени она была известна Гауссу, независимо от Лобачевского ее создал Янош Больаи. Уже в перечисленных очерках В. Ф. Кагана приоритет Лобачевского в деле открытия и опубликования неевклидовой геометрии выявляется с полной отчетливостью. Но самый факт того, что три замечательных математика, не связанные друг с другом, пришли к новой геометрической системе близкими, хотя и различными путями, казался поразительным. Находились историки, которые приписывали приоритет ее открытия Гауссу и утверждали, что от него новые идеи заимствовали и Лобачевский и Больаи.

В. Ф. Каган изучил этот вопрос с исчерпывающей полнотой; в очерке «*Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи*» он показал действительную роль каждого из них в деле создания неевклидовой геометрии и убедительно подтвердил приоритет Лобачевского.

Этот пятый очерк заключает сборник. В нем сопоставляются работы всех трех геометров как в их общем аспекте, так и в деталях: все основные вопросы неевклидовой геометрии рассмотрены с точки зрения Лобачевского, Гаусса и Больаи. Очерк доступен читателю, который совсем не был знаком с геометрией Лобачевского до чтения этого сборника, но он немного труднее остальных и с бóльшим успехом будет усвоен подготовленным читателем. Впрочем, при его чтении можно пропускать отдельные трудные места, возвращаясь к ним после—это не помешает видеть, чтó и на каком пути было внесено в новую геометрию Лобачевским, Гауссом и Больаи.

Заканчивая чтение последнего очерка, читатель получает полное представление о великом творении Лобачевского.

В очерках этого сборника не предназначавшихся автором для совместного опубликования, имеются неизбежные повторения; устранить их совсем оказалось невозможным без нарушения стройности каждого очерка. Нам кажется, что в этом нет большой беды: один и тот же вопрос, затронутый в различной форме, воспринимается читателем с большей отчетливостью. Только в последнем очерке сделаны значительные купюры, чтобы избежать почти дословных повторений.

К тексту автора в необходимых случаях даны подстрочные примечания; они всюду отмечены [*Ред.*]. Все остальные подстрочные примечания принадлежат автору. В конце книги даны примечания, содержащие сведения о предыдущих изданиях публикуемого материала.

И. Бронштейн

Вступление

РЕЧЬ НА ТОРЖЕСТВЕННОМ ЗАСЕДАНИИ, ПОСВЯЩЕННОМ СТОЛЕТИЮ ОТКРЫТИЯ Н. И. ЛОБАЧЕВСКИМ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

История науки знает множество открытий, поражавших как современников, так и последующие поколения то исключительной неожиданностью обнаруженных фактов, то независимостью и смелостью научной мысли, то глубиной проникновения и энтузиазмом творчества.

Девятнадцатое столетие было особенно чревато такими открытиями. На заре этого столетия был открыт закон сохранения вещества и на нём построена современная химия; в этом столетии установлен закон сохранения энергии и на нем построена современная физика; в этом столетии установлен закон эволюции и на нем построена современная биология; в этом столетии установлена микрометодика и открыты микроорганизмы — на этом построена современная медицина; в этом столетии открыты спектральный анализ и фотография и на них построена современная космология. В этом столетии открыты паровые, электрические и химические двигатели и на них построена современная техника.

Все эти открытия произвели полный переворот в нашей культуре. Они глубоко проникли во все стороны жизни человека, во все уголки общественных, классовых и государственных отношений, — они овладели всей жизнью на земле.

И если эти открытия стали завоеваниями, то они этим во многом обязаны мощному аппарату исчислений, созданному математиками. В этом столетии творили Лагранж, Лежандр, Коши, Фурье, Гаусс, Абель, Якоби, Понселе, Галуа, Вейерштрасс, Чебышев, Георг Кантор.

И среди всех этих достижений, слепящих своим блеском взор специалиста и профана, открытие, столетие которого мы ныне торжественно празднуем, все-таки занимает исключительное место и навсегда сохранит яркий ореол, отличающий его от других завоеваний науки.

Конечно, прикладным знанием оно непосредственно еще не овладело; хотя есть полное основание на это рассчитывать, я не возьму на себя смелости сказать, что оно им в ближайшем будущем овладеет. Но на наших глазах оно уже поднимается на те командные высоты человеческой мысли, на вершинах которых сходятся пути и химии, и физики, и биологии, и медицины, и космологии, и техники, и общественных, классовых, государственных отношений.

Здесь, при этом открытии, обнаруженные факты по своей неожиданности напоминали не то фантастическую сказку, не то бред умалишенного. Здесь независимость открытия, отделенного пропастью от прошлого, напоминала легенду о творении. Здесь смелость научной мысли достигла высшего дерзновения, глубина проникновения и энтузиазм творчества граничили с самопожертвованием.

И это не только бо́льшая неожиданность, бо́льшая независимость и смелость мысли, более глубокое проникновение, более яркий энтузиазм. Это уже та количественная разница, которая претворилась в качество, — это уже открытие другого порядка.

Говорили не раз, повторяя Сильвестра, что Лобачевский — это Коперник геометрии[1]). Я беру на себя смелость сказать, что это сравнение для Лобачевского недостаточно ярко. Разве идеи Коперника, по существу, были так неожиданны? Разве за две тысячи лет до

[1]) См. высказывание В. Клиффорда, помещенное в качестве эпиграфа к очерку «Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке» (стр. 70). [*Ред.*]

Коперника им не учил Аристарх Самосский? И так ли далеки от них были идеи Гиппарха Родосского? Разве был астроном, не знавший соображений, по которым их отверг Птолемей? Нет, великое творение Коперника было осуществлением замысла эллинских геометров, не угасавшего в течение двух тысячелетий и оплодотворенного открытиями Галилея.

А идеи неевклидовой геометрии в течение этих тысячелетий и не возникали. Рассуждения Саккери и Ламберта — это лишь весьма слабые зачатки, зародыши, которые заглохли, удушенные традиционной верой в Евклида, и не оказали ни малейшего влияния ни на Больаи, ни на Лобачевского. Неевклидова геометрия в сознании Лобачевского зачата самооплодотворением, выношена силами его собственного гения, отречением от эллинской геометрии, повита и появилась на свет, как Афина Паллада из головы Юпитера[1]).

На центральной площади небольшого польского города Торна стоит памятник Копернику. На нем выгравирована надпись: «Solis stator, terrae motor» — «Остановивший солнце, двинувший землю».

Я беру на себя смелость утверждать, что было легче остановить Солнце, что легче было двинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расхождение!

История науки не знает открытия, которое по исключительной неожиданности обнаруженных фактов сколько-

---

[1]) Конечно, это только образное выражение, которое не следует понимать в буквальном смысле. В сознании Лобачевского его «Воображаемая геометрия» зачата не «самооплодотворением», а основана на глубоких размышлениях о свойствах окружающего нас мира. В своих последующих статьях о Лобачевском В. Ф. Каган не повторяет этого сравнения; более того, приведя в очерке «Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке» такое же сравнение для евклидовой геометрии (стр. 72), автор дает ему правильную оценку, решительно возражая против такой трактовки рождения геометрии (стр. 74). Подобные возражения справедливы и по отношению к неевклидовой геометрии. [*Ред.*]

нибудь бы приближалось к тому, столетие которого мы ныне празднуем.

Какими средствами, какими путями проник Лобачевский в эти сокровенные тайники «воображаемой» геометрии?

Тривиальный, ни в ком сомнений не вызывающий факт заключается в том, что математические истины познаются двумя путями — с одной стороны, интуицией в различных ее проявлениях, начиная с непосредственного воззрения и кончая сложными опытами [1]), и логикой, с другой стороны; интуиция намечает, логика проверяет; интуиция предуказует, логика устанавливает; интуиция открывает, логика доказывает.

Но о какой интуиции может быть речь в неевклидовой геометрии? Разве каждое ее предложение не есть отрицание всякой интуиции, не противоречит всякой интуиции?

Отсюда заключали, что в процессе открытия неевклидовой геометрии действующей силой была только чистая логика. Открытие неевклидовой геометрии и рассматривается обыкновенно как победа логики над интуицией. Лобачевский создал «воображаемую геометрию»; в этом величие его творения, в этом источник всех нападений, которым оно подвергалось. Воображаемую геометрию нельзя списать с живой природы; воображаемая геометрия есть чистое творение человеческого ума.

«Следовательно, „Воображаемая геометрия" есть творение праздное, ненужное измышление нездоровой фантазии», — говорили одни. «Следовательно, всякая геометрия есть свободное творение человеческого ума», — говорили другие . . .

---

[1]) Слово «интуиция» автор применяет в чрезмерно широком смысле: он противопоставляет интуицию чистой логике, включая в источники интуиции даже сознательно поставленный сложный эксперимент. По установившейся же терминологии, интуицией называется способность найти догадкой правильное решение какого-либо вопроса; это бывает возможно благодаря большому прошлому опыту и глубоким фактическим знаниям: постепенно накопляясь, они позволяют предугадать истину. [*Ред.*]

Но, как ни убедительны на первый взгляд эти доводы за то, что неевклидова геометрия есть победа чистой логики над интуицией, я беру на себя смелость утверждать, что это все же далеко не так просто. Кто читал Лобачевского от доски до доски, тот подтвердит, что не только «Geometrische Untersuchungen», не только «Новые Начала», но все его работы, содержащие аналитические приложения неевклидовой геометрии, насквозь проникнуты интуицией. Изымите наглядные представления из его вычислений и от них не останется ничего; вернее, останутся результаты, которые нужно будет воссоздавать иными путями, иными средствами.

Пусть это кажется парадоксом, но я утверждаю, что Лобачевский интуицией победил интуицию.

И такой ли уже это парадокс? Скажите, разве не с живой природы списаны все сказки и вымыслы, все эти гении и демоны, гномы и великаны, феи и чудовища? Разве человеческая фантазия когда-либо работала, когда-либо могла работать иначе, чем образами, усвоенными из живой природы? И волшебная сказка, созданная Лобачевским [1]), есть чудное сплетение пространственных образов, перевитых прочной сетью тонких логических рассуждений. Я не знаю, хватит ли моих сил, чтобы это достаточно осветить. Я хотел бы ярко изобразить, что не односторонним развитием той или иной способности была создана неевклидова геометрия, что все силы человеческого духа, логика и интуиция, трезвость и фантазия, анализ и синтез, все формы и силы мысли в своих, иногда противоположных проявлениях соединились для этого творения.

---

[1]) Эту аналогию В. Ф. Каган ниже (стр. 16) не без основания называет рискованной, вводя ее в свою речь только для образности. Геометрия Лобачевского не является «вымыслом» подобно «гениям и демонам, гномам и великанам, феям и чудовищам». Если бы она была «волшебной сказкой», прав был бы не Лобачевский, а его многочисленные враги и противники. Именно в свойствах материальных тел природы Лобачевский искал подтверждения верности геометрии Евклида или своей геометрии (см. очерк «Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке», стр. 108—109). [*Ред.*]

«Из ничего, — писал Янош Больаи своему отцу, — я создал целый новый мир». Да, Гаусс, Больаи и Лобачевский [1]) несомненно построили целый новый мир, новый мир, который до них не был ведом, к которому никто до них не проложил путей; но, конечно, они построили его не из «ничего». Они построили его из сокровенного материала, накопленного научной мыслью, конкретной и абстрактной, путём созерцания и обсуждения, средствами интуиции и логики.

Позвольте мне продолжить свою, быть может, несколько рискованную аналогию дальше. В ранней молодости в Одессе мне пришлось быть на лекции известного биолога, покойного Александра Онуфриевича Ковалевского. Одна мысль, им высказанная, глубоко запала мне в голову.

> «Можно сказать, — говорил он, — что нет того сказочного существа, нет того фантастического измышления народной фантазии, которого естествоиспытатель бы не обнаружил в живой природе в настоящем или чаще в прошлом. Все эти летающие драконы, многоголовые гидры, стоглазые змеи (не помню точно, называл ли он именно эти чудовища), всех их видела история земли. Более того, все эти фантазии совершенно бледнеют перед теми причудливыми формами, которые открывает естествоиспытатель, восстанавливающий ход эволюции по тем скудным следам, которые нам сохранила история Земли».

И волшебная сказка, созданная Гауссом, Лобачевским и Больаи [1]), оказалась былью. Фантастический мир превратился в действительность. Воображаемая геометрия получила осуществление на реальных формах. Но эти

---

[1]) Следует иметь в виду, что Гаусс при своей жизни не проронил в печати ни одного слова о своих работах по неевклидовой геометрии, а Больаи свою работу опубликовал на три года позднее работы Лобачевского, который дальше всех продвинулся в этом вопросе. См. об этом очерк «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи». То же относится и к дальнейшему тексту. [*Ред.*]

формы не были извлечены из далекого прошлого; это было предвосхищение будущего, предуказание его грядущих этапов. И те формы, к которым воображаемая геометрия может быть отнесена, были предсказаны в мельчайших деталях качественных и количественных. Такого проникновения библейская сага не приписывала своим пророкам.

Эллинская геометрия, казалось, должна была составить изъятие из закона эволюции. Две тысячи лет тому назад она застыла в своих величавых, прекрасных формах, как зачарованная красавица в народной сказке. Но сто лет тому назад пришли три витязя: один из немецкой, другой из венгерской, третий из русской Земли. Они окропили ее мертвой и живой водой. И геометрия воскресла к новой жизни, — нет, к новой мощной эволюции, которая широко развертывается на наших глазах и в которой она как будто хочет захватить и механику, и физику, и космологию.

Пусть это еще фантазия: но, кто знает, так ли мы далеки от ее осуществления. Неевклидова геометрия ко дню своего столетнего юбилея еще далеко не сказала своего последнего слова.

Глубокую эволюцию уже пережило не только содержание, но и строение неевклидовой геометрии. Риман ее строил из выражения элемента длины, Гельмгольц — из законов движения, Софус Ли—по группе преобразований, которыми эти движения выражаются, Клейн ее выводил из проективной метрики Кэли, Киллинг ее строил из того принципа, что в бесконечно малом сохраняется геометрия Евклида, Бельтрами — по постоянной кривизне пространства. Гильберт ее развертывает при помощи специального исчисления. В наши дни Леви-Чивита и Вейль ее выводят из своеобразных законов параллельного перенесения. Комиссия по изданию полного собрания сочинений Лобачевского обратилась к проф. Либману в Берлине с просьбой дать нам статью о новых методах построения неевклидовой геометрии. В ответном письме Либман замечает: «Я всегда держался того мнения, что, по существу, лучшее построение неевклидовой геометрии — это то, которое дали Лобачевский и Больаи» [1]. Мы сошлись: я тоже всегда придерживался того же мнения.

В чем же заключается особенность этого построения? Оно идет через возрождение евклидовой геометрии в недрах воображаемой геометрии. Мертвая вода смыла самовластие евклидовой геометрии, заставила ее отказаться от того абсолютного господства, с которым она владычествовала в пространственных отношениях; живая вода дала ей, самой евклидовой геометрии, вечное бытие. Насильственно устраненная с плоскости, она перенеслась на предельную поверхность и оттуда продиктовала законы пространства. На памятнике Гаусса, по его завешанию, выгравирован правильный семнадцатиугольник, вписанный в круг. Творец новой теории чисел, способа наименьших квадратов, теории потенциала, методов вычисления планетных орбит и прочая, и прочая, и прочая видел в решении этой, как будто мало кому нужной геометрической задачи перл своего творения. На гробнице Лобачевского следовало бы выгравировать предельную поверхность; не сомневаюсь, что это соответствовало бы его заветам. Это был центральный момент в деле создания неевклидовой геометрии.

В новой системе геометрии или, вернее, в новой системе геометрий классическая геометрия Евклида заняла скромное место одного идеального частного случая. Но, уступив свое первородство, она этот свой пост заняла с незыблемой прочностью.

Платон был неправ: по гносеологии, проистекающей из открытий Гаусса, Больаи и Лобачевского, геометрия есть не познание вечно существующего, а вечное средство для познания существующего. Но вечно меняется

---

[1] Редакция Полного собрания сочинений Лобачевского, во главе которой стоял В. Ф. Каган, предполагала сопроводить это издание статьями, выясняющими значение и развитие идей Лобачевского. Этот замысел осуществить не удалось, хотя ряд статей и был написан, в том числе и статья проф. Либмана. (См. об этом в предисловии к первому выпуску серии «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей» — книге П. А. Широкова и В. Ф. Кагана «Строение неевклидовой геометрии», М.—Л., 1950. [*Ред.*]

все существующее, вечной эволюцией охвачено мироздание, и для его познания должна эволюционировать и геометрия. Через 20 лет после открытия неевклидовой геометрии Араго писал:

> «Говорили, что математический анализ есть инструмент. Может быть, такое сравнение и можно допустить; но нужно в то же время признать, что этот инструмент, как сказочный Протей, должен постоянно менять свою форму».

Это тоже вещие слова. Но что же это — случайно, что Араго говорит только об анализе, как бы выключая из этой эволюции геометрию? Я думаю, нет. До него еще не дошла весть о возрождении, для него геометрия еще оставалась застывшей наукой Платона и Евклида, безизменное знание безизменно существующего. Иерихонская труба еще не прозвучала из могилы Гаусса. Новые идеи еще оставались достоянием своих творцов. Горькие вопли Больаи, полные страсти и негодования, еще оставались достоянием старой военной переписки, на оборотной стороне которой Янош запечатлел свои одинокие страдания; Н. И. Лобачевский еще заглушал жестокую драму своей жизни напряженной работой на пользу родного университета.

Откуда это безграничное море клокочущей злобы, поднявшееся вокруг этих отвлеченных идей, казалось бы, лежащих по ту сторону добра и зла, за пределами людских страстей и живых интересов?

Позвольте привести еще одну цитату из Араго: «Математика во все времена была непримиримым врагом всякого романа в науке».

Между тем, неевклидова геометрия так походила на роман, на фантастический роман в самой прочной цитадели математических традиций! Это играло огромную роль в том враждебном отношении, которое она встретила среди наиболее серьезных математиков и естествоиспытателей. Однако, когда Австрийское министерство народного просвещения в 1871 г. запретило профессору Фришауфу — одному из пионеров распространения идей Лобачевского и Больаи, читать курс неевклидовой геометрии («несмотря на всю нашу свободу преподавания и обучения», — замечает профессор), то, конечно, это произошло не потому, что Министерство не допускало фантастических романов в университетском преподавании.

Большую роль сыграло самое изложение новых идей в трудах Лобачевского и Больаи. Много раз приводились слова Гаусса, что сочинения Лобачевского напоминают непроходимый лес, через который не может пробраться ни один человек, не изучивший предварительно каждое его дерево. А первое сочинение Лобачевского могло быть доступно только тому, кто дождался последующих произведений и вернулся к ним повторно [1]). Да, это играло огромную роль. Но, ведь математики, как никакие другие ученые, привыкли пробираться через дебри труднейших рассуждений. И тогда, когда уже существовали прекрасно разработанные изложения неевклидовой геометрии, я ещё лично слышал от лиц с мировыми именами, что они и читать этих произведений не желают. Дело, очевидно, не исчерпывается и трудностью понимания.

Старый геттингенский геометр [1]) из-под сводов своей обсерватории хорошо изучил человеческую натуру. Он понимал, ка́к глубоко революционно новое учение, ка́к решительно оно уничтожает осиные гнезда традиций, унаследованных от тысячелетий. Против мощных ударов глубокой революции, беспощадно сносящих старые устои, всегда сплачиваются самые разнообразные силы, в какой бы области эта революция ни происходила. А открытие неевклидовой геометрии было величайшей революцией в области человеческой мысли, какую только знает история науки. Inde irae.

---

1) Речь идет о Гауссе. [*Ред.*]

I

УЧЕНИЕ О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ ДО ОТКРЫТИЯ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Обоснование геометрии в «Началах» Евклида

Неевклидова геометрия, открытая Н. И. Лобачевским, возникла на почве задачи об обосновании геометрии. Эта задача в свою очередь в древности представляла лишь проявление в области геометрии общих воззрений, получивших отчетливое выражение в школе Платона. Согласно тенденциям Платона всякая научная дисциплина должна развиваться из небольшого числа исходных положений, составляющих ее основу. Не входя в критический анализ этих тенденций, скажем только, что в области геометрии, в силу особенностей математических наук вообще и геометрии в частности, уже в древности удалось подойти к осуществлению этих тенденций ближе, чем в других науках. Более того, повидимому, и самые эти воззрения Платона сложились отчасти под влиянием попыток систематического изложения геометрии, которые в эпоху Платона уже имели место: оформлявшиеся попытки построить систематическое изложение начал геометрии влияли на общие воззрения философов, а тенденции философов, сложившиеся и получившие определенное выражение в школе Платона, укрепляли позиции геометров, занимавшихся обоснованием геометрии. Из известных нам авторов до Платона составлением начал геометрии занимался Гиппократ Хиосский, живший во второй половине V в. до н. э.; в эпоху Платона этим занимались Лев и Евдокс; в самой Академии Платона было в ходу сочинение Тедия. Ни одно из сочинений этих авторов по геометрии до нас не дошло; все они были забыты, когда появилось замечательное сочинение, содержавшее изложение основ геометрии — «Начала» Евклида.

К сожалению, сведения, которыми мы располагаем относительно Евклида, очень скудны. Время расцвета его деятельности относится к эпохе, когда лучшие представители греческой науки были сосредоточены в Александрии. Повидимому, в конце IV или в начале III в. до н. э. Евклид основал в Александрии математическую школу, для которой собственно и было составлено его руководство. Евклид писал, таким образом, в эпоху, когда взгляды Платона уже утвердились, когда Аристотель уже создал общую схему логического вывода («Органон»). Согласно этой схеме наглядные методы восточных народов должны были уступить в геометрии место формально-логическим умозаключениям, развертывающимся в силлогизмы. В известном диалоге Платона «Федон» один из участников диалога, Симмиас, наиболее отражающий воззрения самого Платона, говорит: «Я знаю, что те, которые ведут доказательство, исходя от очевидности, поступают тщетно»; это изречение систематически приводят позднейшие греческие геометры и философы [1]). Стремление освободить изложение геометрии от всяких наглядных выводов составляло основную тенденцию геометров школы Платона, в том числе и Евклида.

Исходными положениями, на которых Евклид строит систему геометрии, служат определения, аксиомы и постулаты. Каждая книга начинается определением тех терминов, которые в ней появляются; первой книге предшествуют еще *аксиомы* и *постулаты*. Как число, так и точное выражение аксиом и постулатов различны в различных дошедших до нас списках «Начал», даже в основных; в некоторых списках те и другие соединены в одну группу

[1]) См., например, отрывок из Прокла (стр. 27).

аксиом. Поэтому не так просто себе уяснить, какое различие греческие авторы, в частности Евклид, делали между аксиомами и постулатами. Пространные рассуждения Прокла не проливают на этот вопрос достаточно света. Наиболее установившееся воззрение заключается в том, что аксиомы представляют собой общие достояния ума (κοιναὶ ἔννοιαι), необходимые для ведения рассуждений во всякой науке (особенно в арифметике и естествознании); постулаты же представляют собой геометрические «требования» (αἰτήματα), признав которые, приступающий к чтению «Начал» вынужден признать все последующие выводы. Однако нет уверенности, что именно такова была точка зрения Евклида.

Лучшие современные знатоки Евклида Гейберг и Менге, выпустившие в Германии полное собрание сочинений Евклида на греческом и латинском языках, и Гис, выпустивший «Начала» на английском языке в трех томах с обстоятельными комментариями [1]), сходятся на следующем списке аксиом и постулатов:

Постулаты

I. Нужно потребовать, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неопределенно.

III. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.

IV. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, как прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

---

[1]) Euclidis opera omnia. Ediderunt I. L. Heiberg et H. Menge. Leipzig, 1883—1895; семь томов, из которых первые пять содержат «Начала». T. L. Heath, The thirteen bocks of Euclids elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Cambridge, 1908.

Аксиомы

I. Равные порознь третьему, равны между собой.
II. И если к равным придадим равные, то получим равные.
III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.
IV. [И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.]
V. [И если удвоим равные, то получим равные.]
VI. [И половины равных равны между собой.]
VII. И совмещающиеся[1]) равны.
VIII. И целое больше части.
IX. [И две прямые не могут заключать пространства.]

Относительно аксиом, заключенных в скобки, Гейберг и Менге сомневаются, принадлежат ли они Евклиду; Гис их вовсе опускает.

В тех изданиях, которые объединяют постулаты и аксиомы, V постулат фигурирует в качестве XI (иногда в качестве XII, даже XIII) аксиомы; поэтому в литературе постулат о параллельных линиях часто фигурирует под названием XI аксиомы.

Не входя ни в общий разбор аксиом и постулатов, ни в подробное изложение содержания «Начал», ограничимся только замечанием, что первая книга отчетливо распадается на две части. Первую часть составляют первые 28 предложений, которые содержат учение об углах и треугольниках, а также решение основных задач на построение (свойства смежных и вертикальных углов, условия равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами одного и двух треугольников, теорема о внешнем угле треугольника, свойства перпендикуляра и наклонных, построения перпендикуляра по различным заданиям, деление отрезка и угла на две равные части). При этом нужно заметить, что так называемое предложение о внешнем угле треугольника (предложение 16 первой

[1]) Подразумевается — величины, образы.

книги «Начал») устанавливает только, что внешний угол треугольника больше каждого из внутренних углов, с ним не смежных.

Особенность этой первой части книги заключается в том, что доказательства нигде не опираются на V постулат; эту часть книги по почину Яноша Больаи часто называют (может быть, не вполне удачно) *абсолютной геометрией*, разумея под этим ту часть геометрии, которая не зависит от постулата о параллельных линиях. В этом понимании слова, абсолютной геометрии принадлежат не только первые 28 предложений первой книги, но и ряд предложений третьей книги (учение об окружности — соотношения между величинами дуг и стягивающих их хорд, между величинами хорд и их расстояниями от центра, свойства касательной к окружности), а также ряд стереометрических предложений, содержащихся в одиннадцатой книге.

Постулат о параллельных линиях

Таким образом, V постулат Евклида (постулат о параллельных линиях) существенно отличается от остальных. В то время как к остальным постулатам Евклид прибегает в первых же своих предложениях, V постулат получает первое применение лишь в двадцать девятом предложении; более того, он как бы делит геометрию на две существенно различные части: первая часть — так называемая абсолютная геометрия — от V постулата не зависит, вторая часть — собственно евклидова геометрия — вся основана на этом постулате в том смысле, что ни одно предложение этой части не поддается доказательству, не опирающемуся на этот постулат. Собственно евклидова геометрия содержит бóльшую часть предложений геометрии — теорему о сумме углов треугольника, о пропорциональных линиях и о подобии фигур и, следовательно, всю метрику, основанную на учении о подобии и, в частности, всю тригонометрию. С другой стороны, самое содержание V постулата сложнее остальных: оно содержит уже более сложный комплекс понятий, необходимых для его усвоения.

Вследствие этого очень рано появились попытки исключить V постулат из числа предложений, принимаемых без доказательства, и логически вывести его из остальных постулатов и аксиом. Этим занимались главным образом комментаторы Евклида.

В течение почти двух тысяч лет «Начала» Евклида составляли единственный учебник геометрии, и конкурировать с ним не решался никто. Но многие авторы переиздавали Евклида, сопровождая его критическими замечаниями и отдельными попытками исправления и улучшения его текста. Критике текст Евклида, конечно, поддавался, так как при всех высоких достоинствах этого сочинения оно, несомненно, далеко не удовлетворяло строгим требованиям школы Платона и логики Аристотеля — построить всю геометрию в порядке логического вывода, не прибегая к наглядным представлениям. Вскрытие многих дефектов этого рода составляет несомненную заслугу комментаторов Евклида. Среди этих попыток улучшить, исправить «Начала» Евклида, стремление освободить их от постулата о параллельных линиях играло весьма видную роль.

Комментирование Евклида началось еще в глубокой древности. Но многие из этих комментариев до нас вовсе не дошли или дошли только в отрывках, в передаче других авторов. В этом отношении очень важную роль играет дошедший до нас полностью комментарий Прокла к первой книге «Начал». Прокл (410—485 гг. н. э.) был философ неоплатонической школы, преподававший, между прочим, геометрию; повидимому, по его лекциям и составлен был этот комментарий. В печати он впервые появился в приложении к так называемому Базельскому изданию[1]) «Начал» Евклида (1533 г.); но уже в 1560 г. был выпущен латинский перевод этого сочинения[2]), в XVIII в. был издан

[1]) Так называемое Базельское издание «Начал» было выпущено Симоном Старшим (Simon Grynaeus) на греческом языке по рукописи Теона (Феона) Александрийского. В литературе оно известно под названием «editio princeps» («главное издание»), потому что послужило оригиналом для большого числа других изданий.

[2]) Procli Diadochi... in primum Euclidis Elementorum librum commentariorum... libri IIII; summa opera a Francisco Barocio... editi. Patavii, 1560.

английский его перевод[1]) и, наконец, в 1873 г. Тейбнером выпущен комментарий Прокла в подлиннике[2]). В передаче Прокла до нас дошли и рассуждения более ранних авторов о V постулате Евклида (Герона Александрийского, Птолемея, Гемина Родосского). Составил ли Прокл комментарий и к последующим книгам Евклида, остается невыясненным.

Вслед за текстом V постулата мы находим у Прокла следующие соображения:

> «Это положение должно быть совершенно изъято из числа постулатов, потому что это — теорема, вызывающая много сомнений, которые Птолемей пытался устранить в одной из своих книг; однако его доказательство требует многих определений и теорем; и сам Евклид дает обращение этого предложения в качестве теоремы. Но, может быть, некоторые вследствие ошибочных воззрений подумают, что это положение действительно следовало поместить среди постулатов; само по себе оно вызывает доверие, если принять во внимание наклонение прямых линий, образующих с секущей углы, сумма которых меньше двух прямых. Этого рода людям Гемин справедливо отвечает, что у творцов науки мы научились не относиться в геометрических рассуждениях с полным доверием к наглядным представлениям нашего воображения; как говорит по этому поводу Аристотель, это было бы подобно тому, чтобы требовать доказательств от автора риторики и в то же время терпеливо выслушивать геометра, исходящего от наглядных представлений. И Симмиас в платоновом „Федоне“ говорит: „Я знаю, что те, которые ведут доказательство, исходя от очевидности, поступают тщетно“. Конечно, совершенно необходимо признать, что прямые линии наклоняются одна к другой, когда прямые углы заменяются

1) The philosophical and mathematical commentaries of Proclus on the first book of Euclid's Elements, London, 1792.

2) Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii. Ex. rec. G. Fridlein, Leipzig, 1873.

острыми [1]). Однако, что эти наклонные при продолжении сойдутся, это остается не достоверным, а лишь вероятным до тех пор, пока этому не будет дано логическое доказательство: ибо существуют бесконечные наклонные линии, которые никогда не сходятся; и хотя это представляется мало вероятным и удивительным, но совершенно достоверно, что при других формах линий это может иметь место [2]). Что же, в случае прямых линий не может иметь места то, что бывает в случае других линий? До тех пор пока мы этого не обнаружим путем доказательства, свойства, которые могут проявиться при неограниченном продолжении других линий, тяготеют над нашим воображением. Но если появляется сомнение в том, произойдет ли пересечение линий, то каким образом должны мы изгнать из нашей доктрины это мало вероятное и иррациональное предположение? Совершенно ясно, что должно быть найдено доказательство настоящей теоремы; а такое требование природе постулатов совершенно чуждо [3]). Каким образом это предложение должно быть доказано, это мы увидим ниже, когда придем к нему, когда элементы геометрии нас этому уже научат. Ибо необходимо обнаружить его справедливость, но не как нечто представляющееся нам очевидным без доказательства, а как предложение, становящееся таковым благодаря доказательству».

---

1) То-есть когда перпендикуляры к секущей заменяются наклонными, образующими с ней острые внутренние односторонние углы (рис. 1).

2) Например, две гиперболические ветви AA' и BB' могут асимптотически приближаться одна к другой, образуя острые углы из концов секущей AB (рис. 2).

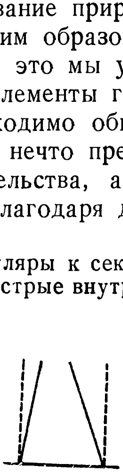

Рис. 1.

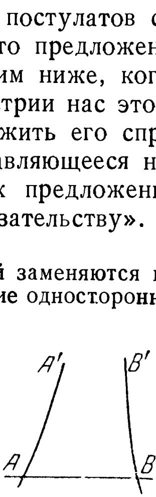

Рис. 2.

3) Прокл, очевидно, хочет сказать, что к постулату мы не предъявляем требования, чтобы он был доказан; поэтому V постулат Евклида, к которому такое требование предъявляется, должен быть рассматриваем не как постулат, а как теорема.

Это — знаменательные строки. Прокл, как мы видим, идет так далеко, что он, по крайней мере a priori, не исключает даже сомнения в истинности самого предложения. Во всяком случае он делает вывод, что постулат о параллельных линиях нужно из геометрии изъять, ее нужно освободить от этого «темного пятна», надо найти его доказательство.

Это — лейтмотив, который проходит почти через всю литературу, относящуюся к обоснованию геометрии. Эти мысли занимали уже Птолемея за 300 лет до Прокла; Птолемей по свидетельству Прокла написал об этом предмете целую книгу. Эти мысли систематически повторяются выдающимися геометрами вплоть до XIX в. Правда, доказательством постулата о параллельных линиях занимались и многие люди, лишенные не только таланта, но и достаточных познаний; но вместе с тем трудно назвать какого-либо из выдающихся геометров, кто не отдал бы дани этой проблеме, кто не посвятил бы ей времени и мысли.

В литературе накопилось много попыток доказательства евклидова постулата. В 1762 г. Клюгель, ученик известного геометра Кестнера, занимавшего в Геттингенском университете кафедру Евклида, представил диссертацию на тему «Обзор важнейших попыток доказательства теоремы о параллельных линиях» [1]).

В этом сочинении автор рассматривает около тридцати доказательств V постулата Евклида и приходит к иному выводу, нежели Прокл.

Приведем вступление к диссертации Клюгеля, в котором его вывод отчетливо выражен.

> «Среди истин, которые прилежно изучали выдающиеся умы, не последнее место занимает теорема элементарной геометрии о параллельных линиях. Все науки хранят в себе загадочные вещи: неудивительно,

---

[1]) G. S. Klügel, Conatuum praecipiorum theoriam parallelarum demonstrand recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel, Göttingen, 1763.

что наш ум, заключенный в определенные пределы, многого не постигает и не в состоянии раскрыть источники и причины многих фактов. При всем том я не знаю, коренится ли больше в слабости нашего ума или в характере самых истин вина того, что в пределах геометрии существуют препятствия, которые не дают возможности овладеть подступами к ней в такой степени, как это было бы желательно. Немногочисленны истины, которые в геометрии могут быть доказаны без пособия теоремы о параллельных линиях; но еще малочисленнее те истины, которые можно использовать для ее доказательства. Вследствие этого, не располагая отчетливыми сведениями о прямых и кривых линиях, мы не можем выполнить это доказательство на основе их определения. При этих условиях нельзя поставить геометрии в вину, если она вносит в основные свои положения такое предложение, истинность которого не устанавли вается отчетливым рассуждением, а усматриваетс- непосредственно благодаря нашим наглядным предя ставлениям о прямой линии. Такова XI аксиома Евклида, согласно которой две прямые на плоскости пересекающие третью под углами, сумма которых меньше двух прямых, при неограниченном продолжении неизбежно должны пересечься.

Многие, опытные в геометрических доказательствах, пытались устранить эту истину из числа аксиом; но все доказательства, которыми они старались эту истину строго установить, оказались порочными. Другие предлагали заменить ее иными аксиомами, которые, однако, не могут считаться более ясными, нежели постулат Евклида.

Таким образом, если обозреть все попытки, то окажется совершенно правильным, что Евклид поместил это предложение среди аксиом».

Клюгель, конечно, не исчерпал всех предложенных до него доказательств; многие доказательства были опубликованы и после него. Но вывод, к которому он пришел, был совершенно правилен: ни одно из предложенных доказательств постулата о параллельных линиях не оказалось правильным. Одни содержали прямую погрешность, другие явно или неявно заменяли в своих рассуждениях постулат другим эквивалентным ему допущением.

Мы приведем здесь некоторые доказательства и именно те, на которых в литературе этого вопроса было сосредоточено внимание и которые содействовали выяснению содержащихся в нем трудностей. При этом мы будем давать не собственное изложение доказательств, а подлинные тексты авторов.

Параллельные линии в «Началах» Евклида

Доказательства V постулата тесно примыкают к изложению теории параллельных линий в «Началах» Евклида. Мы приведем поэтому те пять теорем, которые в «Началах» составляют эту теорию. Первые три приведены в точном переводе, сделанном с греческого оригинала (греческие буквы в тексте и на чертежах заменены, как обычно, латинскими).

«**I.27.** *Если прямая линия, пересекая две [другие] прямые линии, образует с ними равные накрест лежащие углы, то эти прямые параллельны.*

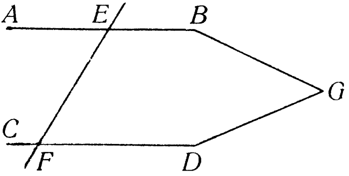

Рис. 3.

Положим, что прямая линия EF, пересекая прямые AB и CD, образует с ними равные накрест лежащие углы AEF и EFD [рис. 3]. Утверждаю, что прямая AB параллельна CD.

Ибо, если бы они не были параллельны, то они пересеклись бы либо со стороны точек B и D, либо со стороны точек A и C. Положим, что они продолжены в сторону [точек] B и D и пересекаются в [точке] G. Тогда в треугольнике GEF внешний угол AEF равен внутреннему не смежному с ним углу EFG, что невозможно. Следовательно, прямые AB и CD, будучи продолжены в сторону точек B и D, не пересекаются. Подобным же образом может быть доказано, что они не могут встретиться со стороны точек A и C. Но прямые, которые не встречаются ни с одной, ни с другой стороны, параллельны; следовательно, прямая AB параллельна CD.

I.28. *Если прямая линия, пересекая две [другие] прямые линии, образует внешний угол, равный соответствующему внутреннему углу или если внутренние односторонние углы составляют вместе два прямых угла, то эти прямые друг другу параллельны.*

Предположим, что прямая EF, пересекая две прямые AB и CD [рис. 4], образует внешний угол EGB, равный соответствующему внутреннему углу GHD [1]), или образует внутренние односторонние углы BGH и GHD, составляющие вместе два прямых угла. Утверждаю, что [прямая] AB параллельна [прямой] CD.

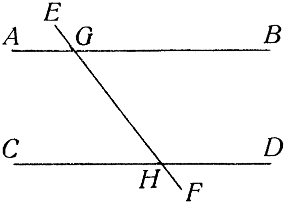

Рис. 4.

Ибо, так как угол EGB равен углу GHD, между тем как угол EGB равен углу AGH, то угол AGH равен углу GHD. Но это — углы накрест лежащие. Следовательно, прямая AB параллельна CD.

Если же углы BGH и GHD составляют два прямых, а углы AGH и BGH также составляют два прямых, то углы AGH и BGH равны углам BGH и GHD [2]). Отнимая общий угол BGH, найдем, что остающийся угол AGH равен остающемуся углу GHD;

---

[1]) Евклид называет угол GHD не соответствующим (соответственным) углу EGB, а противолежащим ему.

[2]) Мы сказали бы: сумма углов AGH и BGH равна сумме углов BGH и GHD.

но это — углы накрест лежащие. Поэтому прямая AB параллельна CD.

I.29. *Прямая линия, пересекающая две параллельные прямые, образует с ними равные накрест лежащие углы, внешний угол равен соответствующему внутреннему углу, а сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым углам.*

Положим, что прямая EF пересекает параллельные прямые AB, CD [рис. 4]. Утверждаю, что она образует равные накрест лежащие углы AGH, GHD, что внешний угол EGB равен соответствующему внутреннему углу GHD и внутренние односторонние углы BGH и GHD составляют два прямых угла. Ибо, если угол AGH не равен углу GHD, то один из них больше другого. Пусть AGH будет больший угол. Придадим к каждому из них угол BGH. Тогда углы AGH и BGH составят больше, чем углы BGH и GHD. Но углы AGH и BGH составляют два прямых. Следовательно, BGH и GHD составляют меньше двух прямых. Но прямые линии, которые образуют с секущей односторонние углы, составляющие меньше двух прямых, при неограниченном продолжении встречаются [1]. Следовательно, прямые AB и CD при неограниченном продолжении встретятся; но они не могут встретиться, потому что они по условию параллельны. Следовательно, угол AGH не может быть не равен углу GHD, а потому он равен ему.

Далее, угол AGH равен углу EGB; следовательно, угол EGB также равен углу GHD. Придадим к каждому из них угол BGH. Получим, что углы EGB и BGH равны углам BGH и GHD. Но углы EGB и BGH составляют два прямых угла; следовательно, углы BGH и GHD составляют два прямых угла».

Мы привели здесь подлинный текст трех основных теорем о параллельных линиях и их доказательств в «На-

[1] Постулат о параллельных линиях!

чалах» Евклида. За этим следует предложение I.30 — «две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой», — евклидово доказательство которого по настоящее время точно воспроизводится в наших учебниках элементарной геометрии. Наконец, предложение I.31 содержит построение прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой; однозначность этого построения вытекает из предложения I. 29.

Мы видим, что предложение I. 29 может быть рассматриваемо как обращение предложений I. 27 и I. 28. При этом V постулат получает применение только один раз в предложении I.29. Остальные предложения, непосредственно относящиеся к теории параллельных линий, выводятся уже из теоремы I. 29, а затем в свою очередь служат основой для построения всей «собственно евклидовой» геометрии.

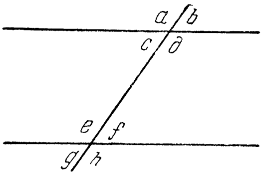

Рис. 5.

В связи с этим можно содержание основных теорем о параллельных линиях формулировать следующим образом.

Обозначим, как показано на рис. 5, отдельными буквами восемь углов, которые образуются при пересечении двух прямых, расположенных в одной плоскости, третьей прямой. Напишем следующие 12 равенств:

$$\left.\begin{array}{l} a=e,\ b=f,\ c=g,\ \partial=h;\ c=f,\ \partial=e,\ a=h,\ b=g; \\ \quad c+e=2d,\ \partial+f=2d,\ a+g=2d,\ b+h=2d. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Каждое из этих равенств, если оно имеет место, влечет за собой все остальные и является *достаточным* условием для того, чтобы прямые были параллельны; это и доказывается предложениями I. 27 и I. 28. Требуется показать, что эти условия являются также *необходимыми*; это достигается ценой того, что необходимость одного из этих равенств принимается в качестве *постулата*. Евклид принимает в качестве постулата условие $c+e=2d$ или $\partial+f=2d$ [1]); можно принять в виде постулата любое другое из этих условий; иными словами, можно принять за постулат предложение: если линии параллельны, то имеет место одно из соотношений (1) (какое угодно); из этого тогда вытекает, что при параллельности прямых имеют место все перечисленные равенства. Таким образом, уже по существу дела постулат о параллельных линиях допускает 12 формулировок, мало отличающихся одна от другой. Английскому математику Плэйферу [2]) не совсем правильно приписывают другую формулировку [3]), которая часто приводится в сочинениях по элементарной геометрии: *через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной*. С именем Лежандра (также безусловно неправильно) связывают следующую формулировку постулата: *если одна из двух прямых, лежащих в одной плоскости, перпендикулярна к секущей, а другая образует с ней острый угол, то прямые пересекаются со стороны острого угла*. Постулат может быть выражен в различных других формах, — вернее, без доказательства может быть принято одно из многих других предложений, эквивалентных V постулату.

Но в течение двух тысяч лет геометры старались вовсе избежать введения специального постулата в теорию параллельных линий — тенденция, отчетливо выраженная в приведенной выше цитате из сочинения Прокла. Переходим к изложению наиболее интересных, в том или ином отношении характерных доказательств постулата.

Доказательство Прокла

Комментируя предложение I. 29 «Начал», Прокл прежде всего излагает доказательство этого предложения, принадлежащее Птолемею и не опирающееся на V постулат.

---

[1]) Собственно говоря, обратно противоположное предложение: если $c + e \neq 2d$, то прямые пересекаются.

[2]) J. Playfair, Elements of geometry, containing the first six books of Euclid, Edinburgh, 1797.

[3]) Не совсем правильно потому, что эта формулировка встречается у других авторов раньше, — например, у Насир-Эддина. То же относится и к Лежандру.

Это «доказательство» в такой мере наивно, что и сам Прокл не относится к нему серьезно; мы не будем его здесь приводить. Свои собственные соображения Прокл также начинает с рассуждений, не лишенных некоторого остроумия, но фактически к делу не относящихся. То, что он собственно считает доказательством постулата, изложено следующим образом:

> «Те, которые желают получить доказательство, должны быть осведомлены, что оно предполагает аксиому, которой пользовался Аристотель в своем доказательстве конечности мира, именно: *если из одной точки выходят две прямые, то при неограниченном их продолжении расстояние между ними становится больше любой конечной величины*. Он [Аристотель] указывает, что при продолжении бесконечных прямых линий от центра к периферии расстояние между ними также будет бесконечно; ибо, если бы оно было только конечным, то оно все же могло бы быть увеличено, прямые же линии не были бы бесконечны[1]). Итак, [пересекающиеся] *прямые линии при неограниченном продолжении удаляются одна от другой на расстояние, которое становится больше любой конечной величины*.
>
> Принимая это, я утверждаю, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных линий, пересекает также и другую.
>
> В самом деле, пусть ab и cd будут параллельные прямые и пусть прямая efg пересекает ab; утверждаю, что она пересечет также cd [рис. 6]. В самом деле, так как мы здесь имеем две прямые линии, которые могут быть неограниченно продолжены от точки f, именно fb и fg, то расстояние между ними превысит любую конечную величину. Следовательно,

[1]) Эти соображения, конечно, очень сбивчивы и даже вовсе непонятны; но самая аксиома, которую формулировал Аристотель и которую Прокл применяет в следующем предложении, выражена совершенно отчетливо.

оно превзойдет величину расстояния между заданными параллельными прямыми линиями. Так как их расстояние становится, таким образом, больше расстояния между параллельными, то fg пересечет cd.

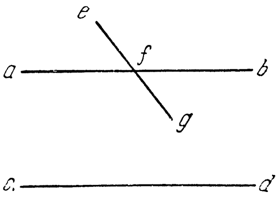

Рис. 6.

Установив это, мы можем последовательно провести доказательство постулата.

Пусть ab и cd будут две прямые, которые при пересечении с прямой ef образуют с ней углы bef и dfe, составляющие меньше двух прямых [рис. 7]. Утверждаю, что прямые пересекутся с той стороны, с которой сумма углов меньше двух прямых.

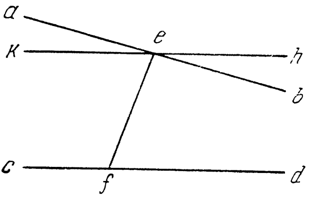

Рис. 7.

В самом деле, так как углы bef и dfe составляют меньше двух прямых, то пусть heb будет угол, дополняющий их до двух прямых; продолжим he до точки k. Так как теперь прямая ef пересекает линии hk и cd и образует с ними внутренние односторонние углы, составляющие два прямых, именно углы hef и dfe, то прямые hk и cd параллельны; ab пересекает kh, следовательно, в силу установленного выше предложения, она пересекает также и cd.

Таким образом, прямые ab и cd встречаются с той стороны, с которой расположены углы, составляющие меньше двух прямых. Поставленная цель, таким образом, достигнута».

Приведенное рассуждение Прокла состоит из трех частей. В первой части Прокл четко оговаривает, что он допускает добавочную аксиому, ведущую свое начало от Аристотеля. Во второй части он при помощи этой добавочной аксиомы доказывает вспомогательное предложение, заключающееся в том, что прямая, расположенная в плоскости двух параллельных прямых и пересекающая одну из них, пересекает также вторую [1]. Наконец, третья часть посвящена доказательству постулата о параллельных линиях в том виде, в каком он формулирован в «Началах» у Евклида.

Рассуждение Прокла содержит двойную ошибку. Положение, которое он называет Аристотелевой аксиомой и которое заключается в том, что точки, расположенные на одной стороне угла, по мере удаления от вершины неограниченно удаляются от другой стороны угла, отнюдь не должно быть причислено к аксиомам. Оно допускает строгое доказательство, не опирающееся на постулат о параллельных линиях; это доказательство дано Лобачевским в сочинении «Новые начала», [2] но встречается еще раньше в сочинении Саккери [3].

Но во второй части при доказательстве вспомогательного предложения Прокл принимает, что *расстояние между двумя параллельными линиями на всем их протяжении остается ограниченным* (можно даже думать, что он считает это расстояние постоянным); это есть допущение, вполне эквивалентное постулату о параллельных линиях. Рассуждение Прокла и сохраняет свое значение потому, что оно устанавливает эквивалентность обоих положений.

Доказательство Насир-Эддина

В XIII в. арабский математик Насир-Эддин ат-Туса (1201—1274) сделал перевод на арабский язык «Начал» Евклида и сопроводил его многочисленными примечаниями

---

[1] Заметим, что это вспомогательное предложение по существу совпадает с приведенной выше плэйферовой формулировкой постулата о параллельных линиях.

[2] Н. И. Лобачевский, Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. Полное собрание сочинений, т. II, М. — Л., 1949. Указанная теорема содержится в § 106 этого сочинения (стр. 280—281 II тома). [*Ред.*]

[3] См. стр. 159 этой книги. [*Ред.*]

и комментариями. Это сочинение свыше трехсот лет сохранялось в рукописи, а в 1594 г. было выпущено в свет в печатном виде в Риме [1]).

В 1901 г. в Бомбее оно было выпущено в переводе на санскритский язык. Сочинение это мало доступно, потому что перевода его на европейские языки не существует. Английский математик XVII в. Дж. Валлис (1616—1703), занимавший в Оксфордском университете кафедру Евклида, хорошо известный также своими трудами по алгебре и анализу, в своих лекциях по геометрии излагает доказательство постулата о параллельных линиях, предложенное Насир-Эддином. Это доказательство замечательно в том отношении, что в нем впервые постулат о параллельных линиях поставлен в связь с учением о сумме углов треугольника. Воспроизведем здесь доказательство Насир-Эддина в передаче Валлиса, помещенное во втором томе полного собрания его сочинений [2]):

> «Насир-Эддин предпосылает доказательству постулата три леммы, первую из которых он принимает без доказательства. Содержание их по существу заключается в следующем.
>
> Лемма I. а) *Если AB и CD* [рис. 8] *суть две прямые линии, расположенные таким образом, что перпендикуляры EF, GH, KL, опущенные из точек прямой AB на CD, всегда образуют с прямой AB неравные углы* [3]), *которые все время остаются острыми со стороны B, и тупыми со стороны A, то прямые AB и CD, до тех пор пока они не пересекаются, постоянно сближаются со стороны острых углов и расходятся со стороны тупых*

---

1) Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum Arabice impressi, Roma, 1594.

2) J. Wallis, De Postulato quinto et definitione quinta, Lib. 6. Euclid's; discertatio geometrica. (Opera mathematica, Oxoniae, 1693, т. II, стр. 665—673.)

3) То-есть неравные смежные углы, которые каждый перпендикуляр образует с прямой *AB*, например, углы *AEF* и *BEF*.

углов, т. е. перпендикуляры уменьшаются в сторону точек B и D и возрастают в сторону точек A и C.

b) *Обратно, если проведенные таким образом перпендикуляры становятся короче в направлении к точкам B, D и длиннее в направлении к A, C, так что прямые AB и CD постоянно сближаются в сторону B, D и расходятся в противоположную сторону, то каждый перпендикуляр образует с прямой AB два угла, один из которых острый, а другой тупой, причем все острые углы обращены в сторону точек B, D, а тупые — в противоположную сторону.*

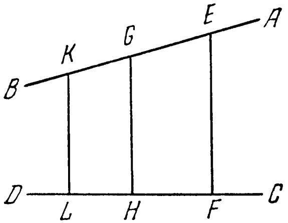

Рис. 8.

Лемма II. *Если из концов отрезка AB* [рис. 9] *восстановим к нему перпендикуляры AC, BD и на них отложим равные отрезки AC, BD и проведем прямую DC, то каждый из углов ACD и BDC будет прямым, а отрезок CD будет равен AB.*

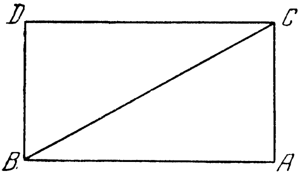

Рис. 9.

Доказательство этой леммы ведется от противного на основе предыдущей леммы. Если, например, *ACD* не прямой угол, то он либо острый, либо тупой; предположим, что он острый; тогда, согласно лемме I, *AC* больше *BD*, что противно условию; и т. д. [1]).

[1]) Заметим, что это заключение даже не вытекает из предыдущей леммы, ибо рассуждение молчаливо допускает, что в том случае, если *ACD* есть острый угол, *BDC* есть тупой угол; не исключена возможность, что оба угла острые, и тогда лемма не может получить применения; см. рассуждение Саккери (стр. 159—160 этой книги).

Доказав, что углы ACD, BDC прямые, уже нетрудно обнаружить, что отрезки AB и CD равны.

Лемма III. *В каждом треугольнике три угла составляют вместе два прямых.*

Для прямоугольного треугольника это доказывается на основании предыдущей леммы. В самом деле, если дан прямоугольный треугольник ABC, то мы строим, как это сделано выше, четырехугольник $ABDC$, углы которого в силу предыдущей леммы прямые. Диагональ BC делит этот четырехугольник на два равных треугольника, в каждом из которых внутренние углы составляют, таким образом, вместе два прямых. Вместе с тем теорема справедлива и для любого треугольника, так как всякий треугольник может быть разбит на два прямоугольных треугольника.

Теперь Насир-Эддин переходит к окончательному доказательству V постулата. Здесь возможны три случая: 1) когда один из внутренних односторонних углов, составляющих вместе меньше $2d$, прямой, 2) когда они оба острые и 3) когда один из них тупой. Насир-Эддин обнаруживает, что два последних случая могут быть приведены к первому, и обращается к доказательству теоремы: *если одна из двух прямых образует с секущей прямой угол, а другая острый угол, то эти прямые встречаются со стороны острого угла.* Предположим, что прямые AB и CD встречают прямую FCE, образуя с ней прямой угол ECD и острый угол CEB [рис. 10, *а*]. Возьмем на EB произвольную точку G и из нее опустим перпендикуляр GH на EC. Так как угол CEG острый, то перпендикуляр упадет со стороны точки C; при этом он либо совпадет с перпендикуляром DC, либо не совпадет с ним. В первом случае предложение доказано.

Если GH не совпадет с DC и упадет со стороны точки F [1]), то прямая CD, входя внутрь треуголь-

[1]) Соответствующего чертежа нет в тексте Насир-Эддина; он присоединен нами [рис. 10, *б*].

ника, составленного перпендикуляром и прямыми AB и GH, должна пересечь EG [1]). Пусть, наконец, GH [2]) падает со стороны точки E от прямой CD. Вдоль HC откладываем ряд отрезков HK, KL и т. д., равных EH, до тех пор, пока точка деления M не упадет за точку C. Вдоль AB отметим отрезки GN, NO и т. д., равные EG, до тех пор, пока отрезок EP не станет таким же относительно отрезка EG, каким EM является относительно EH. Тогда можно доказать, что перпендикуляры, опущенные из точек N, O, P на прямую EC, падают соответственно в точки K, L, M.

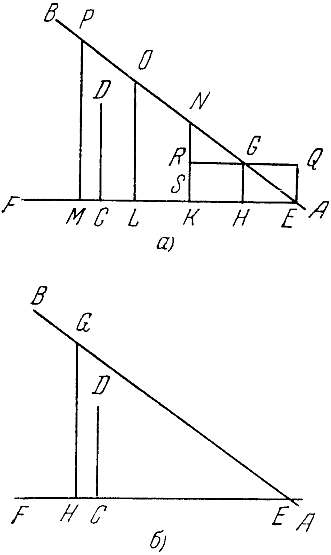

Рис. 10.

В самом деле, проведем первый из этих перпендикуляров из точки N и обозначим его через NS. Проведем, далее, отрезок EQ, перпендикулярный к EH и равный GH, и на SN отложим отрезок SR, также равный GH. Проведем, наконец, прямые GQ и GR. Тогда в силу леммы II углы EQG и QGH будут прямые и $QG = EH$. Таким же образом и углы SRG и RGH прямые и $RG = SH$; следовательно, отрезки

1) Это утверждение основано на аксиоме, которую обыкновенно неправильно связывают с именем германского геометра Паша: *если прямая, пересекающая сторону треугольника, входит внутрь его, то она должна из него выйти, т. е. должна встретить периферию треугольника еще в одной точке.* Эта аксиома в том или ином выражении необходима для обоснования абсолютной геометрии.

2) Возвращаемся к оригинальному чертежу автора (рис. 10, *а*).

RG и GQ лежат на одной прямой и углы, противоположные при вершине, NGR и EGQ равны. Углы NRG и GQE прямые, а $NG = GE$ по построению. Поэтому $RG = GQ$ и вместе с тем $SH = HE$; а так как по построению $HE = HK$, то $SH = KH$ и точка S совпадает с K. Совершенно такое же рассуждение можно провести и относительно остальных перпендикуляров. Следовательно, прямая PM перпендикулярна к FE; поэтому прямая CD, будучи параллельна MP и проходя внутри треугольника PME, должна при достаточном продолжении пересечь EP».

В 1733 г. итальянский математик, иезуит Иероним Саккери выпустил в свет «Начала» Евклида с весьма замечательными комментариями [1]). В обширных рассуждениях, относящихся к V постулату, Саккери посвящает доказательству Насир-Эддина следующие соображения, отчетливо выясняющие несостоятельность его рассуждений. Приводим перевод соответствующего текста Саккери:

«Насир-Эддин требует признания двух положений. Во-первых, что две прямые, расположенные в одной плоскости и встречающие ряд других прямых линий таким образом, что последние постоянно перпендикулярны к одной из них, а другую постоянно пересекают под неравными углами и именно: по одну сторону под острыми углами, а по другую под тупыми углами, — что такие две прямые, говорю я, до тех пор пока они не пересекаются, постоянно приближаются одна к другой в сторону острых углов и, наоборот, в сторону тупых углов постоянно расходятся.

Если других трудностей на его пути нет, я, со своей стороны, охотно признаю это требование Насир-Эддина, ибо как раз то, что у него остается

[1]) Об этом сочинении подробнее говорится в очерке «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров» (см. стр. 159 этой книги). Там же приведены библиографические данные. [*Ред.*]

недоказанным, я самым строгим образом доказал во II приложении к III предложению [1]).

Второе требование Насир-Эддина, представляет собой обращение первого; оно заключается в том, что угол должен в ту сторону, с которой упомянутые перпендикуляры по условию уменьшаются, постоянно оставаться острым, а с противоположной стороны, с которой перпендикуляры возрастают, должен оставаться тупым.

В этом кроется недоразумение. Почему углы (считая от некоторого перпендикуляра, принимаемого за первый), будучи первоначально по одну сторону острыми, не могли бы постоянно возрастать, пока мы не дойдем до прямого угла, т. е. до перпендикуляра, который служит общим перпендикуляром обеих названных прямых; и если это наступит, то хитрые построения Насир-Эддина, при помощи которых он весьма остроумно, хотя и с большими усилиями, доказывает евклидову аксиому, сводятся на-нет».

Эти соображения Саккери безукоризненно правильны. Поясним их еще несколько на самом ходе доказательства Насир-Эддина. Леммой I Насир-Эддин пользуется лишь для доказательства следующей леммы II. Здесь ему нужно показать, что при сделанном им построении в четырехугольнике $ABDC$ (рис. 11) внутренние углы C и D прямые. Доказывая это от противного, он принимает, что угол C острый, и тогда согласно принятой лемме перпендикуляры $C'A'$, $C''A''$, ..., идущие к D, должны с той же стороны составлять с CD острые углы C', C'', ... и вместе с тем убывать; поэтому BD не может оказаться равным AC. Между тем, как указывает Саккери, не исключена возможность, что эти углы возрастают, достигая при некотором положении перпендикуляра FE прямого;

[1]) Это первое допущение Насир-Эддина по существу представляет собой только некоторое расширение того положения, которое Прокл называет «Аристотелевой аксиомой»: и именно в этом расширенном виде оно действительно было доказано как Саккери, так и независимо от него Лобачевским.

тогда FE (общий перпендикуляр) будет наименьшим расстоянием между прямыми AB и CD, дальнейшие перпендикуляры $F'E'$, $F''E''$ могут возрастать и вновь дойти до $BD=AC$[1]). Более того, при развитии своих идей Саккери показывает, что отрезок FE, соединяющий середины верхней и нижней сторон четырехугольника, непременно представляет собой общий перпендикуляр; чтобы в этом убедиться, достаточно наложить четырехугольник на самого

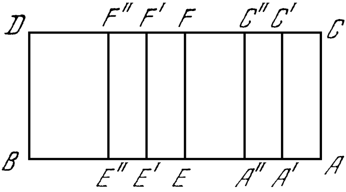

Рис. 11.

себя обратной стороной, т. е. так, чтобы точки A и B, а также перпендикуляры AC и BD заместили друг друга; точки E и F при этом не изменят своих положений. Поэтому углы D и C равны, а прямая EF перпендикулярна к обоим «основаниям» AB и CD четырехугольника. Продолжая анализ доказательства Насир-Эддина, заметим, что леммой III он для доказательства постулата вовсе не пользуется, ему нужна только лемма II. Какую же роль играет в его рассуждениях лемма III? Она выясняет, что *лемма* II *вполне равносильна тому, что сумма углов треугольника равна* $2d$; из леммы II Насир-Эддин, разрезая четырехугольник на два прямоугольных треугольника, выводит, что сумма углов треугольника равна $2d$; обратно, если принять, что сумма углов в треугольнике равна $2d$ и, следовательно, в четырехугольнике $4d$, то в четырехугольнике $ABDC$, который Насир-Эддин рассматривает, углы C и D, будучи равны между собой, должны быть прямыми.

[1]) Именно это и имеет место в геометрии Лобачевского (см. стр. 106 этой книги). [*Ред.*]

Основываясь на постулате о параллельных линиях, Евклид доказывает, что сумма углов в треугольнике равна $2d$; если *принять*, что сумма углов треугольника равна $2d$, то отсюда вытекает лемма II Насир-Эддина и основанное на ней безукоризненное доказательство V постулата. Следовательно, *допущение, что сумма внутренних углов треугольника равна* $2d$, *эквивалентно постулату Евклида*. Таков действительный вывод из рассуждений Насир-Эддина. Этот вывод имеет большое значение; его отчетливо усвоил и формулировал Лежандр (а еще раньше Саккери); это сыграло большую роль в дальнейшей эволюции учения о параллельных линиях.

Доказательство Валлиса

Дж. Валлис пользовался весьма большим авторитетом не только в Англии, но и во всех странах, в которых в ту пору культивировалась математика. 11 июля 1663 г. он прочитал в Оксфорде лекцию, содержавшую доказательство постулата о параллельных; лекция тем более интересна, что она содержит также и изложение взглядов этого выдающегося математика на существо проблемы о параллельных линиях. Лекция эта опубликована в полном собрании сочинений Валлиса [1]).

Лекция начинается следующими вводными словами, отчетливо выявляющими взгляды Валлиса:

> «Как известно, некоторые как древние, так и новые авторы делали Евклиду упрек, что он принял V постулат, или (как говорили другие) XI аксиому, или даже (по исчислению Клавия) XIII аксиому без доказательства, между тем как он должен был бы ее доказать. Именно, порицали, что он принял для прямых линий за очевидное нечто такое, что для линий вообще несправедливо» [2]).

---

[1]) Demonstratio Postulati Quinti Euclidis. (Operae mathematica, Oxonia, 1693, т. II, стр. 674—678).

[2]) Явное указание на соображения Прокла (стр. 28).

Формулировав постулат о параллельных линиях, Валлис продолжает:

«Между тем, большинство этих обвинителей Евклида (по крайней мере, поскольку я их до сих пор изучил) основывают свои доказательства на других допущениях, которые, как мне кажется, ни в коем случае не будут признаны более легкими, чем то, что требует Евклид. Нередко они впадают даже в ту самую ошибку, которой они желают избегнуть; именно, они принимают для прямых линий за истинное нечто такое, что для линий вообще несправедливо, как я это показал в другом месте.

С своей стороны, я без колебаний принимаю то, что требует Евклид; и это не потому, что доказательства, предложенные другими, страдают тем же недостатком, который они порицают у Евклида, или что требования их вовсе не более очевидны; дело в том, что, как мне кажется, совершенно необходимо либо принять этот постулат, либо заменить его другим; и наконец, если даже признать доказуемость этого постулата, то нужно сказать, что в качестве основного положения обыкновенно принимают не только то, что совершенно недоказуемо, но и то, что само по себе настолько очевидно, что не нуждается ни в каком доказательстве; ибо несомненно, некоторые из других аксиом могут быть доказаны, и это было бы нетрудно обнаружить, если бы в этом была нужда [1]).

Но, видя как многие до настоящего времени пытались дать доказательство упомянутого постулата в убеждении, что он в таковом нуждается, а также сделать некоторый вклад в это дело, я попытался дать доказательство, которое вызывало бы меньше возражений, чем доказательства, предложенные до сего времени».

---

[1]) Очень многие комментаторы Евклида указывали, что II и IV постулаты допускают доказательства.

Как и другие авторы, Валлис предпосылает своему доказательству ряд вспомогательных предложений. Одни из них совершенно тривиальны, другие нуждались бы не столько в доказательстве, сколько в уточнении тех понятий, которыми автор оперирует; во всяком случае, первые семь предложений по существу не встречают возражений и здесь не требуют воспроизведения.

Мы ограничимся поэтому только двумя предложениями Валлиса — восьмым и девятым.

> «VIII. Наконец, я приму (считая уже известными учение об отношении и понятие о подобных фигурах) следующее положение: *для каждой фигуры всегда существует другая подобная ей фигура произвольной величины.*
>
> Кажется, что это допущение (способность к бесконечному делению и пропорциональному увеличению) вытекает из существа пространственных отношений; именно, ясно, что каждую фигуру можно неограниченно уменьшать и увеличивать (сохраняя их форму)».

За этим следует длинный абзац, в котором Валлис старается еще убедительнее обнаружить допустимость вводимого им основного положения.

Далее идет предложение IX, которое и содержит, собственно, доказательство V постулата.

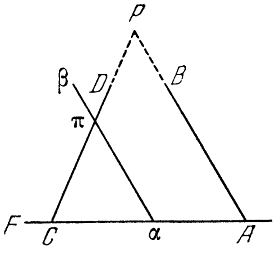

Рис. 12.

> «IX. Пусть [рис. 12] AB и CD будут прямые, пересекающие неограниченную прямую ACF и образующие с нею по одну сторону внутренние углы BAC и DCA, которые вместе составляют меньше двух прямых.
>
> Я утверждаю, что прямые AB и CD при неограниченном продолжении встречаются и именно с той стороны прямой AF, с которой лежат эти два угла.

В самом деле, представим себе, что прямая AC[1]), расположенная между ними на неограниченной прямой ACF, прямолинейно по ней передвигается [2]). Положим далее, что прямая BA, опирающаяся на AC, движется вместе с этим отрезком, сохраняя угол BAC, до тех пор, пока $\alpha\beta$, т. е. движущаяся прямая AB, встретит прямую CD (согласно лемме VII) в некоторой точке π. Тогда $\pi C\alpha$ есть треугольник [3]), и (согласно предложению VIII) существует другой подобный ему треугольник любой величины. Поэтому на отрезке CA (как на основании) можно построить треугольник, подобный треугольнику $\pi C\alpha$ с основанием $C\alpha$. Пусть это выполнено и PCA есть этот треугольник».

Авторы доказательства постулата о параллельных линиях, естественно, стараются обеспечить себя от возможных возражений; они очень часто входят в пространные рассуждения о совершенно тривиальных вещах, которыми правильность вывода совершенно не нарушается. Мы опускаем такого рода тривиальные соображения Валлиса и воспроизводим продолжение доказательства:

«Так как PCA есть треугольник, то стороны CP и AP (по определению треугольника) встречаются в точке P [4]); а так как треугольник PCA подобен тре-

1) Собственно отрезок AC.

2) Возможность такого передвижения прямолинейного отрезка по прямой, на которой он лежит, подробно обосновывается в лемме I.

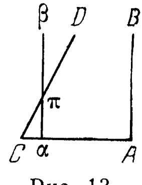

Рис. 13.

3) Доказательству того, что такой треугольник действительно образуется, посвящены предпосланные леммы. Эти подготовительные теоремы были бы излишними, если бы Валлис ограничился тем случаем, когда $AB \perp AC$, а угол DCA острый (этим случаем весь вопрос исчерпывается). Опустив из любой точки π на стороне CD угла ACD перпендикуляр $\pi\alpha$ (рис. 13), получаем треугольник $\pi C\alpha$.

4) И эта фраза характерна в смысле попытки обоснования тривиального утверждения, что стороны треугольника имеют общую точку — вершину.

угольнику $\pi C\alpha$ (по построению), то каждый угол одного треугольника равен соответствующему углу другого треугольника (согласно определению подобных прямолинейных фигур). В соответствии с этим угол PCA равен углу $\pi C\alpha$, т. е. углу DCA, и прямая CP лежит на продолжении прямой CD; ибо если бы прямая лежала по одну или другую сторону (от CP), то угол PCA был бы больше или меньше угла DCA, между тем как равенство их доказано.

Точно так же угол PAC равен углу $\pi\alpha C$. Но тому же углу $\pi\alpha C$, т. е. углу $\beta\alpha F$, равен угол BAF или BAC, а потому и угол BAC равен углу PAC. Следовательно, прямая AP лежит на продолжении прямой AB (если бы она лежала по одну или другую сторону ее, то углы BAC и PAC не были бы равны, между тем как равенство их доказано).

Таким образом прямая AP совпадает с продолжением прямой AB. Совершенно так же CP и продолжение CD образуют прямую. Но, как уже было показано, AP и CP встречаются в точке P; поэтому встречаются и продолжения прямых AB и CD и именно в этой точке P, т. е. с той стороны прямой AF, с которой лежат два угла, составляющие меньше двух прямых. Что и требовалось доказать.

Это доказательство я провел по самым строгим правилам, по образцу Евклида, чтоб даже и строгий судья не мог мне сделать упрека в его неполноценности. Однако я совершенно не порицаю Евклида за то, что он не дал доказательства: напротив, я не имел бы ничего против того, чтобы он ввел еще большее число недоказанных постулатов, например если бы он (вместе с Архимедом) постулировал, что *прямая линия короче всех линий, проходящих между теми же концами*; ему бы тогда не пришлось излагать 19 предложений, раньше чем доказать, что *две стороны треугольника, вместе взятые, больше третьей, и многое другое, что само по себе очевидно*».

Существенная заслуга Валлиса заключается в том, что он четко формулирует то допущение, которое в его рассуждении заменяет постулат о параллельных линиях. В отличие от многих других авторов, которые делают такое же допущение молчаливо, скрывая это от себя и от читателя, Валлис высказывает убеждение, что без специального постулата учение о параллельных линиях обойтись не может. Валлис обнаружил, что *допущение существования подобных фигур эквивалентно постулату Евклида*; в этом — значение его рассуждений. Саккери, анализируя доказательство Валлиса, уточнил этот результат; он показал, что достаточно принять существование двух подобных треугольников, т. е. двух треугольников, которые имеют соответственно равные углы, но неравные стороны, чтобы доказать евклидог постулат.

Доказательство Л. Бертрана

Известно, что XVIII в. был эпохой упадка точности инфинитезимального метода. Это было время, когда блестящие успехи исчисления бесконечно малых привели к широкому его применению, часто выполнявшемуся без того контроля, который гарантирует правильность выводов. Те условия, при которых бесконечно малые и бесконечно большие величины становятся точными математическими понятиями, еще не были ни выявлены, ни установлены; вследствие этого применение их нередко приводило к выводам, иногда необоснованным, иногда вовсе неправильным. Эта печать эпохи, естественно, отразилась и на исследованиях, относившихся к теории параллельных линий. Появились доказательства постулата при помощи бесконечно малых и бесконечно больших величин и, конечно, в таком их применении, которое не соответствовало требованиям точного анализа. Наиболее остроумное из этого рода доказательств относится к концу XVIII в. и принадлежит швейцарскому математику Луи Бертрану (1731—1812). В 1778 г. им было выпущено двухтомное сочинение «Новое построение элементарной части математики»[1]), представлявшее собой попытку обоснованного построения алгебры и геометрии.

Второй том этого сочинения посвящен геометрии. В 1812 г. этот том был выпущен отдельным изданием в значительно сокращенном и переработанном виде[2]). В обоих изданиях этого сочинения помещено одно и то же доказательство V постулата, основанное на применении бесконечно больших величин; мы воспроизводим его в точном переводе.

«Теорема VII. *Если две прямые AB, CD* [рис. 14], *проведенные в одной плоскости, образуют с третьей прямой HG внутренние углы BKL, DLK, составляющие вместе два прямых, то часть плоскости, которую они ограничивают, столь мала по отношению ко всей плоскости, что содержится в ней бесконечное число раз.*

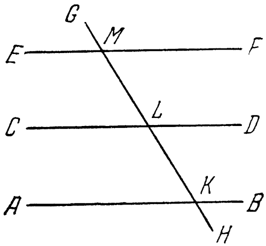

Рис. 14.

Так как, по предположению, сумма углов BKL, DLK равна двум прямым углам и смежные углы DLK, DLM также составляют два прямых, то углы BKL и DLM равны. Если поэтому отложим отрезок $LM = KL$ и через точку M проведем прямую MF в таком направлении, чтобы $FML = DLK$, а затем передвинем полосу $ACDB$ вдоль HG, пока точка K не достигнет L; если точка L при этом упадет в M, то полоса $ACDB$ совпадет с полосой $CEFD$ ввиду того, что равные углы совместятся, как и равные отрезки.

Но теперь, раз оказалось возможным, взяв на прямой HG длину LM, равную KL, построить на плоскости $ABCD$ полосу $CEFD$, равную $ACDB$, то

[1]) L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genéve, 1778.

[2]) L. Bertrand, Éléments de géométrie. Paris, 1812.

нет никакого сомнения и в том, что посредством бесконечного множества отрезков, равных KL и (последовательно) взятых на HG, можно на этой же плоскости построить бесконечное множество полос, равных $ACDB$. Следовательно, если две проведенные на плоскости прямые образуют с третьей внутренние углы, составляющие два прямых угла, то часть плоскости, которую они ограничивают, столь мала по отношению ко всей плоскости, что содержится в ней бесконечное число раз.

Теорема VIII. *Когда две прямые образуют с третьей внутренние углы, сумма которых не равна двум прямым углам, эти прямые пересекаются по ту сторону, где эта сумма меньше двух прямых.*

Положим, что две прямые LC и KA образуют с третьей KL внутренние углы AKL и CLK, составляющие в сумме меньше, чем два прямых угла

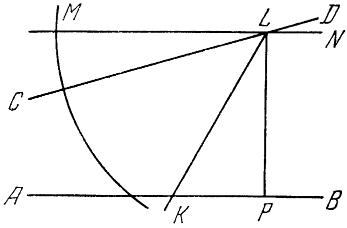

Рис. 15.

[рис. 15]; тогда существует некоторая прямая LM, образующая с LC такой угол CLM, что $AKL + KLC + CLM = AKL + KLM =$ двум прямым. Следовательно, если бы прямая LC не пересекала KA, угол MLC был бы заключен целиком внутри полосы $MLKA$. Но эта полоса содержится в плоскости бесконечное число раз, между тем как угол MLC содержится в ней лишь столько раз, сколько дуга MC содержится в окружности, описанной из центра L радиусом

LM. Стало быть, угол *MLC* не заключен целиком внутри полосы *MLKA*; поэтому его сторона *LC* выходит из этой полосы и пересекает *KA*».

Слабая сторона этого рассуждения, лишающая его доказательной силы, заключается в том, что ни вся плоскость, ни часть ее, содержащаяся между сторонами угла, не могут быть рассматриваемы как определенные величины, допускающие точное количественное сравнение. В евклидовой плоскости каждый угол может быть последовательно бесчисленное множество раз помещен внутри самого себя (рис. 16). Рассуждая, как Бертран, мы могли бы придти к заключению, что содержащаяся между сторонами угла площадь составляет сколь угодно малую часть себя самой.

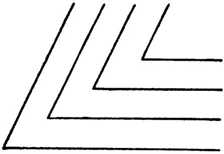

Рис. 16.

При всем том наглядная образность соображений Бертрана встретила внимание у многих серьезных математиков того времени. Крелль еще в 1835 г. поместил в своем журнале модификацию этого доказательства[1]). Вообще доказательства этого рода вносили немало путаницы в учение о параллельных линиях.

Доказательства Лежандра

XIX в. начинается весьма замечательными исследованиями Лежандра (1752—1833) по теории параллельных линий. В 1794 г. Лежандр выпустил в свет «Начала геометрии» — учебное руководство по элементарной геометрии, получившее весьма широкое распространение[2]).

Повидимому, составление этих «Начал» привело Лежандра к систематическому размышлению над теорией параллельных линий. Лежандр в первых восьми изданиях

[1]) A. L. Crelle, Théorie des parallèles. Journal für die reine und angewandte Mathematik **11**, Berlin, 1835.

[2]) A. M. Legendre, Éléments de géométrie. Paris, 1794.

своей книги не вводит вовсе постулата о параллельных линиях, а дает вместо этого его доказательство. Это доказательство меняется от издания к изданию, так как автор самостоятельно или по указанию других обнаруживает в своих рассуждениях недочеты, лишающие их доказательной силы. После восьмого издания Лежандр отказывается от доказательства постулата и в девятом издании возвращается по существу к системе Евклида. Однако в двенадцатом издании (1823) Лежандр вновь пытается уточнить одно из прежних доказательств, и эта новая модификация доказательства сохраняется в тринадцатом и четырнадцатом изданиях, вышедших при жизни автора. В 1833 г. Лежандр изложил все свои соображения по теории параллельных линий в обширной статье, помещенной в «Мемуарах Парижской академии»[1]). Мы изложим содержание исследований Лежандра именно в той концепции, которая нашла себе место в этом заключительном мемуаре. Но необходимо иметь в виду, что все эти соображения Лежандра были уже известны с 1823 г., т. е. после появления 12-го издания «Начал».

Мемуар Лежандра озаглавлен очень осторожно «Размышления по теории параллельных линий». Все рассуждения Лежандра распадаются на две серии соответственно двум различным замыслам, двум исходным пунктам. Первый замысел связывает учение о параллельных линиях с суммой углов прямолинейного треугольника, а второй основан на так называемом принципе однородности.

Как обнаружил Насир-Эддин, предложение, что сумма углов прямолинейного треугольника равна двум прямым, ведет к точному доказательству постулата о параллельных линиях. Сообразно этому Лежандр ставит себе целью доказать, не пользуясь постулатом о параллельных, что сумма углов треугольника равна двум прямым. Это и составляет первый замысел Лежандра.

---

[1]) A. M. Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris, 1833, т. XII, стр. 367—410.

Само доказательство разбивается на две части: сначала Лежандр доказывает, что сумма углов треугольника не может превысить двух прямых, а затем он старается доказать, что сумма углов треугольника не может быть и меньше двух прямых. Первое предложение доказано безукоризненно, все же попытки доказать второе предложение содержат ту или иную погрешность. Лежандр дает два различных чрезвычайно остроумных доказательства первого предложения, из которых одно помещено в третьем издании «Начал» (1800), а другое — в двенадцатом издании (1823). Эти два доказательства мы и приводим в переводе.

Вот первое доказательство:

«Предложение XIX. Лемма. *Сумма трех углов треугольника не может быть больше двух прямых углов.*

Пусть, если возможно, ABC будет треугольник, в котором сумма трех углов больше двух прямых [рис. 17].

На продолжении прямой AC возьмем $CE = AC$; построим угол $ECD = CAB$ и сторону $CD = AB$; со-

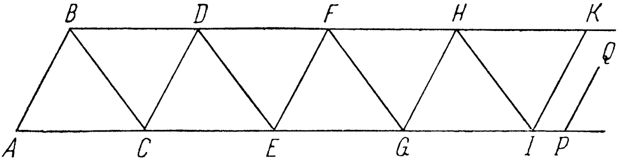

Рис. 17.

единим DE и BD. Треугольник CDE будет равен треугольнику ABC, так как они имеют одинаковый угол, содержащийся между соответственно равными сторонами; следовательно, угол $CED = ACB$, угол $CDE = ABC$ и третья сторона ED равна третьей стороне BC. Так как ACE есть прямая линия, то сумма углов ACB, BCD, DCE равна двум прямым углам. Однако мы предположили, что сумма углов треугольника ABC больше двух прямых; поэтому $CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + ECD$; отнимая от обеих частей общее слагаемое ACB и равные слагаемые $CAB = ECD$, получим $ABC > BCD$, а так как стороны AB, BC треугольника ABC соответственно равны сторонам CD, CB треугольника BCD, то отсюда следует, что третья сторона AC больше третьей стороны BD.

Представим себе теперь, что прямая AC неограниченно продолжена и последовательно построены равные и подобным образом расположенные треугольники ABC, CDE, EFG, GHI и т. д. Если соединим соседние вершины прямыми BD, DF, FH, HK, то вместе с тем образуется ряд промежуточных треугольников BCD, DEF, FGH и т. д., которые все будут равны между собой, так как все они будут иметь по равному углу, содержащемуся между соответственно равными сторонами. Следовательно,

$$BD = DF = FH = HK = \ldots;$$

имея это в виду и принимая во внимание, что $AC > BD$, положим разность $AC - BD = D$. Ясно, что в таком случае $2D$ будет разность между прямой ACE, равной $2AC$, и прямой или ломаной линией BDF, равной $2BD$; таким образом $AE - BF = 2D$. Таким же образом найдем, что $AG - BH = 3D$, $AI - BK = 4D$ и т. д.

Но как бы мала ни была разность D, если мы ее повторим достаточное число раз, она превзойдет любую наперед заданную величину. Можно, следовательно, предположить, что ряд треугольников продолжен настолько далеко, что разность $AP - BQ$ будет больше $2AB$; мы будем, таким образом, иметь $AP > BQ + 2AB$. С другой стороны, прямая AP короче ломаной $ABQP$, так что $AP < AB + BQ + QP$ или $AP < BQ + 2AB$. Таким образом гипотеза, из которой мы исходили, привела нас к противоречию. Следовательно, сумма углов треугольника не может превосходить двух прямых».

Весьма замечательно, что через 28 лет после того, как это доказательство было опубликовано Лежандром (1800), Гаусс нашел то же самое доказательство. На титульном листе принадлежавшего Гауссу экземпляра «Начал» Евклида сохранилась запись того же доказательства с надписью: «Найдено 18 ноября 1828 года»; доказательство Лежандра, помещенное в несколько упрощенном виде[1]) в элементарном учебнике, от Гаусса, очевидно, ускользнуло.

Чтобы доказать, что сумма углов треугольника равна $2d$, оставалось обнаружить, что она не может быть меньше $2d$. Лежандр в том же издании своих «Начал» выполняет это следующим образом.

«Предложение XX. Теорема. *В каждом треугольнике сумма трех углов равна двум прямым.*

Доказав, что сумма трех углов не может превышать двух прямых, остается обнаружить, что она не может быть меньше двух прямых.

Пусть ABC будет данный треугольник [рис. 18] и пусть, если это возможно, сумма его углов равна $2P-Z$, где P означает прямой угол, а Z — какую-нибудь величину, на которую сумма углов, согласно предположению, меньше двух прямых углов.

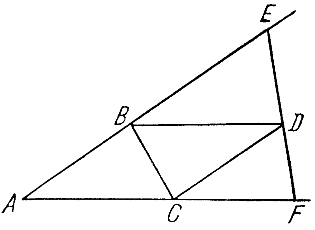

Рис. 18.

Пусть A будет наименьший из углов треугольника ABC. При противоположной стороне BC построим угол $BCD=ABC$ и угол $CBD=ACB$; треугольники BCD и ABC будут равны, так как они имеют общую сторону BC, к которой прилежат соответственно равные углы[2]). Через точку D проведем

[1]) Изложение Лежандра, очевидно, имеет в виду учеников, для которых предназначены его «Начала».

[2]) На DBC можно смотреть как на треугольник ABC, который в опрокинутом виде приложен к стороне BC. При этом сторона BD пройдет внутри угла CBE, потому что угол DBC,

какую угодно прямую EF, но таким образом, чтобы она встречала продолжения сторон угла A в точках E и F. Так как сумма углов в каждом из треугольников ABC и BCD составляет $2P-Z$, а в каждом из треугольников EBD и DCF она не может превзойти $2P$, то сумма всех углов четырех треугольников ABC, BCD, EBD, DCF не превосходит $4P-2Z+$ $+4P$, т. е. $8P-2Z$.

Если из этой суммы вычтем сумму углов при точках B, C, D, которая составляет $6P$ (так как сумма углов, образовавшаяся при каждой из точек, есть $2P$), то остаток будет равен сумме углов треугольника AEF, которая, таким образом, не превзойдет $8P-2Z-6P$, т. е. $2P-2Z$.

Итак, в то время как сумма углов треугольника ABC меньше двух прямых на Z, эта сумма в треугольнике AEF меньше двух прямых на $2Z$.

При посредстве треугольника AEF можно таким же образом построить третий треугольник, сумма углов которого будет меньше $2P-4Z$; затем мы построим четвертый треугольник, сумма углов которого отличается от $2P$ больше чем на $8Z$; это можно продолжать неограниченно.

Однако, сколь бы мало ни было Z по сравнению с прямым углом, последовательность Z, $2Z$, $4Z$, $8Z$ и т. д., члены которой постоянно удваиваются, рано или поздно приведет к члену, равному $2P$ или большему $2P$. Мы придем тогда к треугольнику, к сумме углов которого нужно будет прибавить $2P$ или больше $2P$, чтобы в результате все-таки получить $2P$. Это — вывод, очевидно, абсурдный. Следовательно, гипотеза, от которой мы исходили, не может иметь места; это значит, невозможно, чтобы сумма углов

равный BCA, меньше угла CBE (внутренний угол треугольника меньше внешнего, с ним несмежного); по той же причине сторона DC будет расположена внутри угла BCF. Вершина D будет, таким образом, лежать внутри угла EAF по другую сторону BC относительно A.

треугольника ABC, была меньше двух прямых. А так как сумма углов треугольника в силу предыдущего предложения не может также превышать $2P$, то она равна $2P$».

Это рассуждение, которому нельзя отказать в исключительном остроумии, все же страдает существенным недостатком, лишающим его доказательной силы. Оно предполагает, что *через точку D, расположенную внутри угла, всегда можно провести прямую EF, пересекающую обе стороны угла*: это есть допущение, эквивалентное постулату Евклида. И Лежандр, очевидно, сознавал, что в этом есть дефект. Это видно из следующего подстрочного примечания, помещенного в том же третьем издании.

«Мы предположили, что A есть самый меньший из углов ABC и, следовательно, не превышает двух третей прямого угла; этим мы имели в виду сделать более ощутимым, что прямая, проведенная через точку D, может одновременно встретить продолжения сторон AB и AC».

Совершенно ясно, что эта деталь ничего не изменяет. Лежандр все же сохранил это доказательство с третьего по восьмое издание. Как уже сказано, в изданиях с девятого по одиннадцатое Лежандр возвратился к схеме Евклида; но с двенадцатого по четырнадцатое появляется другая модификация того же доказательства, первая часть которого сыграла в литературе существенную роль. Приводим перевод этого второго доказательства.

«Предложение XIX. Теорема. *Во всяком треугольнике сумма трех углов равна двум прямым.*

Пусть ABC будет данный треугольник, в котором будем считать AB самый большой и BC самой малой стороной [рис. 19], так что ACB есть наибольший, а BAC—наименьший угол треугольника. Через точку A и через середину I противолежащей стороны BC проведем прямую AI, которую продолжим до точки C'

таким образом, чтобы $AC' = AB$; далее, продолжим AB до B' таким образом, чтобы AB' превышало вдвое AI.

Если через A, B, C обозначим три угла треугольника ABC и таким же образом через A', B', C' обозначим три угла треугольника $AB'C'$, то я утверждаю, что $C' = B + C$ и $A = A' + B'$; отсюда следует, что $A + B + C = A' + B' + C'$, т. е. что сумма трех углов в обоих треугольниках одна и та же.

Чтобы это доказать, отложим $AK = AI$ и соединим точки C' и K; получим треугольник $C'AK$, равный треугольнику BAI, ибо в этих двух треугольниках

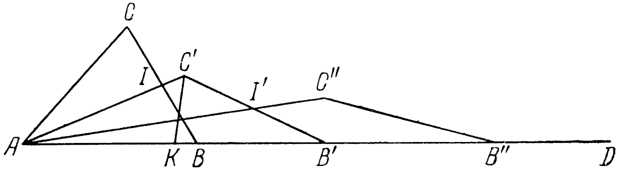

Рис. 19.

общий угол A содержится между соответственно равными сторонами; именно: $AC' = AB$ и $AK = AI$; поэтому третья сторона $C'K$ равна третьей стороне BI, угол $AC'K = ABC$ и угол $AKC' = AIB$.

Теперь утверждаю, что треугольник $B'C'K$ равен треугольнику ACI, ибо сумма двух смежных углов AKC' и $C'KB'$ равна двум прямым углам, так же как и сумма двух углов $AIC + AIB$; вычитая из обеих сумм равные углы AKC' и AIB, найдем, что угол $C'KB' = AIC$. Эти равные углы заключены в двух треугольниках между соответственно равными сторонами, именно: $C'K = IB = CI$ и $KB' = AK = AI$, ибо мы предположили $AB' = 2AI = 2AK$. Следовательно, два треугольника $B'C'K$ и ACI равны; поэтому сторона $B'C' = AC$, угол $B'C'K = ACB$ и угол $KB'C' = CAI$.

Отсюда следует:

1) что угол $AC'B'$, обозначенный через C', состоит из двух углов, равных углам B и C треугольника ABC, так что $C' = B + C$;

2) что угол A треугольника ABC состоит из угла A' или $C'AB'$, принадлежащего треугольнику $AB'C'$, и из угла CAI, равного углу B' того же треугольника; таким образом $A = A' + B'$; следовательно, $A + B + C = A' + B' + C'$. С другой стороны, так как по предположению $AC < AB$ и, следовательно, $C'B' < AC'$, то в треугольнике $AC'B'$ угол при вершине A, обозначенный через A', меньше угла B'; а так как сумма этих двух углов равна углу A данного треугольника, то отсюда следует, что угол A' меньше $\frac{1}{2}A$.

Если применим то же построение к треугольнику $AB'C'$, то получим третий треугольник $AB''C''$, углы которого обозначим через A'', B'', C''; мы будем тогда иметь аналогичное равенство $C'' = C' + B'$, $A' = A'' + B''$, откуда следует, что $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Таким образом сумма трех углов в обоих треугольниках одна и та же, но вместе с тем угол $A'' < \frac{1}{2}A'$ и, следовательно, $A'' < \frac{1}{4}A$.

Продолжая неопределенно ряд треугольников $AC'B'$, $AC''B''$ и т. д., мы придем к треугольнику abc, в котором сумма трех углов будет та же, что в данном треугольнике ABC, но в котором угол a станет меньше любого данного члена убывающей прогрессии $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$, ...».

До сих пор рассуждения совершенно безукоризненны и содержат в себе новое доказательство того, что сумма внутренних углов прямолинейного треугольника не может превышать двух прямых. В самом деле, предположим, что в треугольнике ABC сумма углов равна (придерживаясь обозначений Лежандра) $2D + \alpha$ [1]). В приведенной выше убывающей геометрической прогрессии найдется член, меньший α; поэтому, продолжив достаточное число раз

[1]) В этом издании Лежандр обозначает прямой угол через D.

построение последовательных треугольников, придем к треугольнику abc, в котором угол $a < \alpha$. Но так как сумма углов треугольника abc осталась та же, что и в треугольнике ABC, т. е. равна $2D + \alpha$, то сумма двух углов $b + c$ должна оказаться больше, чем $2D$; но это не может иметь места, так как каждый из них меньше угла, смежного со вторым из этих двух углов. Некоторой модификацией этого доказательства пользуется также Лобачевский[1]).

Лежандр идет, однако, дальше и пытается при помощи того же построения доказать, что сумма углов треугольника равна двум прямым.

Приводим заключительную часть его рассуждения:

«Можно, следовательно, предположить, что этот ряд треугольников продолжен до тех пор, пока угол a не станет меньше всякого данного угла.

И если с помощью треугольника abc построим следующий треугольник $a'b'c'$ [рис. 20], то сумма

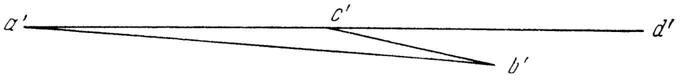

Рис. 20.

$a' + b'$ углов этого последнего будет равна углу a и, следовательно, будет меньше любого данного угла; отсюда видно, что сумма трех углов треугольника $a'b'c'$ сводится к одному только углу c'.

Чтобы иметь точную меру этой суммы, продолжим сторону $a'c'$ в направлении к d' и обозначим через x' внешний угол $b'c'd'$; если прибавим этот угол к углу треугольника $a'c'b'$, то получим в сумме два прямых угла. Обозначая поэтому прямой угол через D, получим $c' = 2D - x'$; следовательно, сумма углов треугольника $a'b'c'$ будет $2D + a' + b' - x'$.

1) Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий. Полное собрание сочинений, т. I, М. — Л., 1946. Соответствующее доказательство содержится в § 19 этого сочинения (стр. 86—87 I тома). [*Ред.*]

> Но легко понять, что стороны и углы треугольника $a'b'c'$ при том же построении меняются таким образом, что мы последовательно приходим к треугольникам, в которых углы a' и b' приближаются к своим пределам, т. е. к нулю. В этом предельном положении прямая $a'b'c'$ сливается с $a'b'$; три точки a', c', b', в конце концов, располагаются в точности по прямой линии; тогда углы b' и x' обращаются в нуль вместе с углом a' и количество $2D+a'+$ $+b'-x'$, выражающее сумму трех углов треугольника $a'c'b'$, сводится к $2D$, и, следовательно, сумма углов треугольника равняется двум прямым».

Это рассуждение обнаруживает, что даже такой геометр, как Лежандр, не был достаточно осторожен в применении метода бесконечно малых. Когда он говорит, что углы a' и b' становятся менее любого данного угла, то получается впечатление, что наступит момент, когда эти углы станут меньше любого угла, как бы мал он ни был; это, конечно, лишено смысла. В действительности же доказано лишь то, что углы a' и b' стремятся к нулю; что касается того, что ломаная $a'c'b'$ стремится слиться с прямой $a'b'$ и что угол x' стремится к нулю, это остается совершенно необоснованным, и рассуждение лишено доказательной силы. Это было указано Штейном в «Анналах Жергона» в 1824 г. [1]).

Таким образом, все эти рассуждения Лежандра действительно устанавливают только, что сумма углов треугольника не может превысить двух прямых. К этому предложению Лежандр в примечаниях и в упомянутой выше статье, помещенной в «Мемуарах Парижской академии», присоединяет еще один важный факт: он обнаруживает, что сумма углов равна $2d$ во всяком треугольнике, если она равна $2d$ хотя бы в одном треугольнике, и, следовательно, она меньше $2d$ во всяком треугольнике, если

---

[1]) J. P. W. Stein, Examen de quelques tentatives de théorie des parallèles. Annales de Mathématiques pures et appliquées **15**, Nimes, 1824.

существует хотя бы один треугольник, в котором сумма углов меньше $2d$.

Все изложенные рассуждения Лежандра представляют, как мы видим, развитие одного и того же замысла, сводящегося к попытке доказать, не опираясь на постулат о параллельных линиях, что сумма углов в прямолинейном треугольнике равна двум прямым. Рассуждения, вытекающие из другого замысла и основанные на так называемом «принципе однородности», изложены в приложении к первому изданию «Начал» (1794 г.)[1]; они развиты также в «Размышлениях», помещенных в «Мемуарах». Эти рассуждения настолько пространны, что приводить полный их перевод нецелесообразно. Герлинг[2]) в письме к Гауссу от 11 марта 1816 г. чрезвычайно удачно в нескольких строках излагает сущность замысла Лежандра. Мы приводим это письмо Герлинга и ответ Гаусса:

> «...В заключение вспоминаю, что я уже давно собирался спросить Ваше мнение о лежандровой теории параллельных линий, изложенной в его „Началах геометрии". Он определяет прямую линию как кратчайший путь между двумя точками и с помощью этого определения доказывает, что сумма трех углов треугольника не превышает $2R$; затем он доказывает также, что она не может быть и меньше $2R$, при этом он, однако, принимает, что через точку, лежащую внутри угла, меньшего $\frac{2}{3}R$, всегда можно провести прямую линию таким образом, чтобы она пересекла обе стороны угла. В шестом издании он это допущение пытается оправдать в особом примечании. Мне кажется, однако, что в этом кроется та же ошибка, на которую Вы мне указывали во время моего последнего пребывания в Геттингене. Он признает это допущение *достаточно очевидным* (assez évident) и

[1]) Note IV.

[2]) Gerling, Christian Ludwig (1788—1864), ученик и друг Гаусса, в то время профессор математики в Марбургском университете.

полагает, что достигнуть большей строгости невозможно, если не исходить из другого определения прямой линии.

Вслед за этим он, однако, доказывает, что сумма трех углов треугольника должна быть равна $2R$, еще другим способом, который кажется мне убедительным. Рассуждение это состоит примерно в следующем.

Двумя углами и стороной, к которой эти углы прилегают, треугольник вполне определяется, так что

$$C = \varphi(A, B, c).$$

Если примем прямой угол за единицу, то C, A, B будут числа. Отсюда следует, что c не должно входить в функцию φ, так как в противном случае мы имели бы

$$c = \varphi(C, A, B) = \text{числу},$$

что нелепо[1]). Вследствие этого в прямоугольном треугольнике сумма двух острых углов равна $2R$, откуда все остальное уже вытекает[2]).

---

[1]) В этом и заключается принцип однородности: c представляет собой линейную величину, а потому не может выражаться отвлеченным числом.

[2]) К письму приложен приводимый и здесь чертеж (рис. 21), который предназначается для того, чтобы это утверждение оправдать. Если c из предыдущего уравнения выпадает, то оно имеет вид $C = \varphi(A, B)$, т. е. каждый угол треугольника определяется двумя другими углами. Если A есть прямой угол, то это соотношение принимает вид $C = \chi(B)$, т. е. в прямоугольном треугольнике каждый острый угол определяется вторым острым углом. Если поэтому острые углы треугольника ABC обозначим через ρ и ω, то $\omega = \chi(\rho)$, $\rho = \chi(\omega)$. Если теперь из вершины прямого угла треугольника опустим перпендикуляр AD на гипотенузу, то треугольник разобьется на два прямоугольных: ABD и ACD; из прямоугольного треугольника ABD следует, что $\angle BAD = \chi(\rho) = \omega = C$, таким же образом $\angle CAD = \chi(\omega) = \rho = B$; поэтому $\omega + \rho = d$. Таким образом, $C + B = d$.

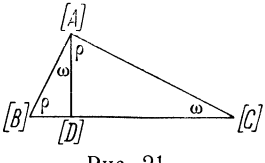

Рис. 21.

Я это предложение читал у Лежандра еще тогда, когда работал в Геттингене; возвращаясь в последний раз из Геттингена, я очень огорчался, что мне не пришло в голову Вас об этом спросить, когда я имел удовольствие слышать Ваше мнение по (всему) этому вопросу. Теперь, прочитав это вновь, вижу, что на „сделанное ему возражение“, связанное с сферическим треугольником, Лежандр отвечает, что там имеет место не равенство $C=\varphi(A, B, c)$, а $C=\varphi(A, B, c \text{ rad})$ или просто $C=\varphi\left(A, B, \frac{c}{r}\right)$, вполне согласное с законом однородности. Это последнее мне не совсем ясно, и я очень хотел бы, чтобы Вы при случае упомянули обо всем этом предмете в нескольких словах»[1]).

Гаусс ответил Герлингу (в письме от 11 апреля 1816 г.) следующими словами:

«Вас интересует мое мнение о лежандровом доказательстве теории параллельных линий. Я должен признаться, что в моих глазах его вывод не имеет никакой доказательной силы. Он выводит, что

[1]) Сделанное Лежандру возражение заключается в том, что в сферическом треугольнике угол C определяется двумя другими углами A, B и стороной c. Соотношение

$$C=\varphi(A, B, c),$$

таким образом, в сферической тригонометрии имеет место, и принцип однородности нарушается. Почему же такое же соотношение не может иметь места и в прямолинейной тригонометрии? Лежандр на это в свою очередь справедливо возражает, что упомянутое соотношение в сферической тригонометрии имеет место в том случае, если под c разуметь угловое значение стороны; если же под c разуметь длину стороны, то ее угловое значение выразится отвлеченным числом $\frac{c}{r}$, где r — радиус сферы. Предыдущее уравнение принимает поэтому вид

$$C=\varphi\left(A, B, \frac{c}{r}\right),$$

и принцип однородности, таким образом, не нарушается.

$c = \varphi(A, B, C)$, следовательно = числу, что нелепо. Это „следовательно“ в действительности вовсе не следует; равенство $c = \varphi(A, B, C)$ говорит только, что c определено, коль скоро задано A, B, C. Это, однако, не исключает возможности, что в состав функции φ не входит какая-нибудь постоянная линия. Из уравнения $C = \varphi(A, B, c)$ сторона c вовсе не должна выпасть; она может вполне оставаться, если функция φ содержит постоянную линию, равную m, так что собственно

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{m}\right).$$

Как легко доказать, если евклидова геометрия не есть истинная геометрия, то подобных фигур вовсе не существует; в равностороннем треугольнике угол меняется вместе с величиной стороны, в чем я ничего абсурдного не нахожу. Угол представляет собой в этом случае функцию от стороны, а сторона — функцию от угла, однако, естественно, такую функцию, в состав которой еще входит постоянная линия. Кажется парадоксальным, что возможна прямая линия, как бы заданная a priori; но я не нахожу в этом ничего противоречивого. Было бы даже желательно, чтобы геометрия Евклида не была истинной, потому что мы тогда располагали бы общей мерой a priori. Например, за единицу длины можно было бы принять сторону равностороннего треугольника, угол которого = $= 59°59'59'',99999$» [1]).

[1]) Отчетливое понимание заключительной фразы предполагает уже знакомство с неевклидовой геометрией. В неевклидовой геометрии, которую здесь имеет в виду Гаусс, любыми тремя углами, сумма которых меньше 180°, вполне определяется некоторый треугольник; эта сумма может сколь угодно мало отличаться от 180°. Если бы в нашем пространстве имела место эта неевклидова геометрия, то мы могли бы, например, все три угла взять равными $59°59'59'',99999$ (так что сумма углов отличалась бы от 180° на $0'',00003$); существовал бы вполне определенный равносторонний треугольник, имеющий эти углы. Сторону этого треугольника можно было бы принять за единицу меры; это была бы «общая», «абсолютная» мера, — как говорит Гаусс, «мера a priori», т. е. устанавливаемая без прямого задания эталона.

Приведем еще несколько строк из другого письма Гаусса, характерных для тех настроений, которые по вопросу о теории параллельных линий сложились в начале XIX в., через 1200 лет после Прокла, так убежденно утверждавшего, что постулат о параллельных надо изъять из числа недоказуемых положений.

В 1816 г. Гаусс поместил в Геттингенском библиографическом журнале[1]) рецензию на две брошюры, посвященные доказательству постулата о параллельных линиях. Рецензия начинается следующими словами:

> «В области математики найдется мало вещей, о которых было бы написано так много, как о пробеле в начале геометрии при обосновании теории параллельных линий. Редко проходит год, в течение которого не появлялась бы новая попытка восполнить этот пробел. И все же, если хотим говорить честно и открыто, то нужно сказать, что по существу мы не ушли в этом вопросе дальше, чем Евклид, за 2000 лет.
>
> Такое откровенное и открытое признание, на наш взгляд, более соответствует достоинству науки, чем тщетные попытки скрыть этот пробел, восполнить который мы не в состоянии бессодержательным сплетением призрачных доказательств».

---

[1]) C. F. Gauss, Besprechung von Schwab (1814) und Metternich (1815). Göttingenische Gelehrte Anzeigen **63** (20 April), 1816.

II

ВЕЛИКИЙ РУССКИЙ УЧЕНЫЙ Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И ЕГО МЕСТО В МИРОВОЙ НАУКЕ

Геометрические знания составили основу всей точной науки, а самобытность геометрии Лобачевского — зарю самостоятельного развития наук в России. Посев научный взойдет для жатвы народной.

Д. И. Менделеев

Телеграмма, посланная Казанскому университету по случаю празднования столетней годовщины со дня рождения Н. И. Лобачевского.

Чем Везалий был для Галена, чем Коперник был для Птолемея, тем был Лобачевский для Евклида. Между Коперником и Лобачевским существует любопытная параллель. Коперник и Лобачевский — оба славяне по происхождению. Каждый из них произвел революцию в научных идеях, воззрениях, и обе эти революции имеют одно и то же значение. Причина их громадного значения заключается в том, что они суть революции в нашем понимании космоса...

В. Клиффорд, Лекции и очерки.

Недавно вся наша страна отмечала сто пятьдесят лет со дня рождения Николая Ивановича Лобачевского [1]), великого русского ученого, гениального творца так называемой неевклидовой геометрии. Это творение представляет собой совершенно новую науку, для которой старая классическая

---

[1]) Лобачевский родился в 1792 г. [*Ред.*]

геометрия служит, правда, краеугольным камнем, но всё же одним только камнем в ее фундаменте. Идеи Лобачевского привели к широкой и многообразной эволюции геометрии, которая до того во всех своих основах казалась наукой, совершенно застывшей в ее древних эллинских формах. Основы геометрии до Лобачевского очень многим мыслителям казались ингерентными — извечно или во всяком случае «от творения» свойственными нашему сознанию, единственно возможными, необходимыми формами нашего мышления, незыблемыми и неизменными, как ниспосланная свыше вечная истина. Творение Лобачевского совершенно разрушило эти идеалистические воззрения. Идеи Лобачевского наложили глубокую печать на все исходные начала и формы строения математики; они проникли в качестве руководящих принципов во все отрасли точного знания — в механику, физику и астрономию; они заняли очень важное, в некоторых основных вопросах — решающее место в философии. Английский математик Клиффорд назвал Лобачевского Коперником геометрии, сравнивая великого геометра с создателем современной гелиоцентрической системы мира. Но не подлежит никакому сомнению, что истины, открытые Лобачевским, были гораздо глубже сокрыты, были более неожиданны; их выявление требовало гения более высокого ранга.

В истории математики, в истории точного знания и философии Лобачевский всегда будет принадлежать к числу величайших основоположников наряду с Архимедом, Галилеем, Коперником и Ньютоном.

Впрочем, трудные для понимания и своеобразные идеи Лобачевского далеко не сразу получили признание. Слова признания и преклонения в среде людей, которым эти идеи могли быть доступны, впервые прозвучали только через полстолетия после того, как они были высказаны Лобачевским.

I

В 1870 г. Г. Гельмгольц, один из крупнейших ученых прошлого века, произнес в Гейдельбергском университете, в собрании всех его преподавателей и ученых, речь на тему «О происхождении и значении геометрических аксиом». Речь начинается следующим вступлением:

> «Тот факт, что может быть построена такого рода наука, как геометрия, издавна привлекал особенное внимание всех, кто имел живой интерес к принципиальным вопросам теории познания. Среди отраслей человеческого знания нет другой, которая, подобно геометрии, казалось бы, явилась перед нами в совершенно законченном, готовом виде, в полном научном вооружении, как Афина-Паллада из головы Зевса, — нет другой, пред эгидой которой так мало решались бы возвысить голос противоречий и сомнений. Геометрии совершенно чужда продолжительная и трудоемкая задача экспериментального накопления новых фактов, которая стоит перед естествознанием в более узком значении этого слова. Единственным методом ее научного продвижения является дедукция: один логический вывод следует за другим, — и всё же ни один человек со здравым рассудком не сомневается в том, что геометрические предложения должны получать чисто практические применения в окружающей нас действительности; землемерие, архитектура, машиностроительное искусство, математическая физика постоянно вычисляют пространственные соотношения различного рода; царит уверенность, что результаты построений и опытов подчиняются этим вычислениям; и до настоящего времени не было случая, чтобы эти ожидания обманули того, кто правильно вел вычисления, располагая для этого точными и достаточными данными» [1]).

Совокупность взглядов, содержащихся в этих вступительных словах, отнюдь не выражает воззрений самого Гельмгольца. Самый тот факт, что наша геометрия

---

[1]) H. Helmholtz, Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. См. Vorträge und Reden, Bd. II, Braunschweig, 1884. Имеется русский перевод этой речи: Г. Гельмгольц, О происхождении геометрических аксиом. СПБ, 1895.

существует, твердо стоит на своей, казалось бы, совершенно непоколебимой базе и в этом своем строении играет такую исключительно важную роль, является фундаментом всего точного знания, — этот факт, указывает Гельмгольц, всегда выдвигался в качестве убедительного и импонирующего примера того, что возможно познание конкретных фактов, не имеющее за собой опытной базы. Отметив, однако, что этот взгляд выдвигают представители идеалистической философии и, в частности, Кант, который в этом цикле вопросов основного значения несомненно проводил идеалистические воззрения, Гельмгольц главной задачей своей лекции ставит опровержение этого взгляда. Сделать это было тем важнее, что вопрос, о котором идет речь, принадлежит к числу основных пунктов расхождения философских систем. Он служил предметом многочисленных дискуссий; в опровержение взглядов Канта и раньше приводились многообразные доводы. Но Гельмгольц не становится на позиции тривиальной уже аргументации, не повторяет старых доводов, которые к тому же не всем казались убедительными. Гельмгольц выступает со специальной целью — выдвинуть совершенно новые мотивы, которые в то время еще очень мало кому были известны и поражали своим своеобразием; это были мотивы, усвоение которых требовало — и еще в настоящее время требует — сосредоточенной и напряженной мысли, смелого ума, способного противостоять самой прочной традиции. Речь шла о новом цельном, развернутом математическом построении, пришедшем из далекой Казани, о творении русского ученого Николая Ивановича Лобачевского. Эти идеи в то время, собственно, уже имели сорокалетнюю давность; но, подавляемые силой эллинской геометрии, которая прочно и безраздельно владела умами, устои которой почитались совершенно незыблемыми, они долго оставались под спудом математического исследования и лишь за два-три года до выступления Гельмгольца получили признание, но тогда всё еще в очень узком кругу математиков. Новая геометрия, созданная Лобачевским и его последователями, проникает в недра точного естествознания гораздо глубже, нежели это было доступно геометрии Евклида. Она и по сей день еще далеко не сказала своего последнего слова; ее многообразные приложения находятся в стадии развития и напряженных исканий. В эпоху, когда Гельмгольц выступил со своим докладом, новая неевклидова геометрия была еще достоянием весьма небольшого круга математиков, но она уже бросила новый, яркий свет на те узловые вопросы философии, которые составляли главный предмет его речи. Сделать идеи Н. И. Лобачевского достоянием более широкого круга научно мыслящих людей и на них обосновать ответ на вопросы, связанные с темой речи, — такова была задача, которую Гельмгольц ставил себе в этом своем выступлении. В печати это была первая статья, имевшая целью популяризацию идей Лобачевского, и притом не только в их математической структуре, но и в философских концепциях, — и она имела успех.

II

«...Геометрия явилась перед нами в совершенно законченном, готовом виде, в полном научном вооружении, как Афина-Паллада из головы Зевса», — так сказано в приведенной выдержке из речи Гельмгольца. Конечно, это только образное выражение, которым пользовались для противопоставления геометрии экспериментальному естествознанию. Геометрия возникла на Востоке — в Ассирии, в Вавилонии, в Индии — в глубокой древности, отвечая на элементарные потребности быта, экономических отношений, зачаточной астрономии, имея своей задачей простейшие измерения на земле и на небе. С азиатского Востока геометрия проникла в Египет, культивировалась там жрецами, перед которыми уже стояли более серьезные измерительные и вычислительные задачи при установлении земельных участков, при восстановлении границ этих участков, смываемых разливом Нила, при возведении больших сооружений, пирамид, при мореплавании. Вычисления, которые делались на основе результатов измерений, первоначально производились на глаз, ощупью и частью приводили к ошибочным результатам. Чтобы их исправить, необходимо было войти в проверку тех начал, на основе которых эти вычисления производились, — обосновать их. Разнообразие объектов и комбинаций, в применении к которым производились вычисления, аналогичные по своему характеру, заставило отвлечь наблюдаемые пространственные соотношения от отдельных объектов, привело к абстракции, к теории. Эта не столь уже младенческая геометрия была воспринята греками; в Ионической и в Пифагорейской философских школах она получила широкое развитие. В стране более высокой культуры, в которой уже развертывалась значительная техника, к геометрии вместе с тем предъявлялись требования в гораздо большем многообразии; в этой стране, с другой стороны, отвлеченная мысль уже стояла на несравненно большей высоте, абстракция шла в геометрии гораздо быстрее. И всё же потребовалось свыше трех столетий (VII—IV вв. до н. э.), чтобы геометрия сложилась в цельную научную дисциплину. Так, вследствие требований повседневной жизни и техники, в ходе общего развития культуры, в течение многих столетий, а не внезапно, «как Афина-Паллада из головы Зевса», возникла и сложилась геометрия. В этом процессе каждое предложение, установленное путем логического вывода, было завоеванием, освобождавшим от ненадежных результатов эксперимента; и с каждым таким завоеванием росла тенденция к синтетическому построению геометрии. В школе Платона (IV столетие до н. э.) тенденция к логическому построению научной дисциплины получила значение руководящего начала философии; геометрия должна была служить для этого ярким образцом. Аристотелем, при всем общем его расхождении с Платоном, в его так называемом теперь «Органоне» была дана для этого общая логическая схема.

Сама геометрия в своей дедукции должна была, конечно, исходить из некоторых начальных положений. По мере того как одно предложение за другим удавалось доказать, логически вывести из более простых предложений, неизбежно оставались такие положения, которые уже доказательству не поддавались, на которых дедукция останавливалась, которые, напротив, приходилось рассматривать как исходные положения этой науки. Эти исходные положения получили у греческих авторов название **аксиом** от греческого слова ἄξιος — достойный (доверия). По схеме Аристотеля всякая дедуктивная наука, и в частности геометрия, должна начинаться с определений тех понятий, которыми она оперирует, и с аксиом; за ними должна следовать непрерывная цепь выводов. Но через тысячу, а может быть и через тысячи лет, протекших от зарождения геометрии на Востоке, до развития, которое она получила в Элладе, в школе Платона и Аристотеля, человек не помнил, — более того, не сознавал, что эти положения лишь выявились из большого числа фактов, накопленных элементарным повседневным опытом. По их простоте, а главное — по тому безусловному доверию, которое они вызывали, их стали присваивать человеческому сознанию как таковому, как неотъемлемые достояния ума; идеалистические установки Платона эту точку зрения утвердили; через две тысячи лет мы ее находим в несколько других выражениях, но по существу в чистом виде у Канта.

Нужно сказать, что Кант отнюдь не был таким безнадежным идеалистом-мистиком, каким был Платон; во многих вопросах он становился на материалистические позиции. Но такова была вера в нерушимость наших представлений о пространстве и времени, что здесь был рубеж, за пределами которого царили неизменные формы эллинской геометрии; в области гносеологии с ними были связаны идеалистические воззрения Канта, которые в первую четверть XIX столетия, когда начала развертываться работа Лобачевского, можно сказать, царили в ученой среде. Они были широко распространены и в России.

Мы вынуждены, однако, возвратиться к эллинской геометрии. Самая установка на синтетическое построение геометрии в виде цепи предложений, последовательно выводимых путем умозаключений, конечно, тоже не беспрецедентно возникла в голове Платона. И она вырабатывалась столетиями, осуществлялась, как уже сказано, в среде пифагорейцев и элеатов, после чего получила выражение в ряде руководств по геометрии. Эти руководства до нас не дошли, немногие из них нам известны по именам их авторов. В Академии Платона было в ходу руководство по геометрии Федия из Магнезии.

После Платона и Аристотеля, в конце IV столетия до н. э., центр эллинской культуры переносится из Афин в Александрию — город, незадолго до того основанный Александром Македонским. Здесь возникла школа неоплатоников, в которой, по традициям Платона, широко культивировалась геометрия. Руководство по геометрии Федия в начале III столетия до н. э. здесь было заменено сочинением, составленным членом этой школы, Евклидом. Это было обширное сочинение в 13 книгах, построенное по общей логической схеме Аристотеля. На русском языке в установившейся номенклатуре оно известно под названием «Начал» Евклида. Это название не вполне правильно передает греческое заглавие «Στοιχεῖα» — слово, которое прежде всего означало «буквы алфавита», а в качестве заголовка сочинения Евклида выражало нечто большее, чем «начала» геометрии: это — основной материал, из которого строится вся математика, подобно тому как слова в письме складываются из букв. «Начала» Евклида — весьма замечательное сочинение, по существу компилятивное, в составление которого, однако, вложено очень много глубокой самостоятельной мысли. Евклид изложил в своем сочинении весь основной массив греческой геометрии. Кроме того, три книги (VII—IX) содержат более или менее связанный с геометрией материал из области учения о числе, одна (X) посвящена общей теории иррациональных величин.

«Начала» поражают силой логической концепции. Эта — та непрерывная цепь на первый взгляд, безупречных умозаключений, о которой, выражая общее признание, говорит Гельмгольц в приведенной выше цитате. «Начала» Евклида оставили далеко позади и вытеснили все руководства по геометрии, составленные до них. «Начала» дошли до эпохи Возрождения в различных греческих списках, не вполне тождественных, и в арабских переводах, еще более отличавшихся один от другого. С арабского был в XIII столетии сделан первый латинский перевод «Начал». В конце XV столетия он появляется в печати — это было первое серьезное печатное сочинение по математике. С середины XVI столетия, в связи с развитием книгопечатания, с одной стороны, и с ростом образования и научных исследований — с другой, появляются новые печатные издания «Начал», число которых очень быстро возрастает. Они выходят сначала на греческом языке и в латинском переводе, а затем на национальных языках читателей и учащихся[1]).

Несмотря на далеко не легкое изложение, «Начала» безраздельно овладевают школой и до конца XVIII столетия остаются, можно сказать, единственным источником основ геометрического познания. Установленный в «Началах» геометрический материал получил всеобщее признание. Знаменитый итальянский математик Кардано (XVI столетие) в следующих словах выражает свое восхищение «Началами» Евклида: «Неоспоримая сила их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что никакое другое сочинение по справедливости нельзя с ними сравнивать. Вследствие этого в них отражается такой свет истины, что, повидимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида». Через триста лет, в середине XIX столетия, английский геометр Де Морган писал: «Никогда не было системы геометрии, которая в существенных чертах отличалась бы от плана Евклида, и до тех пор, пока я этого не увижу собственными глазами, я не поверю, что такая система может существовать». Так веками поддерживалась вера в непререкаемые достоинства Евклида по

[1]) На русском языке выпущено пять изданий «Начал». Из них первые три появились еще в XVIII столетии в переводах, сделанных с латинского текста. Первое русское издание было выпущено в 1739 г.; перевод был сделан хирургом И. Татаровым. В 1819 г. появился прекрасный перевод Ф. Петрушевского, сделанный уже с греческого оригинала. Это издание отнюдь не уступает западным переводам. Наконец, в 1880 г. профессор Киевского университета Н. Е. Ващенко-Захарченко опубликовал новый перевод «Начал». В 1948—1950 гг. Гостехиздат выпустил новое издание «Начал» в трех томах, подготовленное профессором Д. Д. Мордухай-Болтовским.

существу содержания, по общей системе построения «Начал». Геометрия Евклида признавалась самым незыблемым творением научной мысли, и общее впечатление, которое выносил каждый, кто был в состоянии усвоить «Начала», это подтверждало.

При всем том математики, которые глубже вникали в содержание «Начал», подвергали тщательному анализу каждое отдельное предложение, оценивая его не только с точки зрения его содержания, но и с точки зрения выдержанности логической концепции, были склонны к критике. Конкурировать с Евклидом, написать новые начала геометрии в течение многих веков не решался никто; но в критике общей постановки и отдельных его рассуждений не было недостатка. Издатели «Начал» обыкновенно сопровождали их многочисленными примечаниями, одни из которых имели целью лучше пояснить мысль Евклида, другие предлагали более простые доказательства, а часто выявляли слабые стороны сочинения, его недостатки, — Евклида комментировали. Комментаторы в своих изданиях присоединяли к тексту «схолии» — замечания, которые то помещались на полях манускрипта, то включались в текст сочинения. Эти схолии обычно переходили из одного издания в другое; их накопилось очень много: современный издатель «Начал» Гейберг приводит свыше 1500 зарегистрированных схолий.

В чем же заключались слабые стороны «Начал», которые выдвигали комментаторы? Одни указывали недостаточность рассуждения Евклида в том или другом случае; эти указания часто были справедливы, но дефекты легко выправлялись. Другие указывали, что доказательства Евклида часто не представляют собой строго логического вывода, как этого требовали Платон и Аристотель. Внимательный анализ обнаруживал, что в «Началах» умозаключение часто подменяется интуицией, указаниями наглядных представлений, соображениями, основанными на очевидности, т. е. на ощущениях глаза. Всякий, кто учился геометрии, конечно, припомнит, как часто ему помогал чертеж — помогал своей наглядностью, а не логически установленными признаками. Такого рода соображения, основанные на наглядной очевидности, в рассуждениях Евклида настолько обильны, что «цепь логических выводов» нарушается на каждом шагу. «Начала» должны быть признаны пестрой смесью логики и интуиции. Это не вызывало никакого недоверия к справедливости результатов, потому что рассуждения, основанные на наглядности, здесь особенно убедительны и не вызывают сомнений. Но читателя, требовавшего совершенно строгого логического вывода, они не удовлетворяли. Где же все-таки коренится источник этой логической невыдержанности? Без сомнения, он коренится в слабости той исходной базы, на которой покоится все построение «Начал».

Следуя схеме Аристотеля, Евклид начинает свое сочинение с определения тех понятий (тех объектов), которыми геометрия оперирует (точка, линия, прямая, поверхность, плоскость и т. д.), и с аксиом, составляющих исходные ее положения. Всякий учившийся геометрии знает аксиомы Евклида. Одни из них относятся к любым величинам, например: «две величины, порознь равные третьей, равны между собой»; «если к равным придать равные или от равных отнять равные, то получим равные». Другие аксиомы носят чисто геометрический характер: «через всякие две точки проходит прямая (и притом только одна)»; «конечную прямую (прямолинейный отрезок) можно неограниченно продолжить в обе стороны». Аксиомы второго рода Евклид называет *постулатами*. Мы не можем здесь разбирать причины этого различения, как не можем приводить весь список аксиом и постулатов Евклида[1]) и входить в обстоятельный их разбор. Существенно то, что именно на критике исходных определений, аксиом и постулатов Евклида было главным образом сосредоточено внимание комментаторов. Благодаря их анализу стало совершенно ясно, что этот фундамент слаб, что крепкое здание геометрии поддерживается еще

[1]) Этот список приведен в очерке «Учение о параллельных линиях до создания неевклидовой геометрии» (стр. 23—24 этой книги). [*Ред.*]

другими основаниями, не получившими выражения в определениях и аксиоматике Евклида.

Достаточно привести первые два-три определения Евклида, чтобы это стало совершенно ясным.

> «Определение 1. Точка есть то, что не имеет частей (дословно по Евклиду: точка есть то, часть чего есть ничто).
>
> Определение 2. Линия есть длина без ширины (что же есть длина? Можно ли говорить о длине, не установив предварительно, что такое линия?).
>
> Определение 3. Концы линии суть точки».

У комментаторов Евклида прежде всего возникает стремление эти дефекты исправить, укрепить опорные камни, на которых покоится геометрия, добавить новые. Комментаторы строго критиковали исходные определения Евклида, но очень редко заменяли их более удачными, более надежными. Они не без основания исключали одни аксиомы, иногда не без основания включали другие; но ничего сколько-нибудь существенного они в систему Евклида не внесли. Комментаторы Евклида выявили, что его «Начала» еще очень далеки от той совершенной дедукции, которую им приписывали, которой требовал Платон; в этом была главная заслуга комментаторов. Вера в совершенство «Начал» была поколеблена.

> «Евклидовы начала, — говорит Лобачевский в первом своем мемуаре по геометрии, — несмотря на глубокую древность их, несмотря на все блистательные успехи наши в математике, сохранили до сих пор первобытные свои недостатки. В самом деле, кто не согласится, что никакая математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию» [1]).

[1]) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1946, стр. 185. [*Ред.*]

И далее:

> «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами; врожденным — не должно верить»[1]).

Однако к этому твердому убеждению Лобачевского привели не обычные соображения эмпиристов. Он пришел к нему путем, связанным с теми глубокими идеями, которые составили предмет его собственного гениального творчества.

III

Один из постулатов Евклида, занимающий в его перечне последнее (пятое) место, привлекал исключительное внимание комментаторов — это так называемый *постулат о параллельных линиях*. Он также хорошо известен всякому, кто учился хотя бы началам геометрии. Евклид, руководясь предложением, в котором этот постулат получает первое применение, дает ему несколько тяжеловесное выражение[2]). В наших учебниках этот постулат обыкновенно приводят в эквивалентной, но более простой форме: *через точку C, лежащую вне данной прямой AB, проходит только одна параллельная ей прямая* (т. е. прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой и не пересекающая ее). Следующие соображения выясняют, в каком контексте этот постулат появляется.

Из точки C (рис. 1) опустим на прямую AB перпендикуляр CD, а затем в плоскости, содержащей прямую AB и точку C, проводим к прямой CD перпендикуляр CE; последний не встречает прямой AB, ибо из точки их

---

1) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1946, стр. 186. [*Ред.*]

2) Точная формулировка V постулата, данная Евклидом, приведена на стр. 23 этой книги. [*Ред.*]

встречи, если бы таковая существовала, выходили бы два перпендикуляра к одной прямой CD; но это, как доказано значительно раньше, не может иметь места. В соответствии с обычными определениями, пришедшими к нам от Евклида, можно сказать, что через точку C проходит прямая CE, параллельная AB. Возникает, однако, вопрос, нельзя ли в той же плоскости ABC через точку C провести, кроме CE, еще какую-либо другую прямую, также не встречающую прямой AB, также параллельную ей. Созерцание — глаз — дает на это явно отрицательный ответ. Следуя указанию глаза, это первоначально, повидимому, безоговорочно принималось; но затем, по мере того как в ходе развития геометрии крепла тенденция к логическому обоснованию ее предложений, к сведéнию исходных положений к возможному минимуму, естественно возникло стремление доказать это утверждение, т. е. вывести его из установленных уже ранее предложений. Это было тем естественнее, что предложение, о котором идет речь, появляется у Евклида довольно поздно, в продвинутых уже началах геометрии. А между тем по своему содержанию оно как будто не принадлежит к числу тех элементарных фактов, которые с таким легким сердцем включались в первые аксиомы и постулаты. Не может подлежать сомнению, что попытками доказать это предложение занимались еще до Евклида. Так как эти попытки успеха не имели, то Евклид решил от них отказаться и включил это положение в число постулатов, т. е. принял его как допущение без доказательства. Однако те, которые штудировали «Начала», переиздавали и комментировали Евклида, с этим очень часто не соглашались, считали недопустимым помириться, вновь выражаясь словами Лобачевского, «с таким важным пробелом в теории параллельных линий». В связи с этим очень рано возродились попытки доказать постулат о параллельных линиях, т. е.

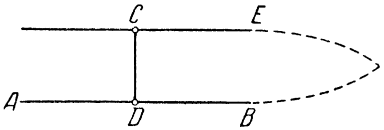

Рис. 1.

логически вывести его из остальных предшествующих ему аксиом и постулатов. Такое стремление стимулировалось особенностями этого постулата. Многие находили, что содержащееся в нем утверждение — далеко не та элементарная истина, какие мы привыкли называть аксиомами. Но гораздо важнее то обстоятельство, что надобность в этом постулате, как уже сказано выше, появляется в «Началах» довольно поздно, в 29-м предложении. Между тем, все другие аксиомы и постулаты находили себе применение в первых же предложениях. К тому же в «Началах», кроме первых 28 теорем, есть еще очень много других предложений, которые могут быть доказаны без помощи постулата о параллельных линиях. Геометрический материал, таким образом, разбивается на две части. Значительная часть этого материала совершенно не зависит от постулата о параллельных линиях, т. е. может быть построена без его помощи; сюда относятся учение об углах (смежных и вертикальных), условия равенства треугольников, теорема о внешнем угле треугольника (в той ее формулировке, что внешний угол больше каждого из внутренних с ним не смежных углов), соотношения между сторонами и углами треугольника, свойства перпендикуляра и наклонных к данной прямой, выходящих из общей точки, учение о хордах и касательных круга, о пересечении и касании окружностей; сюда относится и ряд предложений стереометрии. Весь этот материал теперь обычно, может быть не очень удачно, называют *абсолютной геометрией*. Остальная часть геометрии доказывается при помощи V постулата и притом так тесно с ним связана, что ни одно из предложений, входящих в эту часть, не может быть доказано без его помощи. Подобно тому как постулат о параллельных линиях принято преимущественно называть *постулатом Евклида*, эту вторую часть геометрии называют в настоящее время *собственно евклидовой геометрией*. В ее состав входит теорема о том, что сумма углов треугольника равна $2d$, учение о пропорциональных линиях, о подобии треугольников и многоугольников, теорема Пифагора и ее следствия, теория площадей и объемов. Эта своеобразная роль, которую играет V постулат Евклида, и была причиной того, что стремление «доказать постулат» охватило широкие круги математиков. Трудно себе представить, сколько сил на это было затрачено. Правда, доказательством постулата Евклида занимались, и даже по сей день занимаются, многие, не имеющие не только следа геометрического дарования, но даже серьезных знаний. Но вместе с тем в течение двух тысяч лет — от Птолемея до Лежандра — вряд ли можно указать выдающегося геометра, который не испытал бы своих сил на этой неблагодарной задаче, не попытался бы завоевать эту неприступную крепость. Эта задача часто совершенно овладевала математиком, отвлекала от остальных вопросов математики, нередко доводила до потери рассудка. Многим казалось, что они уже достигли цели; некоторые из предложенных доказательств действительно отличались исключительным остроумием. Но тщательный анализ неизменно обнаруживал ошибку, иногда глубоко скрытую. Чаще всего дефект заключался в том, что автор заменял постулат другим допущением, явно или неявно опирался на положение, эквивалентное доказываемому постулату. Так, комментатор «Начал» Прокл (VI столетие н. э.) доказывает постулат, принимая, что расстояние между двумя параллельными линиями всегда ограничено; между тем, это допущение совершенно эквивалентно постулату о параллельных линиях. Известный математик XVII столетия Валлис допускает, что, какой бы ни был задан треугольник, можно в любом масштабе построить треугольник, ему подобный; между тем, достаточно допустить существование каких-либо двух подобных треугольников, чтобы отсюда вывести постулат о параллельных линиях, а вместе с тем и всю евклидову геометрию. Уже в 1763 г. Клюгель опубликовал в Геттингене разбор наиболее значительных доказательств постулата, появившихся до того времени в печати, и показал, что ни одно из них не выдерживает критики. Но поток доказательств этим отнюдь не был остановлен.

К доказательству постулата подходили с различных сторон и различными путями. Один из этих путей шел через связь между постулатом о параллельных линиях и суммой углов треугольника. Теорема о том, что сумма внутренних углов треугольника равна $2d$, как уже отмечено выше, принадлежит собственно евклидовой геометрии, т. е. всегда доказывается средствами, которые так или иначе опираются на постулат о параллельных линиях. Уже в XIII столетии арабский математик Насир-Эддин ат-Туси показал, что постулат о параллельных линиях можно было бы строго доказать, если бы было возможно к этому придти обратным путем, именно, если бы удалось средствами абсолютной геометрии, т. е., не пользуясь постулатом о параллельных линиях, установить, что сумма внутренних углов треугольника равна $2d$, то, опираясь на это предложение, можно было бы безукоризненно доказать постулат. Этим путем, в несколько различных его разновидностях, независимо друг от друга, шли три геометра: в первой половине XVIII столетия иезуит Саккери в Италии, во второй половине того же столетия философ и математик Ламберт в Германии[1]), в начале XIX столетия знаменитый французский геометр Лежандр. Все трое ставили своей задачей доказать, не опираясь на постулат о параллельных линиях, теорему о сумме углов треугольника. A priori здесь ведь возможны только три предположения — три гипотезы: либо сумма углов треугольника равна $2d$, либо она больше $2d$, либо она меньше $2d$. Эти три предположения совершенно исключают друг друга, потому что каждое из них, сделанное для какого-либо одного треугольника, как оказывается, неизбежно распространяется на все другие треугольники. Это значит, если допустить, скажем, что в одном треугольнике сумма углов меньше $2d$, то можно строго доказать, что она меньше $2d$ и во всяком другом треугольнике. Таким образом, чтобы обнаружить, что сумма углов треугольника равна $2d$, нужно устранить две другие гипотезы. И вот устранить вторую из них, т. е. показать, что сумма углов в треугольнике не может

[1]) О Саккери и Ламберте см. в очерке «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров» на стр. 158—164 этой книги. [*Ред.*]

превысить $2d$, всем трем названным геометрам удалось без труда. Но доказать, не опираясь на постулат о параллельных линиях, что сумма углов треугольника не может быть меньше $2d$, ни одному из них не удалось. И Саккери и Лежандр допустили здесь ошибки, и только Ламберт не впал в заблуждение: указывая трудности, которые связаны с третьей гипотезой, он признал их для себя непреодолимыми.

> «Доказательства евклидова постулата,— говорит он,— могут быть доведены столь далеко, что остается, повидимому, ничтожная мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат».

IV

Метод, которым пользовались почти все авторы, пытавшиеся освободить геометрию от постулата о параллельных линиях, заключался в доказательстве от противного: исходили из допущения, противоположного постулату, с целью придти к противоречию с установленными уже предложениями и тем доказать постулат. Так, все три упомянутых выше автора, пытавшиеся доказать средствами абсолютной геометрии, что сумма углов в треугольнике равна $2d$, исходили из допущения, что она меньше $2d$. Из этого допущения, как обычно при доказательствах от противного, делались выводы, которые должны были привести к противоречию с абсолютной геометрией. Но, в то время как такого рода доказательства обычно очень быстро приводят к противоречию, допущение, из которого исходили Саккери и Ламберт,— что сумма углов в треугольнике меньше $2d$,— к такому противоречию не вело. Саккери выводит из сделанного допущения около 40 теорем, из которых две приводят к кажущемуся противоречию с предыдущими предложениями; но при тщательном анализе оказывается, что и здесь противоречия нет. Ламберт также ведет такие выводы довольно далеко, но, как уже сказано, к логическому противоречию не приходит. Наоборот, Ламберта поражает стройность выводов, к которым он приходит.

> «В этом,— замечает он, — есть нечто восхитительное, что вызывает даже желание, чтобы третья гипотеза (т. е. допущение, что сумма углов прямолинейного треугольника меньше $2d$) была справедлива».

Эти выводы в действительности представляли собой первые, несознательные шаги в область так называемой неевклидовой геометрии, шаги еще неуверенные, недалеко идущие; а главное, все эти геометры совершенно не сознавали того, что третья гипотеза действительно может быть принята. Авторы были беспомощны перед полученными ими результатами.

Эти результаты не приводят к логическому противоречию с установленными ранее предложениями, но они приводят к разительному противоречию с нашими представлениями, с тем, что доступно глазу. Так, и Саккери и Ламберт уже хорошо знали, что при третьей гипотезе расстояние между двумя перпендикулярами, проведенными в плоскости к одной и той же прямой, не только не может оставаться постоянным на всем их протяжении, но должно неограниченно возрастать по мере удаления от общего перпендикуляра. Таких примеров у них уже было немало.

Где источник этого расхождения, где причина того, что все усилия доказать V постулат Евклида не привели к цели? В начале XIX столетия, главным образом после неудачи исканий Лежандра, одного из самых выдающихся геометров того времени, этот вопрос стал очень остро. С одной стороны, люди, затратившие много сил и времени на бесплодные попытки доказать постулат, впадали в отчаяние и в суеверный агностицизм. Это ярко выражено в следующем отрывке письма венгерского профессора Фаркаша Больаи, которое он написал своему сыну Яношу, когда узнал, что тот увлечен задачей о параллельных линиях.

«Молю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий; ты затратишь на это всё свое время, а предложения этого вы не докажете все вместе. Не пытайся одолеть теорию параллельных линий ни тем способом, который ты сообщаешь мне, ни каким-либо другим. Я изучил все пути до конца; я не встретил ни одной идеи, которой бы я не разрабатывал. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил. Ради бога, молю тебя, оставь эту материю, страшись ее не меньше, нежели чувственных увлечений, потому что и она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни».

Таким отчаянием были проникнуты настроения человека, всю жизнь работавшего над этой проблемой. Но ему все-таки не удалось убедить своего сына отказаться от попыток доказать постулат о параллельных линиях. И это потому, что Янош принадлежал к числу немногих людей тонкой математической мысли, которые приходили к заключению, что постулат о параллельных линиях вовсе нельзя доказать, что отрицание его не ведет к противоречию, а напротив того, в своем развитии приводит к своеобразной геометрической системе, отличной от геометрии Евклида.

Новое учение, получившее название *неевклидовой геометрии*, впервые было опубликовано Н. И. Лобачевским в 1829 г., а еще тремя годами ранее, 23 февраля 1826 г. (по старому стилю — 11/II), доложено им физико-математическому отделению Казанского университета. Позднее, из опубликованной переписки Гаусса с друзьями выяснилось, что Гаусс уже владел основами неевклидовой геометрии и разработал их, как он выражается, «для самого себя». Но оставшиеся в его литературном наследии наброски свидетельствуют о том, что это были только первые, элементарные шаги, которые не идут ни в какое сравнение с творениями Лобачевского. Это хорошо сознавал и сам Гаусс. Он познакомился с работой Лобачевского по небольшой брошюре, опубликованной на немецком языке, и заинтересовался ею настолько, что изучил русский язык, чтобы познакомиться со всеми работами Лобачевского. В очень ярких выражениях он отзывался о них в письмах к своим друзьям. Но с прозорливостью ученого Гаусс соединял чрезвычайную осторожность практического человека. Он отдавал себе ясный отчет в том, что эти идеи, несущие глубокий переворот в наиболее установившихся воззрениях, вызовут бурю негодования, которая обрушится на их провозвестников. Гаусс принял поэтому твердое решение не опубликовывать свои взгляды на основания геометрии и обязывал тех немногих людей, с которыми он этими воззрениями делился, хранить их в безусловной тайне. Своему решению он оставался верен до конца жизни и этим доводил до отчаяния тех, кто в этих вопросах нуждался в его поддержке. Так, молодой математик Тауринус опубликовал две работы о параллельных линиях, в которых можно было видеть проблески тех же идей[1]). В предисловии к последней своей брошюре Тауринус высказал мысль, что математикам следовало бы просить Гаусса опубликовать свои взгляды на основания геометрии. Гаусс прекратил с ним какие бы то ни было сношения. Тауринус дошел до глубокого отчаяния и сжег свою рукопись.

Через три года после Лобачевского Янош Больаи, молодой венгерский ученый, о котором мы выше уже упоминали, опубликовал небольшое, но замечательное сочинение, в котором также были заложены первые начала неевклидовой геометрии, очень тщательно разработанные. Он послал свою брошюру Гауссу, который в письмах к друзьям также дал о ней благоприятный отзыв. Но поддержки автору Гаусс и в этом случае не оказал, и талантливый ученый также окончил свою жизнь в состоянии, близком к умопомешательству. Янош считал, что Гаусс хочет похитить у него приоритет. Приоритет, однако, Яношу не принадлежал, потому что за три года до него новое

---

[1]) О Тауринусе см. в очерке «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров» на стр. 154—156 этой книги. [*Ред.*]

учение было опубликовано Н. И. Лобачевским в гораздо более развернутом и углубленном виде.

Н. И. Лобачевский не убоялся нареканий, которые вызовут его идеи, и смело их опубликовал. Не только не встретив признания, но жестоко осмеянный, он все же не сжег своих произведений и не впал в отчаяние. Развертывая свои исследования, Лобачевский в ряде мемуаров расширил и углубил полученные им ранее результаты и развил их настолько, что в фактическом материале созданной им геометрии немного что оставалось добавить.

V

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (по старому стилю — 20 ноября) 1792 г. в Нижнем-Новгороде [1]). Об его отце мы располагаем очень скудными сведениями: он был мелким чиновником, повидимому, уездным землемером; семья с трудом перебивалась. «Бедность и лишения окружали колыбель Николая Ивановича»,— рассказывает первый биограф Лобачевского Э. П. Янишевский [2]). Семья по линии матери состояла в родстве (или свойстве) с неким капитаном С. С. Шебаршиным, оказывавшим ей поддержку; Шебаршин даже называл детей Лобачевских своими воспитанниками, но в 1797 г. он скончался, и жизнь семьи стала еще тягостнее. Повидимому, вскоре после этого мать Лобачевского, Прасковья Ивановна Лобачевская, переехала в Казань, вероятно, для того, чтобы дать своим детям, Александру, Николаю и Алексею образование. Это тем более вероятно, что в 1798 г. была восстановлена Казанская гимназия, открытая еще в 1759 г., но в 1788 г. прекратившая было свое существование. Прасковье Ивановне удалось определить в гимназию всех трех своих сыновей; Николай был зачислен в 1802 г. В 1805 г. фактически при гимназии был открыт Казанский университет. Дирек-

1) Место и время рождения Лобачевского только в настоящее время можно считать точно установленными по метрическим записям Алексеевской церкви города Нижний-Новгород.

2) Э. П. Янишевский, Историческая записка о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского. Казань, 1868.

тор гимназии И. Ф. Яковкин был назначен профессором и инспектором университета; один из преподавателей гимназии, П. Ф. Цеплин, тоже был назначен профессором, четыре других — адъюнктами (доцентами) университета. Среди последних был Г. И. Карташевский, образованный математик, прекрасный педагог и очень отзывчивый человек. Карташевский, несомненно, имел большое влияние на Лобачевского, когда тот еще учился в гимназии. Лобачевский поступил в университет с такой подготовкой по математике, которая и в наше время была бы признана очень хорошей; она дала ему возможность очень быстро приобрести углубленное образование в области точных наук.

Приступая к своей деятельности, совет университета обратился к родителям старших воспитанников гимназии с предложением определить своих детей после окончания гимназии в университет на казенное содержание, что обязывало их после окончания университета провести шесть лет на педагогический службе. П. И. Лобачевская с благодарностью приняла это предложение для своих сыновей. Николай был зачислен студентом университета в феврале 1807 г. С этого времени и до конца дней его жизнь была тесно связана с Казанским университетом.

Попечителем Казанского учебного округа, в полном подчинении которому фактически находился университет, в то время состоял С. Я. Румовский, человек просвещенный, известный астроном, очень благожелательно относившийся к университету. Этот ответственный пост он занял, когда ему уже шел восьмой десяток; самостоятельностью в своей административной деятельности он отнюдь не отличался; живя сам в Петербурге, он всецело доверял Яковкину, карьеристу и самодуру, третировавшему преподавателей, особенно тех, которые в чем-либо стояли к нему в оппозиции. Разумеется, что при первоначальном составе преподавателей организовать факультеты, поставить в них преподавание и вообще организовать жизнь университета в соответствии с его уставом было невозможно. Этого нельзя было сделать и в следующем году, когда число преподавателей достигло четырнадцати. Не располагая научными силами, самовластно управляемый инспектором Яковкиным вопреки уставу, университет влачил жалкое существование. Чтобы его оживить, нужно было прежде всего организовать компетентный состав преподавателей; это хорошо понимали и в управлении округа и в министерстве. По условиям того времени выход заключался только в том, чтобы пригласить профессоров из-за границы. Это и было сделано в ближайшие годы. Далеко не все приглашенные лица оказались при этом на высоте положения — далеко не все они в трудных условиях своей работы в Казани отдали молодому университету то внимание и те силы, на которые он был вправе претендовать. Но не подлежит сомнению, что в состав физико-математического факультета были приглашены вполне достойные люди. Может быть, это произошло благодаря тому, что именно эти ученые были Румовскому как астроному лучше известны. Это были: М. Ф. Бартельс (по кафедре чистой математики), Ф. К. Броннер (по физике), И. А. Литтров (по астрономии) и К. Ф. Реннер (по прикладной математике). «Преподавание физико-математических наук, — писал известный лейпцигский профессор Энгель, — было в то время поставлено в Казани не хуже, чем в любом германском университете».

Как уже указано выше, еще в гимназии юный Лобачевский благодаря преподаванию Карташевского серьезно заинтересовался математикой. Но, когда он поступил в университет, Карташевский по проискам Яковкина был уже уволен и должен был даже оставить Казань. Новых же иностранных профессоров на физико-математическом факультете еще не было; учиться математике было не у кого. Следуя, повидимому, желанию матери, Лобачевский начал заниматься медициной. Но уже в январе 1808 г. приехал Бартельс, а в сентябре прибыл и Реннер. Бартельс был высокообразованный математик и выдающийся педагог. В Казанском университете его превозносили еще задолго до его прибытия; еще в 1806 г. он был избран почетным членом университета. Его встретили радушно и почтительно; студенты, интересовавшиеся математикой, поступили под его руководство; Н. И. Лобачевский оставил медицину и целиком отдался занятиям математикой. Учитель и ученик подошли друг к другу. Бартельс занимался с Лобачевским на дому, проработал с ним большую и трудную классическую литературу. Лобачевский работал с огромным энтузиазмом. Нужно поражаться тому огромному материалу, которым он овладел в первые два-три года. Не подлежит сомнению, что глубиной и разносторонностью математического образования, точностью математической мысли Лобачевский был в большой мере обязан Бартельсу.

Литтров и Броннер также оказали на образование Лобачевского большое влияние. Кроме математики, он настолько овладел также физикой и астрономией, что вскоре после окончания университета был в состоянии преподавать эти науки; позже в различное время он даже занимал кафедры физики и астрономии.

> «Если полного одобрения заслуживали математические успехи Лобачевского,—рассказывает Н. П. Загоскин в своей обширной „Истории Казанского университета“,—то в совершенно ином виде представлялось в глазах университетского начальства его поведение, доставлявшее немало забот и огорчений чинам инспекции; донесения инспекции и записи инспекторских журналов того времени характеризуют Лобачевского юношей „упрямым“, „нераскаянным“, „весьма много о себе мечтательным“, „проявляющим даже признаки безбожия“» [1]).

За эти проступки Лобачевский неоднократно подвергался различным взысканиям, аресту в карцере, занесению на черную доску, публичному выговору, запрещению отпусков. Это было время, когда в передовой русской молодежи получили широкое распространение настроения, представлявшие еще отзвук французской революции и

[1]) Н. П. Загоскин, История Казанского университета, т. I, стр. 303.

связанных с нею прогрессивных течений в Европе. А в противовес им поднималась волна реакции, характеризующая вторую половину царствования императора Александра I. Университеты считались очагами противоправительственных настроений; за студентами был установлен строгий надзор, а «высочайшим повелением» от 8 мая 1811 г. (по старому стилю) университетскому начальству предписывалось студентов, уличенных в важных преступлениях, исключать из университета и сдавать в солдаты. Помощник инспектора П. С. Кондырев, угодливый карьерист, писал даже в своем донесении, что Николай Лобачевский обнаружил явные признаки безбожия. Это обвинение в то время имело очень угрожающий характер. Против Лобачевского было возбуждено дело, восходившее к попечителю и грозившее применением высочайшего повеления. И нужно сказать, что были члены совета, поддерживавшие это преследование. Лишь энергичная поддержка Бартельса, Броннера и нескольких других профессоров спасла Лобачевского от грозившей ему участи.

Когда это дело затихло, Лобачевский был произведен в магистры. Магистрами в то время назывались молодые люди, которые оставлялись при университете для подготовления к профессорскому званию (как в настоящее время аспиранты). Вместе с Лобачевским в магистры был произведен И. М. Симонов; он не достиг потом, конечно, славы Лобачевского, но занял видное место в истории русской астрономии. Оба молодых человека были поручены ближайшему руководству Бартельса. Вот что сообщал этот руководитель совету университета в середине 1812 г.:

> «Как Вам, высокопочтимые и славные мужи, известно, я в начале настоящего учебного года принял на себя обязанность руководить углубленным образованием гг. магистров Лобачевского и Симонова и представить Вам отчет об их занятиях. Я с тем большей охотой представляю этот отчет, что счастлив успехом своей работы. В моих приватных знаниях с ними я разъяснял им большую часть первого и

значительную часть второго тома замечательного сочинения, автором которого является преславный Лаплас; наши магистры не только занимались этим с замечательным прилежанием, но, где возможно, старались самостоятельно продвинуться в вопросе. Их разработки вопросов небесной механики прилагаю к настоящему отчету и полагаю, что они подтвердят сказанное выше».

К сожалению, это приложение к отчету не сохранилось.

В 1814 г. Лобачевский был произведен в адъюнкты (по современной терминологии — доценты) университета.

Хотя число преподавателей значительно возросло, университет все еще, строго говоря, не был высшим учебным заведением; его жизнь совершенно не соответствовала уставу. В 1814 г. произошло «полное открытие университета», перешедшего на устав, который предусматривала «утвердительная грамота» 1804 г. Советом был выбран ректор и основные органы управления университетом. Началась более широкая, сравнительно свободная жизнь университета. На короткое, правда, время он принял нормальный облик высшего учебного заведения. Преподавательская деятельность значительно возросла; Н. И. Лобачевский принял в ней участие. Ему было только 22 года; задачи преподавания в то время поглотили все его внимание. Через два года он был избран профессором. Однако, как уже сказано, сравнительно спокойная жизнь Казанского университета продолжалась недолго. Общая реакция в стране, окрепшая после заключения так называемого «Священного союза», усиливалась с каждым днем и, как это всегда бывает, в делах просвещения действовала с особенной силой. Во главе министерства «духовных дел и просвещения» теперь стоял крайний реакционер князь А. Н. Голицын.

Правой рукой Голицына был М. Л. Магницкий, бывший прежде приверженцем и сотрудником Сперанского, ренегат и предатель, разнузданная реакционная деятельность которого не знала удержу [1]); в 1819 г. ему было поручено произвести ревизию университета. Составленный им отчет представлял собой отвратительную смесь извращенных фактов, инсинуаций и клеветы и заканчивался предложением подвергнуть Казанский университет «публичному уничтожению». Это предложение не было одобрено, но Магницкий был назначен попечителем Казанского учебного округа, и ему было поручено твердой рукой привести университет в должный порядок и устройство. Магницкий выполнил это с усердием, которое ему позже дорого обошлось. Девять профессоров были уволены, иностранные профессора покинули Россию. Казанский университет погрузился в атмосферу лицемерия, фарисейства и мистицизма.

На физико-математическом факультете дела сложились особенно неблагоприятно. Бартельс и Броннер уехали в 1820 г., Литтров еще раньше, а Реннер умер еще в 1816 г. Почти вся ответственная работа по преподаванию математики и физики легла на плечи молодого Лобачевского. Естественно, что на первых порах она поглотила все его силы. И в этом была хорошая сторона: увлеченный большой текущей педагогической работой, Лобачевский имел возможность в большой мере устраниться от внутренней жизни университета, требовавшей ханжества и раболепия. Даже Магницкий в своих отчетах отзывался с похвалой о преподавании Лобачевского. Это, однако, не помешало обострению их отношений.

VI

Бартельс, который руководил подготовкой Лобачевского, был человек широкого математического образования; под его руководством разностороннее образование приобрел и Лобачевский, но значительного творчества Бартельс

[1]) См. П. Н. Булич, Очерки по истории русской науки и просвещения, СПБ, ч. I, 1902; ч. II, 1905. Е. Феоктистов, Материалы по истории просвещения в России, I (Магницкий). СПБ, 1865.

сам не проявил, не ввел и Лобачевского в тематику современного ему научного исследования. Лобачевский должен был искать себе тему сам, оставленный в полном одиночестве, в очень большом удалении от европейских центров математической мысли.

Один из курсов, которые Лобачевский читал для начинающих студентов, носил бы в современной нам терминологии название «Элементарная геометрия с высшей точки зрения». Курс имел назначение осветить серьезнее, чем это делается в школе, основные, руководящие идеи элементарной геометрии. В основном Лобачевский следовал плану, который был намечен Даламбером в статье «Элементы математики», помещенной в знаменитой французской «Энциклопедии». Краткое изложение этого курса Лобачевский в 1823 г. представил к напечатанию под названием «Геометрия». Магницкий его отклонил вследствие неблагоприятного отзыва академика Фусса. Препровождая Фуссу рукопись, Магницкий не назвал автора и изобразил дело так, что книга должна служить школьным учебником. Для этой цели она действительно не подходила. Но Фусс обрушивается на автора и за то, что он вносит идеи, порожденные французской революцией, — например, метрические меры, центезимальное деление угла и т. п., — за идеи, возникшие в то время, «когда бешенство нации уничтожить всё прежде бывшее распространялось даже до календаря и деления круга».

В напечатании рукописи Лобачевскому было отказано. Она долгое время считалась вовсе утраченной, но в 1898 г. Н. П. Загоскину удалось открыть ее в архиве канцелярии попечителя Казанского учебного округа [1]).

Излагая в своем сочинении руководящие идеи элементарной геометрии, Лобачевский не мог, конечно, не остановиться на постулате о параллельных линиях. С этого постулата начинается VI глава «Геометрии». Приведя его текст, Лобачевский прибавляет:

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Геометрия. Полное собрание сочинений, т. II, М. — Л., 1948.

«Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами» [1]).

Повидимому, размышления, связанные с этим курсом, привлекли внимание Лобачевского к теории параллельных линий. Из приведенной выше цитаты видно, что в 1823 г. Лобачевский уже отдавал себе ясный отчет в том, что ни одно из предложенных доказательств постулата о параллельных линиях не может быть признано удовлетворительным; но он еще не исключал возможности, что такое доказательство может быть найдено. Следующие годы были для Лобачевского временем наиболее напряженного размышления над этим вопросом и привели его к полному решению проблемы, составлявшей загадку в течение двух тысяч лет.

23 февраля (по старому стилю — 11/II) 1826 г. Н. И. Лобачевский сделал на заседании физико-математического отделения доклад, который представил также написанным на французском языке под заглавием «Exposition succincte des principes de géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallelles» («Сжатое изложение принципов геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях»). Это был, по образному выражению проф. А. П. Котельникова, день рождения неевклидовой геометрии. В препроводительной бумаге Лобачевский просил рассмотреть его работу и в случае одобрения напечатать ее в намеченных к изданию «Ученых записках университета». Но одобрения это величайшее произведение математической мысли у рецензентов не получило; они не представили никакого отзыва. Только через 8 лет в протоколе заседания факультета появляется постановление о передаче дела об этой работе Лобачевского в архив. Все старания разыскать ее до сих пор к цели не привели.

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Геометрия. Полное собрание сочинений, т. II, М.—Л., 1948, стр. 70.

Через три года, в 1829 г., Лобачевский опубликовал в «Казанском Вестнике» — журнале, который издавался университетскими силами, — статью «О началах геометрии», содержащую извлечение из «Exposition succincte», дополненное далеко идущим развитием этого исследования [1]). За этим последовал ряд других мемуаров, развивавших эти идеи в различных направлениях. Мы не будем их перечислять [2]).

Лобачевский, как и многие до него, ведет рассуждение так, как он должен был бы это делать, если бы хотел доказать постулат от противного. Это значит, что он принимает все остальные постулаты Евклида, а вместе с тем, следовательно, и всю абсолютную геометрию и к ним присоединяет допущение, противоположное постулату; он принимает, что *в плоскости через точку C, лежащую вне прямой AB, можно провести более одной прямой, каждая из которых не встречает AB*. Из этого на первый взгляд совершенно нелепого допущения он делает выводы, и читатель, естественно, ждет, что они приведут к абсурду, к противоречию с абсолютной геометрией. Но тонкие выводы, мастерски проводимые, следуя один за другим, ни к какому логическому противоречию не приводят, а постепенно образуют законченное гармоническое целое, которое Лобачевский назвал «воображаемой», Гаусс — «неевклидовой» геометрией, а мы теперь называем *геометрией Лобачевского*.

Высказанное здесь утверждение, что выводы, вытекающие из своеобразного допущения Лобачевского, приводят к гармоническому целому, туманное по своему содержанию, читателя, конечно, не удовлетворит. Но тот, кто даст себе труд проштудировать начала геометрии Лобачевского, особенно в современном, более доступном изложении, очень скоро начинает чувствовать, что

---

1) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полное собрание сочинений, т. I, М. — Л., 1945.

2) Перечень сочинений Лобачевского помещен в конце этой книги (стр. 297—298). [*Ред.*]

строгость выводов и связность своеобразных результатов подчиняют себе его мысль, постепенно парализуют его недоверие, поражают силой логической концепции. Изложение этой геометрии, конечно, не может найти себе места в этом небольшом очерке. Мы попытаемся, однако, набросать несколько штрихов, которые в некоторой перспективе осветят это утверждение [1]).

VII

Возвратимся к рис. 1, которым мы уже пользовались (на стр. 83), и дополним его (рис. 2). Из точки C опустим на прямую AB перпендикуляр CD, а к нему в той же плоскости через точку C проведем еще перпендикуляр $E'CE$ (прямую будем иногда обозначать тремя буквами). Допущение (гипотеза, постулат), которое Лобачевский вводит в дополнение к абсолютной геометрии, заключается в том, что в той же плоскости (ABC) через точку C, кроме $E'CE$ (евклидовой параллели), проходит по крайней мере еще одна прямая $G'CG$, также не встречающая прямой AB. Отсюда совершенно ясно, что все такие прямые, как $F'CF$, проходящие между этими двумя прямыми $E'CE$ и $G'CG$, также не встречают прямой AB, так как каждая из них располагается относительно AB с одной стороны (справа от точки C) над прямой CG, а с другой стороны (слева от точки C) — над CE'. Допущение приводит, таким образом, к тому, что через точку C

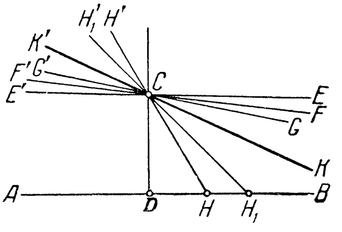

Рис. 2.

[1]) Читателю, который захочет познакомиться с геометрией Лобачевского по его собственным произведениям, следует начать с небольшого сочинения, носящего название «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (1840). Оно имело целью дать читателям возможно более доступное изложение начал неевклидовой геометрии. «Геометрические исследова-

в той же плоскости проходит бесчисленное множество прямых, не встречающих прямой AB. Если мы остановимся на прямых, проходящих внутри прямого угла DCE (и вертикального с ним), то они, таким образом, разбиваются на прямые вида $H'CH$, встречающие прямую AB, и прямые вида $F'CF$, ее не встречающие; первые расположены ближе к перпендикуляру CD, вторые — ближе к CE. Ввиду непрерывности пучка отсюда следует, что должна существовать прямая $K'CK$, отделяющая прямые одной категории от прямых другой категории. Эта прямая должна быть либо последней встречающей AB, либо первой, ее не встречающей. Но последней встречающей прямой быть не может. В самом деле, какова бы ни была встречающая прямая $H'CH$, мы, взяв на прямой AB точку H_1 правее точки H, получим прямую $H_1'CH_1$, лежащую за $H'CH$ и всё еще встречающую AB. Поэтому граничная прямая $K'CK$ будет прямой, не встречающей AB. Так как в углах DCE' и вертикальном с ним, естественно, будет происходить то же, что и в рассмотренных углах (DCE и вертикальном с ним), то вся картина представится в таком виде, как на цветном рис. 3: здесь черным изображены «старые» прямые, встречающие прямую AB, красным — «новые» прямые, не встречающие AB, зеленым изображены две прямые, отделяющие прямые, встречающие AB, от не встречающих AB. Эти две прямые Лобачевский называет *параллельными* AB. Таким образом, термин *прямая CK параллельна прямой AB* имеет у Лобачевского более определенное значение, чем в геометрии Евклида: он означает, что прямая CK не только не встречает прямой AB, но в точке C с той или другой стороны

ния» с обстоятельными комментариями, принадлежащими автору настоящего очерка, помещены в I томе Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, М. — Л., 1946. Доступные сочинения современных авторов, посвященные неевклидовой геометрии, перечислены в приложении (стр. 299). [Особенно просто и доступно для первого ознакомления с геометрией Лобачевского изложение в книге: П. А. Широков, Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, М.—Л. 1955. *Ред.*]

перпендикуляра CD она отделяет прямые, встречающие прямую AB, от не встречающих ее; это — только зеленые прямые; красные прямые не называются параллельными AB.

Воображая себе плоскость, в которой осуществляются допущения Лобачевского, мы будем ее называть *плоскостью Лобачевского*. Мы можем сказать, что в плоскости

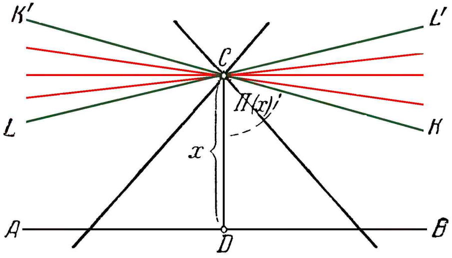

Рис. 3.

Лобачевского через точку C, лежащую вне прямой AB, проходят две параллельные ей прямые (на нашем чертеже $K'CK$ и $L'CL$); они образуют две пары вертикальных углов. Прямые, проходящие внутри вертикальных углов KCL и $K'CL'$, встречают AB; по выражению Лобачевского, они *сходятся* с AB; прямые же, проходящие в углах $K'CL$ и KCL', по выражению Лобачевского, *расходятся* с AB. Если мы имеем две прямые AB и CH (рис. 4), то вторая в каждой своей точке C либо сходится с AB, либо параллельна ей, либо расходится с ней.

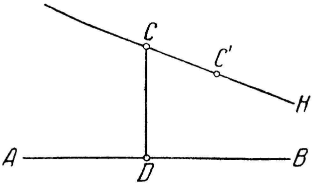

Рис. 4.

При этом, если прямая в какой-либо своей точке C сходится с AB, параллельна ей или расходится с ней, то те же функции, если можно так выразиться, она выполняет и во всякой другой своей точке C'. Это значит, если она в точке C расходится с AB, то и в другой своей точке C' она с ней расходится; если в точке C она ей параллельна, то и в точке C' она ей параллельна. Последнее означает, что прямая CH, которая в точке C отделяет прямые, встречающие AB, от прямых, ее не встречающих, обладает теми же свойствами и во всякой другой своей точке. (Заметим, что это утверждение требует доказательства, которого мы здесь не приводим, но которое выполняется безукоризненно.) Мы можем, таким образом, просто говорить: *прямая CH сходится с AB*, *параллельна ей* или *расходится с ней*, не отмечая при этом, в какой своей точке она принадлежит к одной, к другой или к третьей категории. И можно также доказать, что это поведение одной прямой относительно другой всегда в з а и м н о е: если CH параллельна AB, то и AB параллельна CH.

Еще один момент необходимо отметить. Относительно параллели CK (рис. 3), образующей с перпендикуляром CD острый угол DCK со стороны DB, говорят, что она *параллельна AB в сторону AB*, тогда как вторая параллель CL параллельна ей в *сторону BA*. При таком понимании параллелизма сохраняется основное свойство евклидовых параллелей: две прямые, параллельные третьей (в одну и ту же сторону), параллельны между собой (в ту же сторону) [1]). В геометрии Евклида обе параллели к прямой соединяются в одну; вертикальные углы KCL и $K'CL'$ развертываются каждый в выпрямленный угол ($2d$), смежные же с ними углы $K'CL$ и $L'CK$ свертываются, сходят на нет, обращаются в нуль.

Равные острые углы DCK и DCL, которые параллели с двух сторон образуют с перпендикуляром CD, Лобачевский называет *углами параллельности в точке C относительно прямой AB*. Евклидова геометрия выделяется тем, что в ней угол параллельности всегда есть прямой угол. Если, следовательно, допустить существование

[1]) Перечисленные свойства составляют первые теоремы неевклидовой геометрии; доказательство их читатель найдет, например, в «Геометрических исследованиях» Лобачевского (см. примечание на стр. 101—102).

геометрии Лобачевского, т. е. геометрии, в которой имеют место исходные его постулаты, то геометрия Евклида составит тот ее предельный случай, когда угол параллельности имеет постоянное значение — всегда равен прямому углу.

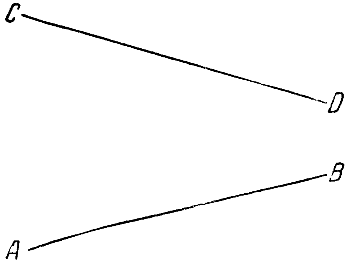

Рис. 5.

Становясь на почву «воображаемой», неевклидовой геометрии, Лобачевский с безукоризненной строгостью доказывает, что две параллельные между собой прямые здесь неограниченно (асимптотически) приближаются одна к другой в сторону параллелизма, как бы сходятся где-то, в бесконечно удаленной точке; в противоположную же сторону они друг от друга неограниченно удаляются (рис. 5). Две же расходящиеся прямые (рис. 6) всегда имеют общий перпендикуляр EF, который представляет собой кратчайшее расстояние между ними — от которого они расходятся, неограниченно удаляясь одна от другой в обе стороны.

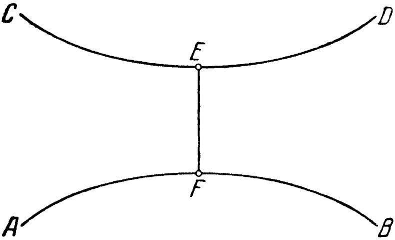

Рис. 6.

Этот результат, выраставший на первых шагах изучения неевклидовой геометрии, долго служил для многих непреодолимым препятствием к усвоению и признанию неевклидовой геометрии. Но справедливы слова Гаусса: «Мы не можем смешивать того, что нам кажется неестественным, с абсолютно невозможным».

Два перпендикуляра к одной и той же прямой всегда расходятся; отсюда следует, что и всякие две прямые AB и CD, образующие с секущей AC равные соответственные углы BAE и DCE, также расходятся (рис. 7). В самом деле, если из середины H отрезка AC опустим на эти прямые перпендикуляры HF и HG, то из равенства прямоугольных треугольников AHF и CHG следует, что и углы при вершине H равны; прямые HF и HG

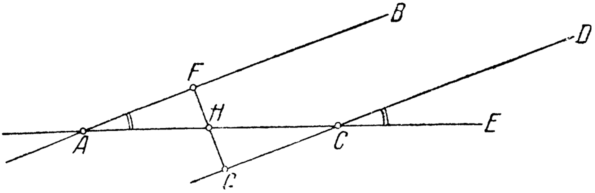

Рис. 7.

сливаются в одну; перпендикулярные к ней прямые AB и CD расходятся.

Теперь возвратимся к углу параллельности. В неевклидовой геометрии — это всегда острый угол и притом угол переменный. В самом деле, пусть, как прежде (рис. 8), $CD \perp AB$, $CK \parallel AB$ (мы будем, как, обычно, обозначать слово «параллельный» знаком $\parallel$, придавая ему теперь смысл, указанный выше). KCD есть угол параллельности в точке C относительно прямой AB. Возьмем точку C' на том же перпендикуляре CD выше точки C. Если проведем прямую $C'L$ под тем же углом к перпендикуляру, что и CK ($\angle DC'L = \angle DCK$), то прямые CK и $C'L$ расходятся, как было сказано выше. Пусть $C'K'$ будет прямая, параллельная AB (в ту же сторону AB). Так как прямые CK и $C'K'$ параллельны одной и той же прямой AB (притом в ту же сторону), то они в ту же сторону параллельны между собой. Прямая $C'K'$, параллельная CK в ту же сторону, должна быть ближе к перпен-

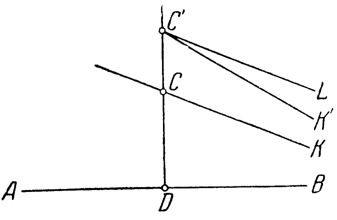

Рис. 8.

дикуляру, чем $C'L$, т. е. угол параллельности в точке C' меньше, чем в точке C ($\angle K'C'D < \angle KCD$). Угол параллельности в точке C относительно прямой AB, таким образом, зависит от расстояния точки C от AB, представляет собой функцию этого расстояния. Если обозначим это расстояние CD через x, то угол параллельности в точке C есть функция от x. Лобачевский обозначал ее через $\Pi(x)$ (см. рис. 3 на стр. 103). Предыдущие соображения обнаруживают, что эта функция убывает с возрастанием x, возрастает с убыванием x. Так как $\Pi(x)$ есть острый угол, то отсюда следует, что с убыванием x угол DCK приближается к прямому углу. Лобачевский показывает, что он приближается к прямому углу неограниченно; это значит: сколь бы мал ни был угол α, $\Pi(x)$ отличается от прямого угла меньше чем на α, когда x становится достаточно малым.

Сопоставим теперь два обстоятельства: во-первых, то, что в евклидовой геометрии угол параллельности всегда прямой; во-вторых, то, что всякий прибор, в том числе, конечно, и угломерный прибор, имеет предел чувствительности. В эпоху Лобачевского чувствительность угломерных приборов еле достигала $1''$; это значит, что углы, отличающиеся меньше чем на $1''$, не могли быть отличены один от другого. Обозначим теперь через z расстояние, при котором угол параллельности отличается от d меньше чем на $1''$. Если бы мы производили измерения углов параллельности на расстояниях, меньших z, то мы бы не отличали их от прямого угла; создавалось бы впечатление, что в пространстве, в котором мы оперируем, царит геометрия Евклида. Такое положение должно было бы наступить неизбежно, если бы мы ограничили круг своих наблюдений достаточно малой областью. Но какую область мы должны считать малой? Каково то расстояние, на котором угол параллельности отличается от прямого меньше чем на $1''$? Теория не дает, не может дать на это никаких указаний. Не лишено возможности, что при огромных размерах Вселенной те расстояния, которые мы считаем большими, даже расстояния Земли от звезд, все еще меньше этого z.

«Нельзя не увлекаться, — замечает Лобачевский, — мнением Лапласа, что видимые нами звезды и Млечный Путь принадлежат к одному только собранию небесных светил, подобному тем, которые усматриваем как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и пр. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжаемо неограниченно, сама природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостью даже и расстояния нашей Земли до неподвижных звезд» [1]).

Между тем за истекшие сто с лишним лет обнаружено, что космические расстояния неизмеримо больше, чем рисовал себе Лаплас; расстояние между звездами иногда выражается в сотнях миллионов световых лет. И становится совершенно естественным думать, что наша вера в незыблемую точность евклидовой геометрии имеет свой источник в том обстоятельстве, что все наши измерения и наблюдения производятся в совершенно ничтожном, исчезающем, по выражению Лобачевского, уголке Вселенной.

Попытку опытной проверки того, имеет ли место, как выражается Лобачевский, «употребительная или же воображаемая геометрия», он делал, исходя из другого принципа. Мы знаем уже, что дилемма между евклидовой геометрией и неевклидовой геометрией Лобачевского эквивалентна тому, равна ли сумма внутренних углов прямолинейного треугольника $2d$ или она меньше $2d$. Это Лобачевский и хотел экспериментально проверить. С этой целью, опираясь на параллаксы неподвижных звезд, Лобачевский вычисляет сумму углов в треугольнике, вершины которого находятся в Солнце, Земле и неподвижной звезде. Он приходит к следующему выводу: если взять в качестве неподвижной звезды Сириус, то эта сумма отличается от $2d$ меньше чем на $0{,}000372''$. В вычисление

---

[1]) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1946, стр. 209.

Лобачевского здесь вкралась ошибка: эта разница получается даже еще в 100 раз меньшей. Само собой разумеется, что этот результат не может служить основанием для решения вопроса при учете размеров Вселенной. Но принципиально вера в незыблемость евклидовой геометрии уже была подорвана, правда, в то время еще у очень немногих математиков, которые были в состоянии усвоить идеи Лобачевского, были способны отрешиться от беспросветной косности, всегда стоявшей на пути смелой научной мысли.

Для выяснения развития, которое Лобачевский дал своей геометрии, необходимо остановиться еще на двух моментах.

Представим себе окружность и совокупность или, как говорят обыкновенно, «пучок» прямых, проходящих через ее центр. Окружность пересекает все прямые этого пучка ортогонально, т. е. под прямым углом. Можно это представить так, что наблюдатель, двигающийся по окружности, все время перемещается перпендикулярно к радиусу; его путь пересекает ортогонально все радиусы. Геометр дает этому такое выражение: окружность есть *ортогональная траектория* пучка прямых, проходящих через одну точку — через центр этой окружности, через центр пучка.

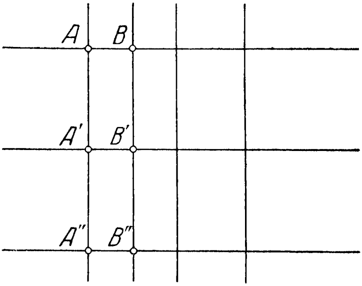

Рис. 9.

Это происходит одинаково и в евклидовой плоскости и в плоскости Лобачевского. Представим себе теперь, что центр пучка удаляется по одной из составляющих его прямых; тогда составляющие прямые как бы приближаются к параллелизму. Если заменим пучок прямых, пересекающихся в общей точке, пучком параллелей, то в евклидовой плоскости их ортогональными траекториями будут служить прямые (рис. 9); расстояние между двумя параллелями, отсчитываемое по траектории, на всем протяжении одно и то же. В плоскости Лобачевского дело обстоит иначе: так как параллели сближаются, то ортогональными траекториями служат своеобразные кривые (рис. 10), которые Лобачевский называет *предельными окружностями* или просто *предельными линиями*; параллельные линии, для которых предельная линия является ортогональной траекторией, носят название *осей*

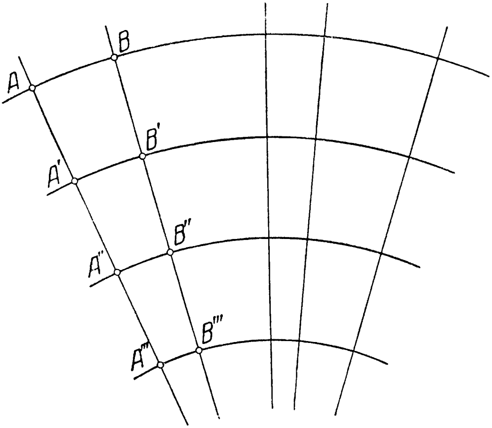

Рис. 10.

предельной линии. Если представлять себе, что параллели пучка сходятся в бесконечно удаленной точке, то можно сказать, что предельная линия — это окружность, центр которой лежит в бесконечности. Расстояние между двумя осями (т. е. параллелями) в различных точках будем измерять дугами проходящих между ними предельных линий — соответственными предельными дугами (например, AB, $A'B'$, $A''B''$, ...). Различие между геометрией Евклида и геометрией Лобачевского заключается в том, что в первой это расстояние между теми же параллелями всюду одно и то же (рис. 9), в геометрии Лобачевского оно убывает в сторону параллелизма (рис. 10). Легко доказать, — мы не можем здесь на этом останавливаться, — что отношение длин этих предельных дуг AB и $A'B'$

здесь зависит только от того, насколько эти дуги одна от другой удалены, т. е. от длины отрезков $AA' = BB'$. Имея это в виду, возьмем между параллелями две предельные дуги AB, $A'B'$, отстоящие одна от другой на расстояние $AA' = BB'$, равное единице длины (скажем, 1 *см*); отношение $AB : A'B'$ будет некоторым определенным числом, выражающимся неправильной дробью; обозначим его через a. Если будем отодвигаться в сторону параллелизма на расстоянии $AA' = A'A'' = A''A''' = \ldots (= 1)$, то

$$AB : A'B' = a;$$

$$A'B' : A''B'' = a, \quad AB : A''B'' = a^2;$$

$$A''B'' : A'''B''' = a, \quad AB : A'''B''' = a^3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Если две предельные дуги l и l_0, находящиеся между двумя параллельными линиями, отстоят друг от друга на расстоянии, равном n единиц длины, то отношение их длин $l : l_0 = a^n$, т. е. $l = l_0 a^n$. Обычными приемами нетрудно обнаружить, что это соотношение остается в силе, когда расстояние между дугами выражается не целым числом, а любым — дробным, даже иррациональным числом x: всегда $l = l_0 a^x$. Это соотношение лежит в основе всей метрики, т. е. в основе измерения всех геометрических величин в плоскости и в пространстве Лобачевского.

Какое же значение имеет эта неожиданно появившаяся постоянная a? Прежде всего ясно, что в евклидовом пространстве, где всегда $AB = A'B' = A''B'' = \ldots$, $a = 1$; в пространстве же Лобачевского $a > 1$. Если бы оказалось, что наше пространство есть пространство Лобачевского, а за единицу длины мы взяли бы большое расстояние, скажем световой год, и если бы мы при этом были в состоянии произвести соответственные измерения, то мы могли бы постоянную a определить опытным путем и тем окончательно зафиксировать метрику пространства. Но a priori этого сделать нельзя, a priori эта постоянная может иметь совершенно произвольное значение. Геометрию, соответствующую определенному значению постоянной a, называют в настоящее время *гиперболической гео-*

метрией (основания, которые привели к этому названию, будут указаны ниже). Можно сказать, что существует бесчисленное множество разновидностей гиперболической геометрии, отвечающих различным значениям этой постоянной. Геометрия Евклида включается в число их, именно соответствует значению $a = 1$. Вместо числа a пользуются обыкновенно его натуральным логарифмом, $\ln a$, или (по разным соображениям это оказывается более удобным) обратной величиной от этого логарифма, $k = 1 : \ln a$. Евклидова геометрия соответствует значению $\ln a = 0$ или $k = \infty$.

Обращаемся к последнему моменту, на котором необходимо остановиться, который имеет в неевклидовой геометрии решающее значение. В собственно гиперболическом пространстве (т. е. при $a \neq 1$ или $k \neq \infty$) геометрия, как мы видели, существенно отличается от евклидовой; она уступила место геометрии Лобачевского. Но и это оказывается не совсем уже так, когда речь идет о двумерной геометрии.

Планиметрия есть геометрия плоскости; в евклидовом пространстве плоскость, как говорят, несет на себе двумерную евклидову геометрию, в пространстве же Лобачевского она несет на себе гиперболическую геометрию. Но ведь не только плоскость имеет свою двумерную геометрию; строго говоря, таковую имеет всякая поверхность. Однако в более узком смысле можно сказать, что в евклидовом пространстве специфическую геометрию имеют поверхности только двух типов: плоскости и сферы. Это нужно понимать следующим образом.

К числу основных приемов, которыми мы пользуемся при построении геометрии плоскости, относится наложение одной фигуры на другую, т. е. передвижение фигуры по плоскости. Плоскость допускает передвижение в ней фигур без деформации, причем любая точка фигуры может быть приведена в совмещение с любой точкой плоскости; зафиксировав же одну точку, можно плоскость вокруг этой точки вращать. Те же движения возможны и на сфере. Поэтому на сфере также можно строить геометрию, пользуясь движением, наложением фигур. При таком построении прямые заменяются *геодезическими линиями* сферы, т. е. теми линиями, которые здесь, подобно прямым на плоскости, проходя между двумя точками, представляют кратчайшее расстояние между ними; хорошо известно, что эту роль на сфере играют окружности больших кругов. Геометрия сферы была построена уже в древности. Основные положения, из которых исходит геометрия сферы — аксиоматика сферической геометрии, — существенно иные, чем на плоскости: здесь две геодезические линии — две окружности больших кругов — всегда пересекаются не в одной, а в двух точках, дуга геодезической линии может быть продолжена в обе стороны, но всегда возвращается в исходную точку, геодезическая линия имеет конечную длину, параллельных геодезических линий на сфере вовсе не существует. Сферическая геометрия в евклидовом пространстве, таким образом, существенно отличается от геометрии плоскости. Одно из существенных ее отличий заключается в том, что *сумма внутренних углов геодезического треугольника* (т. е. треугольника, составленного из дуг больших кругов) *всегда больше* $2d$.

Итак, в евклидовом пространстве существует два типа поверхностей, которые допускают внутреннюю геометрию, основанную на движении без деформации, — это *геометрия плоскости* и *геометрия сферы*. Другие поверхности полностью такой геометрии, без существенной модификации ее понимания, не допускают. Например, на трехосном эллипсоиде нельзя даже говорить о равенстве треугольников, ибо передвинуть треугольник с одного места на другое невозможно.

Так обстоит дело в евклидовом пространстве. Как это модифицируется в пространстве, в котором царит геометрия Лобачевского? Плоскость и сфера и здесь имеют, конечно, каждая свою «внутреннюю» геометрию — в том смысле, как мы о ней говорили выше. При этом геометрия сферы здесь совершенно та же, что и в пространстве Евклида. Это обусловливается тем, что здесь сохраняются все основные свойства сферы: две окружности больших кругов также пересекаются в двух точках и т. п. *Геометрия сферы в пространстве Лобачевского та же, что и в евклидовом пространстве.* Напротив, плоскость несет здесь существенно другую геометрию — гиперболическую планиметрию, основные черты которой выше уже достаточно отмечены.

Но зато в пространстве Лобачевского существуют еще другие поверхности, которые допускают внутреннюю геометрию, развертывающуюся теми же основными средствами — прежде всего свободным движением. Если предельную линию вращать вокруг одной из ее осей, то получается своеобразная поверхность, которую Лобачевский называет *предельной сферой* или просто *предельной поверхностью*. Неточно, но образно ее можно представить себе как сферу с бесконечно удаленным центром. Геодезическими линиями на этой поверхности служат предельные линии. Такая поверхность может двигаться, скользить по себе самой так же, как плоскость и сфера; на ней можно строить внутреннюю геометрию теми средствами, о которых мы говорили выше. Что это за геометрия?

Лобачевский обнаружил, что это — обыкновенная евклидова геометрия. *В пространстве Лобачевского предельная поверхность несет на себе двумерную евклидову геометрию*. Когда мы отказываемся от евклидовой геометрии на плоскости, она не прекращает своего существования, она переходит на другую поверхность — на предельную поверхность.

Это восстановление евклидовой планиметрии в неевклидовом пространстве имеет чрезвычайно большое значение. Вместе с нею сохраняются все средства евклидовой планиметрии и прежде всего ее тригонометрия. В евклидовом пространстве мы, исходя от плоскости, надлежащей проекцией ее на сферу получаем сферическую тригонометрию. В геометрии Лобачевского естественно исходить от предельной поверхности, несущей на себе наиболее простую — евклидову геометрию. Проектируя ее «предельные треугольники» на плоскость, Лобачевский пришел к тригонометрии прямолинейного треугольника в гиперболической плоскости. «После этого, — говорит он, — всё прочее в геометрии будет уже аналитикой» [1]). Располагая тригоно-

[1]) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1946, стр. 260.

метрией гиперболической плоскости (или, что сводится к тому же, — гиперболического пространства), Лобачевский получил возможность построить в своей «воображаемой геометрии», в «пространстве Лобачевского», или в «гиперболическом пространстве», как мы теперь говорим, аналитическую геометрию, дифференциальную геометрию, вести интегральные вычисления — довести созданную им геометрию до тех высот, до которых в течение трех тысячелетий и в особенности в течение последних трех столетий поднялась классическая, «употребительная» геометрия Евклида. И чем дальше шло это развитие новой геометрии, не только не наталкиваясь на противоречия, но даже нигде не встречая на своем пути принципиальных препятствий, тем тверже крепла уверенность автора в том, что она так же незыблема, как и классическая геометрия, в расширение которой она была сотворена и которую она сохранила в своих недрах как простейший частный (предельный) случай. Была создана совершенно новая наука, был призван к жизни целый новый мир идей и фактов, несущий на себе печать гения своего творца. Прецедента этому история человеческого знания не имела.

Всякий, кто был бы в состоянии проштудировать весь этот ряд работ, овладеть этими идеями и фактами, несомненно вынес бы такую же уверенность в нерушимой правильности новой геометрии, какую имел Н. И. Лобачевский. Но во всем мире в ту пору был только один авторитетный человек, который был в состоянии это осилить и оценить, — это был Гаусс. Однако и он имел возможность познакомиться с работами Лобачевского только через 11 лет после появления в «Казанском вестнике» первого мемуара Лобачевского, — именно, после того как он получил экземпляр выпущенной в 1840 г. на немецком языке небольшой книги «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien». Мы уже упоминали о ней выше [1]). Проштудировав это небольшое сочинение, представляющее один из наиболее блестящих перлов математической литературы, Гаусс, конечно, оценил его по достоинству.

[1]) См. примечание на стр. 101.

В письмах к своим друзьям, Герлингу и Шумахеру, он в восторженных выражениях рекомендует ее их вниманию. Он разыскал все другие работы Лобачевского, он научился русскому языку, чтобы их проштудировать в оригинале, он провел Лобачевского в члены Геттингенского ученого общества, носившего характер академии, и собственноручно уведомил Лобачевского об избрании. Но, верный своей установке, он не проронил ни единого слова об этом в печати, не оказал этим идеям, которые он так глубоко разделял, ни малейшей поддержки. Боясь «ос, которые поднимутся над моей головой, если я опубликую мои воззрения», Гаусс своим молчанием, своим неправильным отношением к другим математикам, которые искали у него поддержки, фактически задержал признание новой геометрии на несколько десятилетий. То, чего так боялся Гаусс в угоду своего благополучия, не убоялся Лобачевский, несмотря на то, что «осы» кружились над его головой. В русской и немецкой печати появились статьи о работах Лобачевского, проникнутые издевательством; грубые выпады людей, которые не были в состоянии понять идеи Лобачевского, влили много горечи в жизнь гениального ученого.

VIII

По размерам и характеру настоящего очерка здесь нет возможности приводить те аналитические соотношения (формулы), на которых в геометрии Лобачевского основаны метрические вычисления (измерение длин кривых, площадей фигур, объемов тел). Однако на немногих важнейших из них будет полезно остановиться, чтобы пролить некоторый свет на связанные с ними соображения принципиального свойства. Это место потребует несколько больше математических сведений; читатель, который ими не владеет, может его опустить.

Мы выше выяснили [1]), что угол параллельности, соответствующий расстоянию x точки от прямой, к которой проводится параллель, представляет собой функцию от x, в обозначениях Лобачевского — $\Pi(x)$. Совершенно оче-

[1]) На стр. 107.

видно, что разыскание этой функции, характеризующей новую геометрию, диктующей ее законы, устанавливающей царящие в ней соотношения, составляло первую основную задачу Лобачевского. И он преодолел трудности, стоящие на пути этого решения; он обнаружил, что эта функция определяется сравнительно простым уравнением

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}} \quad \text{или} \quad \Pi(x) = 2\operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{k}}, \qquad (1)$$

где e — основание натуральных логарифмов, а k — та же постоянная, о которой шла речь выше[1]).

По значению x при известном (заданном) значении k определяется угол $\Pi(x)$. Всматриваясь в это уравнение, мы видим, что оно подтверждает выводы, к которым мы пришли выше: угол $\Pi(x)$ возрастает, когда x убывает; когда x становится весьма малым (по сравнению с k), то угол $\Pi(x)$ стремится к прямому углу; евклидова геометрия (в которой $\Pi(x) = d$) царит на протяжении, весьма малом по сравнению с отрезком, длина которого выражается числом k.

Вместе с этим выплывают новые соображения, имеющие важнейшее значение. В пространстве Лобачевского существует некоторый отрезок (k), играющий по сравнению с другими отрезками исключительную роль. Именно по сопоставлению с этим отрезком можно говорить о больших и малых расстояниях. Этот отрезок естественно принять за единицу меры; формулы и вычисления тогда значительно упрощаются; Лобачевский так и делает. Но именно это обстоятельство — существование в пространстве «естественной единицы меры» — вызывало наибольшие сомнения. Правда, жители Земли располагают такой «натуральной» единицей меры, пользуются ею: ведь *метр* «естественно» определяется на сфере, на которой мы живем, — на Земле. Но неприемлемым казалось то, что этот исключительный отрезок существует *в пространстве*.

---

[1]) Число $K = -\frac{1}{k^2}$ теперь называют *кривизной гиперболического пространства.*

Гаусс по этому поводу писал[1]):

> «Единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже не знаем ничего о сущности пространства; мы не можем смешивать того, что нам кажется неестественным, с абсолютно невозможным».

И, может быть, вся суть заключается в том, что пространство в целом имеет не такое строение, как мы себе представляем. Такова глубокая мысль, относящаяся уже к космогонии, к строению Вселенной, которая возникла на почве геометрических идей Лобачевского. Эти соображения вновь с особенной настойчивостью возникли в наши дни.

Функция $\Pi(x)$, определяемая равенством (1), фигурирует во всех уравнениях тригонометрии в пространстве Лобачевского. Так, соотношение в прямоугольном треугольнике между гипотенузой c, катетом a и противолежащим ему острым углом A выражается равенством

$$\operatorname{ctg}\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\cdot\sin A. \qquad (2)$$

В силу формулы (1)

$$\operatorname{tg}\Pi(x) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)} = \frac{2e^{-\frac{x}{k}}}{1-e^{-\frac{2x}{k}}} = \frac{2}{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}},$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(x) = \frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{2} = \operatorname{sh}\frac{x}{k}\ ^{2)},$$

[1]) См. стр. 154—155.

[2]) $\operatorname{sh}\frac{x}{k}$ есть *гиперболический синус* аргумента $\frac{x}{k}$, т. е. функция, определяемая равенством $\operatorname{sh}\frac{x}{k} = \frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{2}$.

и уравнение (2) принимает вид

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k}=\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cdot\sin A. \qquad (3)$$

Тригонометрические уравнения геометрии Лобачевского выражаются, таким образом, в гиперболических функциях. Отсюда и возникло присвоенное этой геометрии в настоящее время название *гиперболической*. С другой стороны, разложение гиперболического синуса в степенной ряд имеет вид

$$\operatorname{sh}\frac{x}{k}=\frac{x}{k}+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{k}\right)^3+\ldots;$$

отсюда видно, что для весьма малых значений дроби $\frac{x}{k}$ в пределах бесконечно малых второго порядка (т. е. пренебрегая степенями этой дроби выше второй) можно $\operatorname{sh}\frac{x}{k}$ заменить через $\frac{x}{k}$. Вместе с тем тригонометрическое уравнение (3) по удалении множителя $\frac{1}{k}$ примет вид

$$a=c\cdot\sin A,$$

иными словами, оно сводится к соответствующему уравнению евклидовой тригонометрии. Мы вновь приходим к тому же заключению, что в весьма малой области соотношения геометрии Лобачевского совпадают с евклидовыми уравнениями; но теперь мы видим, в каких пределах это совпадение имеет место — с точностью до бесконечно малых второго порядка относительно $\frac{x}{k}$. Это уточнило вывод, который первоначально мог казаться недостаточно отчетливым.

IX

Что́ принесла с собой новая геометрия, что́ внесла она в общую сокровищницу человеческого знания, научной мысли?

Прежде всего начнем с вопроса, при разрешении которого новая геометрия возникла, — с вопроса о доказательстве постулата о параллельных линиях. Если геометрия Лобачевского не содержит противоречия, то это означает, что с основами, с исходными положениями абсолютной геометрии одинаково совместимы как постулат Евклида, ведущий к классической, «употребительной», по терминологии Лобачевского, геометрии, так и постулат Лобачевского, ведущий к новой, «воображаемой», или «гиперболической», геометрии. Иными словами, постулат о параллельных линиях не представляет собой следствия остальных аксиом и других постулатов Евклида, не может быть из них логически выведен. Все попытки дать его доказательство неизбежно обречены на неудачу. Вопрос, тысячелетиями занимавший научную мысль, был разрешен совершенно новым, своеобразным путем. Вместе с тем было заложено начало так называемых «доказательств невозможности», играющих в настоящее время в математике такую большую роль.

Затем, геометрия, которая казалась окончательно сложившейся наукой, которая, по выражению Гельмгольца, «явилась перед нами в совершенно законченном, готовом виде», так что ни о каких противоречиях или сомнениях в ее области не могло быть речи, в принципах которой никаким изменениям, никакой эволюции не могло быть места, — геометрия совершенно неожиданно ожила, получила широкое развитие, разрослась в обширное здание, в котором старая геометрия Евклида заняла скромный уголок, хотя она и является основным камнем в фундаменте этого здания.

Очень замечательно, далее, что самое построение неевклидовой геометрии отнюдь не шло чисто формально-логическим путем. Это может казаться очень странным, но интуиция помогала ее творцу совершенно так же, как при создании классической геометрии. И тот, кому этот процесс был совершенно ясен, не мог не видеть, что наша мысль способна работать отнюдь не только в формах старых, установившихся пространственных представлений, но и в совершенно иных, глубоко отличных образах, с некоторым правом претендующих на преимущество в мироздании как в целом, уступающих место старым представлениям только в пределах ничтожного, непосредственно нам доступного уголка Вселенной. И замечательно, что всякий, усвоивший геометрию пространства Лобачевского, легко привыкал видеть в нем всё так же отчетливо, как в нашем обычном пространстве, в «употребительной» классической геометрии. А если так, то какая может быть речь о пространственных представлениях как об ингерентных, нашему сознанию органически свойственных, от рождения каждому из нас присущих формах мышления?

Если раньше для людей, материалистически мыслящих, было ясно, что наши геометрические представления сложились и окрепли в многовековом опыте, то теперь, в свете открытий Лобачевского вопрос стал совершенно иначе: только опыту, измерениям, проникающим гораздо дальше, чем это было доступно не только в повседневной жизни, но и в прежних астрономических наблюдениях, надлежало еще установить, должны ли быть во Вселенной, как в целом, в макрокосмосе сохранены геометрические соотношения классической геометрии или они должны быть заменены теми, которые создал Н. И. Лобачевский, и с каким значением постоянной k они должны здесь функционировать. Воззрения Канта в их многообразных модификациях, служившие последним прибежищем идеалистической философии, разлетались как дым. Это блестяще выяснил Гельмгольц в своей знаменитой речи, рассеяв «идеалистические установки Канта».

Пусть еще твердят явные и неявные неоплатоники, что неевклидова геометрия — праздное измышление; пусть еще обращают они свои взоры к идеям Платона или к творцу Вселенной как первоначальным зиждителям пространства и наших геометрических понятий и представлений; такие утверждения свидетельствуют только об убожестве ума этих неоплатоников и неспособности их овладеть новой дисциплиной, требующей смелой и настойчивой мысли. Мы же, для которых новая геометрия кристаллически ясна, которые можем в ней оперировать так же успешно, как и в классической геометрии Евклида, — мы обращаем наши взоры к гениальному творцу неевклидовой геометрии, окончательно разрубившему наиболее прочные узлы идеалистической философии, и приносим наше преклонение перед его великим умом.

X

Однако это преклонение — дело наших дней. Как уже сказано выше, при жизни Лобачевского неевклидова геометрия была встречена враждебно, издевательски. И самые выводы, приведенные выше, в то время были сделаны только самим Лобачевским. Как они ни убедительны по существу, они предполагают допущение, которое сам Лобачевский не мог считать вполне, до конца оправданным. Как ни далеко провел, как ни широко развил Лобачевский свою новую «воображаемую» неевклидову геометрию, как ни тесно связаны между собой были ее результаты, аналитически и геометрически всегда оправдывавшие друг друга, — вопрос, можно ли иметь полную уверенность в том, что где-то в этой системе, в этом огромном цикле идей и фактов не скрывается противоречие, которое когда-либо будет обнаружено и разрушит всё это построение, — этот вопрос «о непротиворечивости» неевклидовой геометрии стоял перед Лобачевским очень остро. Правда, как сам Лобачевский, так и всякий, кто овладевал неевклидовой геометрией, приходил к убеждению, что слишком в этом построении все связано, что эта согласованность соотношений не может быть случайной, что это действительно такое же крепкое построение, как и классическая геометрия Евклида. Она связывает своей логической убедительностью: всякий, кто сумел ее изучить, ею овладеть, ее усвоить, — а это дело нелегкое, — проникается нерушимой верой в ее незыблемую прочность, в ее логическую «непротиворечивость», как принято теперь говорить. Но Лобачевский хорошо понимал, что эта вера все же субъективная, что это еще именно вера со всеми слабыми сторонами всякой веры. Беда заключалась в том, что неевклидова геометрия действительно предстала перед математиком в совершенно готовом виде, возникла, конечно, не из головы Юпитера, но все же и не из наглядной действительности. Она находилась в разительном противоречии с действительностью, как ее себе привычно представляли, казалась одним — нелепой фантазией, другим — пустым измышлением. Перед Лобачевским остро стояли поэтому четыре сложных вопроса, настойчиво требовавших решения.

Во-первых, где источник этого разительного расхождения новой геометрии с тем, что мы видим, что мы издавна знаем о пространстве? Во-вторых, как могла целая новая наука возникнуть таким умозрительным путем? В-третьих, где при этих условиях уверенность в том, что это умозрение, если его еще дальше продолжить, в конце концов в каком-либо непредусмотренном пункте не сорвется, не приведет к противоречию и этим, вопреки его вере, не приведет к устранению «воображаемой» геометрии, к окончательному утверждению геометрии Евклида? В-четвертых, какую пользу новая геометрия может принести математике и науке в целом?

На первые два вопроса Лобачевский дал четкий и безусловно правильный ответ, содержание которого мы, в общем, уже выяснили выше. Этот ответ заключался в том, что наши геометрические представления создались в результате наблюдений, хотя и чрезвычайно продолжительных, но происходивших в весьма небольшом участке мироздания, в пределах которого они возникли в упрощенном виде. Именно эти представления при попытке распространения их на все мироздание составляют иллюзию, порожденную недальновидностью, подобно тому как иллюзию, порожденную недальновидностью, в течение веков составляло убеждение, что Земля представляет собой плоскую пластину. Возникновение неевклидовой геометрии, происшедшее, на первый взгляд, умозрительным путем, объясняется тем, что в ее основу положены те же посылки, что и в геометрии Евклида, с единственным исключением, что одна из посылок заменена другой, своеобразной гипотезой, и все выводы, вся теория носят тот же характер, что и обычное в науке теоретическое построение, основанное на гипотезе. Результаты такого построения, в зависимости от того, оправдаются они или нет, должны подтвердить или опровергнуть самую гипотезу. И в целях этого оправдания, как уже сказано выше, Лобачевский производил астрономические наблюдения, которые не могли, однако, дать решающего результата, как он считал вероятным, за недостаточной точностью инструментов. При этих условиях наиболее остро стоял третий вопрос — о логической непротиворечивости неевклидовой геометрии. Этот вопрос стоял перед Лобачевским всю жизнь; в поисках ответа на него были составлены все дальнейшие, все важнейшие его работы; этот именно вопрос служил предметом наиболее упорных его размышлений.

К решению этого вопроса Лобачевский шел своеобразным путем, который одновременно давал и некоторый ответ на последний из перечисленных выше вопросов. Он искал применения «воображаемой геометрии» к вычислению определенных интегралов. Нахождение точных значений определенных интегралов в числах или в параметрах, смотря по заданию, есть трудная и важная задача анализа. В эпоху Лобачевского, когда еще были свежи традиции Эйлера, эта задача считалась особенно актуальной. Были выработаны различные методы для ее решения в частных случаях, геометрические соображения часто играли в них существенную роль. Лобачевский применял к вычислению определенных интегралов такие же соображения, пользуясь, однако, средствами гиперболической, а не евклидовой геометрии. Заданный интеграл он рассматривал как значение в гиперболическом пространстве длины некоторой кривой, как площадь некоторой фигуры на плоскости или на другой поверхности, как объем или массу некоторого тела, и, поскольку это были метрические величины в гиперболическом пространстве, соображения, основанные на «воображаемой геометрии», давали ему указание, как разыскать значение рассматриваемого интеграла. Когда же это значение было найдено, часто бывало возможно найти и аналитические пути, ведущие к той же цели. Согласие полученных результатов Лобачевский рассматривал как подтверждение правильности гиперболической геометрии. Этим путем Лобачевский действительно разыскал значения многих определенных интегралов, — соответствующие справочники пестрят указаниями на Лобачевского. Особенно любопытен один интеграл, значение которого разыскивал Лагранж. Лобачевский же средствами неевклидовой геометрии это значение нашел без труда.

Все эти результаты, несомненно интересные с аналитической точки зрения, дали некоторое приложение гиперболической геометрии к анализу, усилили субъективную уверенность в ее логической правильности; но основной задачи о непротиворечивости новой геометрии они не разрешили, не могли разрешить, так как это не может быть достигнуто отдельными примерами ее применений. Лобачевский это хорошо понимал, размышлял над этим вопросом всю жизнь, но исчерпывающего его решения не нашел, — это выпало на долю последующих поколений. Нужно, однако, сказать, что самый вопрос носил принципиальный, но не практический характер. Совершенно невозможно себе представить математика, который действительно усвоил бы геометрию Лобачевского и допускал бы мысль, что в ней коренится противоречие. Создать такое научное творение, осознать его огромное значение, его математическое совершенство и вместе с тем не встретить ни одного человека, который бы эти мысли усвоил и оценил, — более того, быть осмеянным, читать отзывы людей, пользующихся авторитетом, проникнутые издевательством, не иметь возможности на такие отзывы ответить (возражения Лобачевского не печатались), — это большая, тяжкая трагедия его жизни. Такая трагедия лишила разума Тауринуса, ввергла в глубокую меланхолию Яноша Больаи. Что спасло от такой участи Лобачевского? Волевой характер, полный энергии, неутомимой работоспособности, здоровый интерес к жизни, беззаветная преданность делу просвещения и, в частности, Казанскому университету.

С конца двадцатых годов и до последних лет жизни Лобачевский развернул широкую административную и общественную деятельность, яркая печать которой до сих пор лежит на Казанском университете. Вернемся к его биографии.

XI

Режим, установленный Магницким, тяготел над Казанским университетом в течение семи лет. Во все эти годы в Петербург — в министерство народного просвещения и даже выше — со стороны профессоров и других лиц сыпались жалобы, докладные записки о том, что́ в университете творилось, а с другой стороны, сыпались доносы на тех, кто не подчинялся режиму Магницкого. Недовольство Магницким охватило широкие круги общества как в Казани, так и в Петербурге. Император Николай I, сменивший Александра, далеко не принадлежал к сторонникам высокого и свободного просвещения, но то, что происходило в Казанском университете, превосходило всякие пределы. Были и другие причины личного свойства, вызвавшие раздражение Николая против зарвавшегося временщика. Не предполагая, что Николай может занять престол, Магницкий в своих донесениях Александру I (которые он начал представлять помимо министра народного просвещения) обвинял великих князей, в том числе и Николая, в либерализме; один из таких доносов после смерти Александра попал в руки Николая. Князя Голицына на посту министра народного просвещения заменил А. С. Шишков. Генералу П. Ф. Желтухину было поручено произвести новую ревизию университета, в результате которой Магницкий не только был отстранен от должности, но и выслан в Ревель. Вместо него попечителем Казанского округа был назначен граф М. Н. Мусин-Пушкин, который сам получил образование и необходимую для службы аттестацию на курсах при Казанском университете. Может быть, похвалы, которыми его осыпали некоторые современники и историки, преувеличены; но не может подлежать сомнению, что это был человек, искренно преданный делу просвещения и, в частности, Казанскому университету. Он нашел университет в состоянии полного разложения как в научном, так и моральном отношении. «Никогда еще, — говорит Н. Феоктистов, автор монографии о Магницком и его эпохе, — университет не представлял столь жалкого и постыдного зрелища, и велика была ответственность лиц, которые довели его до такого состояния». Ректором университета в это время был профессор К. Ф. Фукс, медик, человек отнюдь не плохой; о нем в Казани сохранились воспоминания как о человеке просвещенном; но он был человеком совершенно безвольным и потому скоро сделался слепым орудием в руках Магницкого. После назначения Мусина-Пушкина он, конечно, не мог оставаться на своем посту. Нужен был новый ректор, человек, который был бы в состоянии оздоровить еще молодой, но уже искалеченный Казанский университет, вдохнуть в него научную жизнь, сделать из него тот очаг просвещения, который был так необходим стране. В этом были одинаково заинтересованы как совет университета, так и новый попечитель. Повидимому, по соглашению между Мусиным-Пушкиным и наиболее влиятельными членами совета, в 1827 г. ректором был выбран Н. И. Лобачевский. По утверждении в этой должности он приступил к исполнению своих обязанностей. Ему тогда исполнилось только тридцать три года. Он еще имел мало административного опыта, и всё же он более чем оправдал надежды, которые на него возлагались. Об уважении, которое он в качестве ректора университета себе завоевал, можно судить по тому, что он избирался на этот пост шесть раз и занимал его без перерыва около двадцати лет (с 1827 по 1846 г.).

Свои взгляды на дело образования и воспитания Лобачевский вскоре изложил в речи, произнесенной на общем собрании университета 17 июля 1828 г. (по старому стилю — 5/VII) и затем опубликованной под названием «Речь о важнейших предметах воспитания» [1]). Нужно перенестись в эпоху николаевского режима, прочного как никогда крепостничества и глубокого невежества, царившего на востоке России, чтобы видеть, что она была для того времени ярко прогрессивной, и почувствовать в ней колоритные социальные настроения. Приводим следующий

---

[1]) Речь помещена в сборнике «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Изд. АН СССР, М. — Л., 1948, стр. 321—327. [*Ред.*]

характерный отрывок из этой речи, явно обращенный к господствовавшим классам:

> «Вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим, — вы, которых ум отупел и чувство заглохло, — вы не наслаждаетесь жизнью. Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, не занимательна история веков. Я утешаюсь мыслью, что из нашего университета не выйдут подобные произведения растительной природы, даже не войдут сюда, если к несчастью, уже родились с таким назначением».

Социалистических взглядов в этих словах усматривать не следует, — Лобачевский был от них далек. Но что это были в то время очень прогрессивные воззрения, не подлежит сомнению. Воспитание человека, по убеждениям Лобачевского, должно вывести его из невежества, снабдить его знаниями, утвердить в нем моральные устои, укрепить его физически, сделать его жизнерадостным членом общества. Школа должна это выполнять на всех ее ступенях, университет должен это сделать в высшей стадии. С такими установками Лобачевский приступил к реорганизации Казанского университета.

Первой и, может быть, главной его заслугой было то, что он сумел внести мир и успокоение в возбужденную и расщепленную среду профессоров университета. Только на этой базе могло развернуться здоровое его развитие.

Под руководством Лобачевского университет был укомплектован новыми силами, поскольку это было по тому времени возможно. Библиотека университета при его активном участии стала одним из богатейших книгохранилищ страны. На всех факультетах были организованы богатые для того времени коллекции учебных пособий. Лобачевский создал научный орган университета — «Ученые записки Казанского университета», с честью существующий по настоящее время. Первая книжка начинается мемуаром Лобачевского, позже в нем появились и важнейшие его труды. Лобачевский развернул широкое строительство университетских зданий, добился на это значительных ассигнований и сам возглавлял строительную комиссию. Лобачевский даже изучил архитектуру, чтобы быть на месте и в этом ответственном деле. Если в настоящее время спрашиваешь в Казани, когда и кем университетские здания были приведены в тот вид, в каком мы их наблюдаем, неизменно получаешь ответ, что почти все это сделано Лобачевским. Большой человек наложил яркий отпечаток на все, что было предметом его многосторонней деятельности. Казанский университет несет на себе эту печать по настоящий день.

Останавливаться здесь на деталях деятельности Лобачевского на посту ректора Казанского университета невозможно. Двух характерных моментов нельзя, однако, не отметить.

В 1830 г. в Казань проникла эпидемия холеры, получившая большое распространение. Лобачевский не только принял очень энергичные меры для изоляции университетских зданий, но сыграл большую роль в деле борьбы с эпидемией во всей Казани. Во всяком случае организацией университетского лазарета, энергичным применением дезинфекционных средств, за осуществлением которых ректор лично наблюдал во всех деталях, поддержанием безукоризненной чистоты Лобачевский достиг того, что на территории университета, где он сосредоточил всех, кто имел отношение к университету (около 600 человек), эпидемия унесла только 12 жертв. Это не шло ни в какое сравнение с тем, что произошло в городе. Заслуга Лобачевского была отмечена центральной властью.

Через десять лет Казань постигло новое бедствие. В августе 1842 г. в городе возник пожар, который вследствие бури быстро разгорелся и охватил всю северо-восточную часть города. Пожар дошел и до университета. Лобачевский мобилизовал студентов и с ними настойчиво отстаивал университетские здания. Астрономическая обсерватория все же сделалась жертвой огня. Но благодаря энергии защитников здания удалось спасти главные инструменты и всю библиотеку, которой угрожала непосредственная опасность. Лобачевскому стоило большого труда восстановить уничтоженные огнем здания и коллекции, но при свойственной ему энергии и это ему удалось.

Просветительная деятельность Лобачевского не ограничилась его работой в университете. В качестве члена Казанского экономического общества, в качестве лица, близкого к управлению учебным округом, он следил за тем, что происходило в средней школе. Лобачевский настаивал на организации курсов и классов для внешкольного образования, ремесленной школы, приюта для бедных детей. Это не были легковесные затеи досужего либерала; это была, как некогда у Ломоносова, продуманная система просвещенной мысли, ставившая себе целью проведение знания в толщу малограмотных масс населения России того времени вообще, ее восточной окраины в особенности. Подумать только, что от Москвы до Тихого океана, на громадной территории России существовала только одна гимназия в Казани, что одна низшая школа приходилась на многие сотни тысяч населения, косневшего в невежестве, а господствовавшие классы вовсе не были заинтересованы в том, чтобы это невежество искоренять! И в этой гнетущей обстановке нашелся администратор, все стремления которого, все силы ума и воли были направлены на то, чтобы внести в эту среду свет, чтобы поднять просвещение в родном городе, в округе, в стране на всех его ступенях, от школы грамоты до высших ступеней университета, до глубокого научного исследования.

Такова личность Н. И. Лобачевского. И среди этой кипучей деятельности Лобачевский ни на один час не прерывал преподавания, принимал на себя в зависимости от настоятельной нужды то чтение лекций по самым разнообразным физико-математическим наукам, то по специальным дисциплинам, то излагал собственные идеи, доступные пониманию лишь небольшого числа учеников, то выступал с чтением популярных лекций для широкого круга слушателей.

В 1846 г. исполнилось 30 лет со времени назначения Лобачевского профессором. По уставу университета это был самый продолжительный срок, в течение которого профессор мог занимать кафедру. Совет университета ходатайствовал об оставлении Лобачевского в профессорской коллегии на посту ректора. В представлении совета было указано, что это было бы для университета большой честью. Но Лобачевский от этой чести отказался и подал в отставку [1]).

Однако Лобачевский был назначен помощником попечителя Казанского учебного округа; а так как Мусин-Пушкин к тому времени был переведен в Петербург, то Лобачевский в течение года фактически самостоятельно управлял округом. В следующем, 1847 г. попечителем округа был назначен генерал Молоствов, а Лобачевский — его помощником. На этом посту он пробыл до 1855 г.

В 1855 г. праздновалось 50-летие Казанского университета. К юбилею Лобачевский выпустил последнюю свою работу, озаглавленную «Пангеометрия» [2]). Существенно новых идей в этой работе уже нет; по существу, это была переработка главным образом того, что изложено в «Воображаемой геометрии», иногда с более или менее существенными улучшениями, кое-где сделаны и исправления. К несчастью, к этому времени Лобачевский ослеп. Свое последнее научное завещание он продиктовал своим ученикам.

На личной и семейной жизни Н. И. Лобачевского мы здесь не будем останавливаться; она принесла ему мало радости. Читатель, который ею заинтересуется, найдет о ней сведения в кратких воспоминаниях его сына [3]).

---

[1]) Как установил Л. Б. Модзалевский, «благородная личность Лобачевского выразилась здесь во всей красе. Он нашел нужным предоставить свою кафедру в университете своему ученику профессору А. Ф. Попову, мотивируя это тем, что необходимо предоставить профессуру более молодым научным силам» (Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. М. — Л., 1948, стр. 17). [*Ред.*]

[2]) Помещена в III томе Полного собрания сочинений, М. — Л. 1951. [*Ред*].

[3]) См. «Воспоминания о Н. И. Лобачевском со слов его сына». Сборник Л. Б. Модзалевского [см. сноску [1])], стр. 596—610.

24 февраля 1856 г. (по старому стилю — 12 февраля) Лобачевский скончался. Идеи Лобачевского, непонятые при его жизни, казалось, были вовсе забыты.

XII

Однако эти замечательные идеи недолго оставались в забвении. Через 10—15 лет имя Н. И. Лобачевского уже было на устах почти всех математиков мира. О неевклидовой геометрии теперь узнали из письма Гаусса к Шумахеру, опубликованного в 1865 г., после смерти Гаусса. В ярких выражениях Гаусс говорит в нем о творении Лобачевского и обращает внимание на небольшую брошюру, которую Лобачевский опубликовал на немецком языке в 1840 г. под названием «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien». Это было наиболее доступное широким кругам изложение элементов гиперболической геометрии, и это — один из самых блестящих перлов математической литературы[1]). Теперь в нее внимательно вчитались, теперь прониклись сознанием глубины и своеобразия этих идей. Гельмгольц первый попытался познакомить с ними более широкий круг научных работников. Гуэль во Франции, Гельмгольц в Германии, Тилли в Бельгии, Клиффорд в Англии, Дженокки в Италии — всюду не только заговорили о неевклидовой геометрии, но были сделаны шаги к ее развитию. В течении нескольких лет перевод упомянутой выше брошюры появился на всех культурных языках. В III томе незадолго до того возникшего в Москве журнала «Математический сборник» был помещен ее перевод на русский язык, принадлежавший профессору А. В. Летникову. Геометрия Лобачевского была теперь призвана к жизни и развитию. Уже в 1867 г. в совете Казанского университета был поставлен вопрос об издании полного собрания геометрических сочинений Лобачевского. Впрочем, осуществить это удалось гораздо позже. Замечательно, что теперь, когда идеи Лобачевского возродились, когда они были усвоены, их развитие пошло

[1]) См. примечание на стр. 101.

очень быстро. Этому не приходится удивляться; эти идеи были так ярки, так интересны, в них было еще скрыто так много нового, своеобразного, что крупнейшие геометры мира заинтересовались, занялись ими и получили замечательные результаты. Наибольшее впечатление произвела работа Бельтрами, опубликованная в 1868 г. Она сразу лишила неевклидову геометрию того фантастического налета, который вызывал отрицательное к ней отношение.

Мы уже говорили выше о поверхностях, на которых может быть построена геометрия теми же общими методами, при помощи которых развертывается геометрия на плоскости. Мы видели, что в гиперболическом пространстве существуют три типа такого рода поверхностей: на поверхности шара действует сферическая геометрия, в небольшой модификации называемая также *эллиптической геометрией* [1]); на плоскости имеет место геометрия Лобачевского, а на своеобразных предельных поверхностях — геометрия Евклида. Между тем в нашем обычном *евклидовом* пространстве существуют только два типа таких поверхностей: на поверхности шара имеет место та же сферическая геометрия, на плоскости — евклидова геометрия. Не естественно ли предположить, что в евклидовом пространстве должны существовать также поверхности, несущие на себе гиперболическую геометрию? К ответу на этот вопрос привели совершенно другие задачи, но результат оказался положительным. Оказалось, что в обычном евклидовом пространстве действительно существуют поверхности, которые несут на себе гиперболическую геометрию — планиметрию Лобачевского, правда, при некоторой модификации самой постановки вопроса. Рассмотрим это подробнее.

К выделению поверхностей, несущих на себе ту или иную геометрию в том смысле, как об этом шла речь выше, привело требование, чтобы на них было возможно свобод-

[1]) Эллиптическая геометрия отличается от сферической геометрии тем, что в ней две противоположные точки рассматриваются как один элемент, противоположные точки сферы как бы отождествлены — составляют одну точку эллиптической геометрии.

ное передвижение фигур без деформации — чтобы на них было возможно, оставаясь на поверхности, производить наложение одной фигуры на другую. В евклидовом пространстве есть только два типа поверхностей, на которых возможно такое передвижение фигур, — это плоскости и сферы. Но можно это требование несколько ослабить, не изменяя его по существу, и тогда количество поверхностей, ему удовлетворяющих, значительно возрастает. В этом смысле можно говорить о наложении фигур на поверхности цилиндра: движение фигуры на цилиндрической поверхности будет при этом сопровождаться некоторой деформацией — изгибанием, но никакие размеры ее при этом не будут изменяться. Это становится ясным, если вообразим себе кусок бумаги, навернутый на цилиндр, который мы можем передвигать по поверхности этого цилиндра, изгибая его, но не подвергая никаким растяжениям, не образуя на нем никаких складок. Будем теперь на поверхности цилиндра считать равными две фигуры, которые могут быть приведены в совмещение именно таким передвижением, хотя бы сопровождаемым изгибанием. Это вполне естественно, потому что такие две фигуры окажутся равными (конгруэнтными в обычном смысле этого слова), если обе их развернуть на плоскость. На рис. 11 можно видеть два треугольника, которые могут таким образом быть приведены в совмещение. При таком условии окажется, что и поверхность цилиндра несет на себе обыкновенную евклидову геометрию. Если с этой точки зрения подойти к другим поверхностям, если искать поверхности, на которых возможно наложение именно в этом смысле слова (при помощи передвижения, сопровождаемого изгибанием), то число поверхностей, на которых это возможно, значительно возрастает. И — что для нас важнее всего — Бельтрами показал, что в обыкновенном (евклидовом) простран-

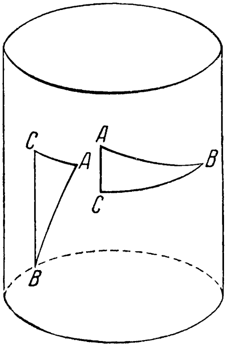

Рис. 11.

стве существуют поверхности, которые в этом смысле слова несут на себе двумерную геометрию (планиметрию) Лобачевского. Выражаясь фигурально, можно сказать, что на них навертывается гиперболическая плоскость, подобно тому как на наш обыкновенный цилиндр навертывается евклидова плоскость. Части такой поверхности имеют как бы седлообразный вид: они в одном направлении обращены,

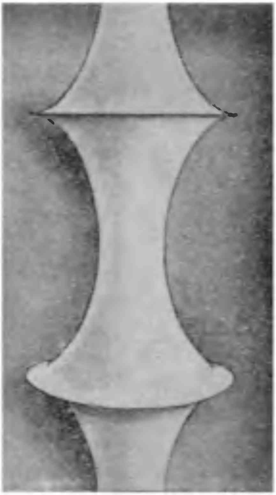

Рис. 12.

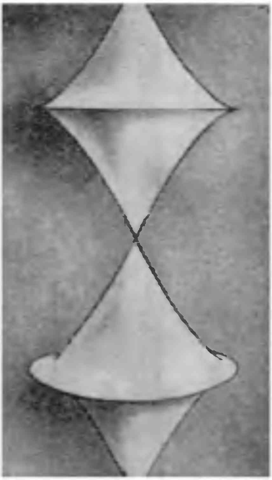

Рис. 13.

скажем, вверх (как седло по ребру лошади), а в перпендикулярном направлении — вниз (как седло поперек лошади). Все соотношения гиперболической геометрии, например, уравнения, связывающие стороны и углы геодезического треугольника, связь между радиусом и длиной окружности, ее площадью и т. п., здесь выполняются полностью совершенно так же, как это было предусмотрено планиметрией Лобачевского. Были сделаны многочисленные модели таких поверхностей. Эти поверхности называют обыкновенно *псевдосферическими*[1]). Каждый, кто был и в этом отношении заражен скепсисом (здесь уже неуместным), мог это проверить прямым измерением. Планиметрия Лобачевского получила осуществление на реальных образах, фантазия обратилась в действительность. Кажущееся расхождение с действительностью, которое вызывало столько возражений и даже негодования, имело источник в том, что теорети-

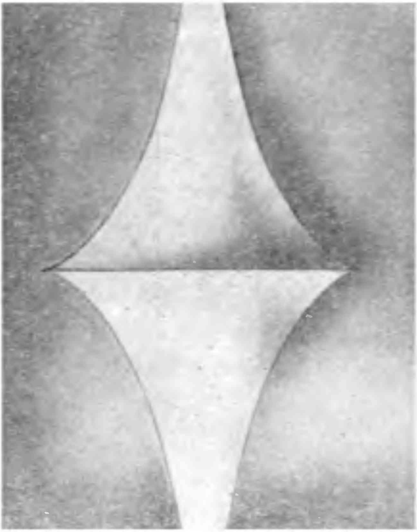

Рис. 14.

ческую систему, построенную Лобачевским, применяли, даже применял он сам, не к тем образам, на которых она получает осуществление, как одежда кажется несуразной, если ее надеть на человека, которому она не подходит. Это, конечно, грубое сравнение, но некоторое представление о том, что́ здесь имеет место, оно все-таки дает.

[1]) На рис. 12—14 изображены различные типы псевдосферических поверхностей.

Впечатление, произведенное этим открытием, было громадно. Поражало главным образом то, что чутье гениального геометра через фантастическую, на первый взгляд, гипотезу, через тонкие логические рассуждения, через сложные аналитические вычисления привело к неожиданной реальной действительности, которой не предусматривал сам автор. Теория здесь, в чистой математике, предвосхитила опыт.

Развернувшиеся на этой базе изыскания всё еще оставляли место некоторым сомнениям второстепенного значения, которые вызывались особым строением псевдосферических поверхностей (существованием на них особых точек, ребер, как это видно на чертежах, и т. п.). Однако на этом мы здесь не будем останавливаться. Гораздо серьезнее стоял другой вопрос: на псевдосферических поверхностях получила осуществление *двумерная* геометрия Лобачевского. Но ведь им построена геометрия *трехмерного* (гиперболического) *пространства*. Какова же ее судьба, может ли и она претендовать на конкретное осуществление? Ответ на этот вопрос принесли идеи другого геометра — Бернгардта Римана.

XIII

В 1854 г. Риман вступил доцентом в профессорскую коллегию Геттингенского университета. Для этого он должен был прочесть в общем собрании факультета пробную лекцию. Следуя принятому обычаю, он представил на усмотрение факультета три темы, из которых Гаусс выбрал третью, носившую название «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». При составлении этой лекции Риман в качестве слушателя явно имел в виду главным образом Гаусса, и потому она была составлена очень сжато; это скорее конспект, наметки ряда глубоких идей, нежели готовая к печати работа. Именно поэтому Риман ее не опубликовал, очевидно, имея в виду ее развить. Но он не успел этого сделать. Дедекинд извлек рукопись из наследия Римана и опубликовал ее в 1866 г. Идеи, в этой работе изложенные, имеют тесное соприкосновение с работами Лобачевского.

Риман начинает с установления понятия о «многообразии» как о совокупности элементов—объектов, выделенных, включенных в ее состав определенными признаками. В настоящее время термину «многообразие» предпочитают другой—по почину Кантора его называют *множеством*. Это — очень широкое понятие: всякая совокупность конкретных или абстрактных объектов, всякий коллектив вещей, понятий, идей представляют собой множество. Риман изучает множества особой категории, именно такие, в каждом из которых элемент может быть определен несколькими числовыми заданиями, или, просто говоря, несколькими числами. Количество этих чисел характерно для множества. Если элемент множества определяется n числами, то говорят, что оно имеет n измерений. Плоскость есть множество точек, элемент которого определяется двумя числовыми заданиями (его двумя координатами) — это есть двумерное множество. В таком же смысле сферическая, цилиндрическая, да и всякая вообще поверхность может быть рассматриваема как двумерное множество точек. Связка лучей в пространстве, выходящих из одной точки, также есть двумерное множество, потому что элемент этого множества определяется двумя числовыми заданиями (в терминах, принятых в астрономии, — высотой и азимутом); совокупность всех прямых на плоскости также есть двумерное множество. Каждая точка пространства определяется тремя числовыми заданиями (тремя координатами); пространство в обычном значении этого слова есть трехмерное множество точек; как обычно говорят, пространство имеет три измерения. Совокупность всех прямых в пространстве есть четырехмерное множество. В самом деле, зафиксируем какую-нибудь плоскость Q; прямая в пространстве определяется двумя координатами ее «следа» на плоскости Q, т. е. точки M, в которой она встречает плоскость Q, и двумя числами, которыми она определяется в связке прямых, выходящих из точки M. Совокупность всех окружностей на плоскости есть множество трех измерений; каждый ее элемент — окружность — определяется координатами центра и радиусом; совокупность всех сфер в пространстве есть множество четырех измерений. Совокупность всех эллипсов на плоскости есть многообразие пятимерное. Но многообразие не должно быть непременно составлено из элементов обыкновенного геометрического типа в обычном понимании этого слова. Гельмгольц стоял на точке зрения, принятой в его время, что все цвета могут быть составлены из трех основных цветов, в различных количествах взятых. С его точки зрения совокупность всех цветов есть трехмерное множество. Представим себе рой материальных частиц, несущихся в пространстве. В каждый момент элемент этого роя характеризуется тремя координатами точки, в которой он находится, а в течение времени — еще четвертым числовым заданием: указанием времени. Рой несущихся частиц в пространстве и во времени представляет собой четырехмерное множество.

Мы остановились подробно на этом понятии потому, что оно имеет основное значение, играет в настоящее время огромную роль как в математике, так и в приложениях, в особенности в физике.

Основной замысел Римана заключался в том, что геометрия вовсе не представляет собой, так сказать, исключительного достояния множества *точек* — двумерного (поверхности) или трехмерного (пространства). Можно строить геометрию прямых, геометрию кругов, шаров; можно идти гораздо дальше, можно строить геометрию множества цветов, геометрию роя и т. д. Конечно, если говорить об измерительной геометрии, то прежде всего необходимо установить исходный принцип для производства измерений в различных множествах; измерительную геометрию Риман именно и имел в виду. При такой широкой постановке вопроса, при таком расширении задачи геометрии возникает вопрос о том, ка́к понимать измерение в любом множестве, ка́к его производить, какое «мероопределение» в нем установить. Если не указать для этого общего принципа, то перспективы становятся совершенно расплывчатыми, не видно пути, по которому проникновение геометрии в другие множества должно идти. Риман это хорошо понимал. Центр тяжести его замысла, его главная заслуга в том именно и заключается, что он дал основной, исходный принцип для производства измерений в множествах, представляющих собой далеко идущее обобщение тех точечных многообразий, для которых была построена классическая геометрия. Дать подробное изложение этого принципа в этом небольшом очерке невозможно. Мы должны только здесь отметить, что этот замысел представлял собой естественное, но далеко идущее обобщение той схемы, по которой измерение ведется в евклидовом пространстве на поверхностях[1]).

Построенная на этом принципе геометрия носит название *римановой геометрии* (в широком смысле этого слова). Она получила широкое развитие. Были указаны различные множества, несущие очень своеобразные геометрические системы, которые отличаются одни от других своим «мероопределением». И естественно возник вопрос: каковы же наиболее простые из этих систем? Оказалось, что наиболее простыми являются те геометрии, с которыми мы уже познакомились: в двумерной области, т. е. в множествах двух измерений, — это прежде всего планиметрия Евклида; за этим следуют геометрии сферическая и гиперболическая — геометрия Лобачевского. Но Риман показал, что та и другая геометрия допускают развитие и в трехмерном пространстве. Трехмерная гиперболическая геометрия — это именно та, которую построил Лобачевский; трехмерная сферическая геометрия — это своеобразная геометрия, которую часто называют *римановой геометрией в узком значении слова*, в некоторой модификации — *эллиптической*. В этой геометрии все прямые (геодезические) замкнутые, имеют конечную и притом одну и ту же длину; всякие две плоскости пересекаются, как и всякие две прямые, на плоскости. Эллиптическая геометрия — это геометрия конечного пространства. Можно

---

[1]) Если x^1, x^2, x^3, ..., x^n — координаты точки множества (здесь цифры наверху — не показатели степени, а просто обозначения координат), x^1+dx^1, x^2+dx^2, ..., x^n+dx^n — координаты бесконечно близкой точки, то Риман принимает, что квадрат расстояния между ними выражается суммой членов вида $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, где g_{ij} суть функции от координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Это есть непосредственное обобщение обычного мероопределения на поверхности.

сказать: как над геометрией Евклида выросли геометрии Лобачевского и Римана (в узком смысле слова) — гиперболическая и эллиптическая, так над ними теперь поднялась геометрия Римана в широком смысле слова. Эволюция идет и дальше, охватывая все более разнообразные множества, подчиняя геометрии все большее число своеобразных, чисто материальных коллективов. Так расширилось самое понятие о геометрии, так разрослось ее содержание, так поднялось далеко ввысь ее здание. Как нами уже было сказано в самом начале, геометрия Евклида составляет в этом здании первый краеугольный камень в его фундаменте. Тысячи лет только он, этот основной камень, и существовал; Лобачевский первый стал строить это здание дальше. Это был почин, требовавший необычайной смелости ума; и когда он был осуществлен, когда была преодолена косность веков и идеи Лобачевского получили признание, геометрия была призвана к совершенно новой жизни, получила обширное, новое содержание, далеко идущие применения. Эта единственная наука, казавшаяся застывшей в своих классических формах, стала на путь широкой эволюции.

Очень любопытны и важны были множества, указанные Пуанкаре, Кэли, Клейном, в которых геометрия Лобачевского получила полное осуществление. Никаким сомнениям в ее логической правильности, в наличии каких бы то ни было противоречий, которые так склонны были предполагать, больше не могло быть места. К сожалению, дать здесь изложение, сколько-нибудь обстоятельное описание этих множеств нет возможности.

XIV

Как мы видели, весь этот обширный цикл идей возник на базе обоснования геометрии; к концу XIX столетия эта задача могла быть разрешена. Более того, были установлены начала, на которых должна логически строиться всякая математическая дисциплина, можно сказать больше — всякая дедуктивная дисциплина. В чем заключаются эти начала?

В основу всякой строго дедуктивной дисциплины должен быть положен ряд постулатов — требований, предъявляемых к тому множеству, к той совокупности фактов, понятий или идей, в которой эта система получает применение, в которой, как говорят, она осуществляется. Приступая к построению такой системы на базе определенной совокупности постулатов, нужно прежде всего показать, что в ней нет противоречия, нужно решить вопрос, который так настойчиво занимал Лобачевского всю его жизнь. И, чтобы это обнаружить, нужно показать такое множество, конкретное, составленное из материальных элементов, в котором все эти постулаты осуществляются: то, что конкретно существует, не может содержать противоречия; и нет иного критерия для доказательства *непротиворечивости* совокупности положений-постулатов, кроме того, чтобы показать реальное множество, в котором все эти постулаты осуществляются. Так это было осуществлено по отношению к геометрии Лобачевского.

Но в системе постулатов, лежащих в основе дедуктивной дисциплины, не должно быть и лишних. Если какой-нибудь постулат может быть выведен из остальных, то ему не должно быть места среди этих основных положений, он должен быть перенесен в совокупность выводов — теорем; система постулатов должна состоять из *независимых* посылок. Чтобы доказать независимость какого-либо постулата, нужно обнаружить существование множества, в котором все остальные постулаты осуществляются, а этот не оправдывается, не имеет места; нужно поступить так, как сделал Лобачевский для доказательства независимости постулата о параллельных линиях. Это нужно выполнить по отношению к каждому отдельному постулату.

К концу XIX столетия эта программа была в основном выполнена Гильбертом в Германии, Вебленом и Гентингтоном в Америке, Уиттекером в Англии[1]); можно сказать,

---

[1]) В России это было сделано В. Ф. Каганом, автором этой книги, в работе «Основания геометрии», напечатанной в 1905 г. Краткое изложение результатов этой работы будет напечатано в сборнике геометрических работ В. Ф. Кагана, подготовляющихся в настоящее время к печати. [*Ред.*]

что задача об обосновании геометрии пришла к первому своему завершению. Так, на базе идей Лобачевского, получил разрешение вопрос, тяготевший над математической мыслью в течение двух тысяч лет. И по этой схеме в настоящее время строятся все математические дисциплины; но глубоко лежащие трудности логического свойства здесь еще остаются. Если к этому прибавить, что Пуанкаре указал еще новое, очень замечательное применение гиперболической геометрии к анализу (к теории автоморфных функций), то этим до некоторой степени будет охарактеризовано состояние, в котором развитие идей Лобачевского находилось к концу XIX в. Текущее столетие принесло с собой новый взмах этих идей.

XV

Механика целиком построена на геометрии Евклида; кинематику обычно называют геометрией движения, и эта геометрия в классической механике есть геометрия Евклида. С изменением геометрии, естественно, должна измениться и механика.

Первые исследования по механике в пространстве Лобачевского были сделаны Тилли и Дженокки; это были еще попытки обнаружить несостоятельность неевклидовой геометрии путем вскрытия ее противоречия с принципами механики. С первых же шагов мы здесь наталкиваемся на ряд парадоксальных теорем. Так, в гиперболическом пространстве невозможно движение, при котором все точки описывают прямые линии; прямолинейную траекторию может иметь только одна точка твердого тела; поступательное движение в том виде, как оно осуществляется в евклидовом пространстве, не может иметь места в пространстве Лобачевского или Римана. Однако — это парадоксы такого же характера, как и те, которые возникали в самой геометрии; они не ведут к логическому противоречию. Верно лишь то, что механика в неевклидовом пространстве, будь то Лобачевского, будь то Римана, не та, что в обыкновенном евклидовом пространстве.

Теперь это выяснилось очень быстро, и скоро появились исследования по механике неевклидова пространства. Начало им положили два английских геометра — Клиффорд и Болл. За этим последовали работы большого числа математиков. Можно сказать, некоторое завершение этого вопроса принадлежит русскому геометру А. П. Котельникову [1]). Последний показал, что для построения механики неевклидова пространства наиболее целесообразно построить специальную, в известном смысле сдвоенную теорию векторов, другую теорию комплексных чисел. Геометрия Лобачевского проникла, таким образом, и в теорию векторов и в учение о комплексных числах. Механика гиперболического пространства ждала приложений — они не заставили себя долго ждать.

Хорошо известно, что в начале настоящего столетия, благодаря большим успехам в деле точного измерения, физические исследования, главным образом в области учения о распространении света и электромагнитных колебаний вообще, привели к некоторым сомнениям относительно абсолютной достоверности устоев классической механики. Было ясно, что на относительно небольших расстояниях, при сравнительно небольших скоростях классическая механика имеет место. Но были прямые указания на то, что при очень больших скоростях, порядка скорости света, эти законы не имеют места даже на сравнительно небольшом протяжении. Чтобы охватить и эти движения, нужно было построить другую механику. Как это сделать? Эйнштейн пришел к той мысли, что нужно построить более общую систему механики, содержащую скорость движения в качестве переменного параметра, которая при малых значениях этого параметра в пределах, доступных измерению, не отличается от классической механики. Ясно, что эта идея шла по замыслу Лобачевского, что новая механика должна была стоять в таком же отношении

[1]) А. П. Котельников, Проективная теория векторов, Известия Казанского физико-математического общества (2), VIII и IX. Вышло также отдельным изданием, Казань, 1899. В книге имеется обширная библиография по этому вопросу.

к классической, как геометрия Лобачевского к геометрии Евклида. Теория Эйнштейна, так называемый *специальный принцип относительности*, построена именно по этой схеме.

Принцип, составляющий основу этого построения, в настоящее время доминирует в теоретической физике. В прежнее время одна теория сменяла другую, стирая прежнюю, заменяя прежние гипотезы другими, которые исключали предыдущие. Теперь всюду получила применение другая схема: теория, объясняющая явления по существу, но все же обнаруживающая в тех или иных пунктах дефекты, заменяется более общей, содержащей численные или функциональные параметры, при частных значениях которых она возвращается к установившейся прежней теории. Этот замысел идет из геометрии, от творения Лобачевского.

Однако связь специальной теории относительности с геометрией в новом, широком ее понимании идет гораздо глубже.

Представим себе две среды в евклидовом пространстве, совершающие переносное равномерное движение одна относительно другой. Представим себе наблюдателя, находящегося в одной из этих сред, и поставим перед собой вопрос: как меняются, как перекристаллизовываются наблюдаемые им явления в восприятии наблюдателя, находящегося в другой среде? Дать ответ на этот вопрос является целью теории относительности. Замысел ее заключается в следующем.

В первой среде установим оси декартовых координат. Положение каждой точки второй среды относительно первой в каждый момент t определяется тремя координатами x, y, z. Если мы хотим проследить за тем, чтó происходит во второй среде с течением времени, нам нужно еще учесть момент времени, определяемый при установленном отсчете времени некоторым числом t. Числами x, y, z, t каждая точка второй среды определяется в пространстве и во времени. Вторая среда, движущаяся относительно первой, при учете этого движения с течением времени является четырехмерным множеством, — часто говорили и говорят, —

четырехмерным пространством. Эта замена терминологии, наименование этого множества пространством, вызывала немало смущения и недоразумений. Может быть, было бы осторожнее и целесообразнее не вводить этого термина. Для установления того, как происходит явление во второй среде, нужно было прежде всего установить мероопределение этого множества, нужно было создать геометрию этого множества в соответствии с теми явлениями, которые она должна охватить. Это и было выполнено Эйнштейном, а затем усовершенствовано Минковским. Геометрия Эйнштейна-Минковского — это геометрия четырехмерного многообразия, зависящая от одного параметра ($\frac{v}{c}$, где v — численное значение скорости второй среды относительно первой, а c — скорость света). Это есть геометрия движения, это — физика явлений во второй среде, учитывающая только ее движения, оставляющая вне своего поля зрения все остальные физические агенты — гравитационные и электромагнитные явления.

Специальный принцип относительности, можно сказать, вошел во всеобщее употребление. Следующий шаг должен привести к построению геометрии, охватывающей гравитационные явления (тяготение). Замысел Эйнштейна заключается в том, что это должно быть достигнуто введением в то же четырехмерное множество более сложной, углубленной метрики. В общих чертах это было Эйнштейном выполнено в его *общей теории относительности*; она включает специальную теорию как частный случай совершенно так же, как общая риманова геометрия включает в себя как частный случай геометрию Лобачевского.

Построить геометрию того же четырехмерного множества таким образом, чтобы она охватила также и электромагнитные явления, построить общую теорию поля — это задача, которая усиленно занимала физиков. Но даже общая схема этого мероопределения еще не найдена. Ясно одно, что эволюция геометрии, решающее направление которой дал Лобачевский, проникает во все разделы современной теоретической физики.

XVI

Предыдущее изложение далеко не охватывает всех форм развития, которые получили идеи Лобачевского; этого и нельзя сделать в пределах небольшого очерка, к тому же не входящего в более глубокие математические рассуждения. Но огромное значение идей Лобачевского, его творений в области геометрии, математики, во всей современной науке мы старались очертить с возможной полнотой.

Лобачевский положил начало широкой эволюции геометрии, которая казалась в своих основах совершенно законченной наукой. На основе его идей геометрия разрослась в огромное здание, в котором, как уже было неоднократно сказано, классическая геометрия Евклида составляет только фундамент, даже только основной камень в его фундаменте. На базе творения Лобачевского в основном получила полное разрешение задача обоснования геометрии Евклида, которая в течение тысячелетий блуждала в поисках новых путей. Более того, по этой схеме в настоящее время выполняется обоснование всякой математической дисциплины, вообще всякой дедуктивной науки.

Создание неевклидовой геометрии привело к первому завершению одного из основных вопросов теории познания. Неевклидова геометрия получила применение в анализе и теории функций.

По схеме и замыслу Лобачевского строятся теории современной физики, неевклидова геометрия в широком смысле этого слова составляет базу новых важнейших ее учений.

Все эти сложные вопросы основного значения еще далеки от окончательного разрешения. Но исследования, поиски этого разрешения идут по пути, общее направление которого предуказано Лобачевским. В ходе развития его творения еще отнюдь не сказано последнее слово.

Нет тех весов, на которых можно было бы взвесить сравнительное значение гениальных учений в области естествознания. Ломоносов — этот неустанный борец за русское просвещение и основоположник русской науки, Д. И. Менделеев, открывший важнейшую систему в химии, И. П. Павлов — создатель современной психо-физиологии, Н. И. Лобачевский — творец новой геометрии, — не будем задаваться вопросом, кто среди них занимает первое место. Несомненно то, что в плеяде гениальных русских ученых Лобачевский занимает одно из первых мест. Одно из самых выдающихся мест принадлежит ему и в мировой науке.

III

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ У ДРУГИХ ГЕОМЕТРОВ

К. Ф. Гаусс

Основные работы Н. И. Лобачевского при его жизни не были поняты и, более того, были подвергнуты суровой критике. Одной из причин такого отношения современников Лобачевского к его работам было крайне сжатое изложение их, недоступное даже высоко образованному математику. Математические мемуары по старой традиции обычно составляются очень сжато. Но работы Лобачевского содержали совершенно новый, исключительно своеобразный и по существу очень трудный материал; он требовал особенно четкого, вразумительного изложения.

Между тем, сжатость изложения у Лобачевского выходила далеко за пределы обычного. Трудно даже уяснить себе, чтó его к этому побуждало. Небольшая брошюра «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» именно и имела целью сделать элементы неевклидовой геометрии более доступными, обратить на нее внимание широкого круга читателей, владеющих математическим образованием. Но велика была сила инерции в математических кругах, очень своеобразны были идеи автора. Выход этой брошюры не изменил у нас отношения противников Лобачевского к его идеям. Но и за границей она не привлекла общего внимания, не встретила того признания, на которое Лобачевский рассчитывал. Напротив, и здесь в распространенном библиографическом журнале был помещен отзыв о только что появившейся небольшой книге Лобачевского, подписанной символически цифрой «140» [1]); рецензент находил, что достаточно привести одно из утверждений автора, чтобы быть свободным от дальнейшей оценки книги.

При всем том в Германии все же нашелся читатель, который эту небольшую книгу Лобачевского прочитал, вполне понял его своеобразные идеи и оценил их по достоинству. Это был великий геометр К. Ф. Гаусс. Он заинтересовался исследованием Лобачевского настолько, что изучил русский язык, чтобы ознакомиться со всеми его работами. В результате этого ознакомления он предложил Лобачевского в члены Геттингенского ученого общества — собственно геттингенской Академии наук — и лично уведомил его о состоявшемся избрании. Но в печати Гаусс не проронил ни одного слова о своем отношении к работам Лобачевского. И все же математический мир узнал о них именно благодаря Гауссу. Это произошло следующим образом.

Гаусс скончался в 1855 г. В конце пятидесятых годов известный немецкий издатель Петерс начал выпускать в свет переписку Гаусса с его другом Шумахером [2]). В пятом томе этого издания было опубликовано письмо Гаусса от 28/XI 1846 г., в котором он в восторженных выражениях говорит о замечательной книге Лобачевского «Geometrische Untersuchungen»; этим было обращено внимание всего математического мира на работы Лобачевского, и его «воображаемая геометрия» была вновь призвана к жизни.

В дальнейшем изучение переписки Гаусса с друзьями вскрыло еще ряд других фактов. Самым важным является то, что замалчивание в печати своих взглядов на работы

---

[1]) Repertorium der gesamelten deutschen Litteratur, Herausgegeben von Dr. E. G. Gersdorf, Leipzig, 1840, **25**, стр. 147—148.

[2]) «Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und G. C. Schumacher», herausgegeben von C. A. Peters. Тома появились в различные годы, последний — в 1863 г.

Лобачевского не было для Гаусса случайным. В сравнительно раннем возрасте Гаусс уже сам пришел к идеям, которые представляют собой первые шаги в области неевклидовой геометрии. Возникновение этих идей у Гаусса относится к последним годам XVIII в. Однако он продолжал размышлять над этими вопросами, и первые годы XIX столетия принесли с собой ряд колебаний и сомнений [1]). Но в десятых годах Гаусс утвердился в сознании, что возможна другая геометрия, отличная от классической, которую он сам назвал неевклидовой. В разработке этой геометрии он сделал, правда, только первые, элементарные шаги; но сомнений в том, что они допускают дальнейшее безупречное ее развитие, у него уже не оставалось. Однако, как человек весьма практический, он ясно отдавал себе отчет, что опубликование этих идей, глубоко революционных в их научном значении, вызовет бурю возражений и даже негодование со стороны подавляющего большинства математиков. Чтобы обезопасить себя от нареканий, нужно было развернуть новую геометрию гораздо глубже. Будучи занят другими исследованиями, Гаусс откладывал эту работу, твердо намереваясь все же сохранить эти идеи для потомства. Отрывки из различных писем и отдельные заметки, найденные в его литературном наследии, не оставляют сомнения в том, что Гаусс действительно владел исходными началами неевклидовой геометрии; но, как уже сказано, результаты, полученные им в этой области, не выходили за пределы элементарной геометрии [2]).

Так как задача о параллельных линиях была чрезвычайно популярна, то ею в первой половине прошлого века занимались многие, чаще всего молодые, иногда очень

[1]) P. Stäckel, Gauss als Geometer. Abdruck aus d. Heft 5. der «Materialen für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss», Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1917. Этот обширный мемуар вышел также отдельным изданием в виде приложения к X тому Полного собрания сочинений Гаусса.

[2]) О том, в какой мере Гаусс владел элементами неевклидовой геометрии, подробно сказано в очерке «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи», помещенном в этой книге. [*Ред.*]

талантливые математики; они обращались к Гауссу за разъяснением возникавших у них в связи с этим сомнений. Немногих из них он посвящал в свои взгляды на эти вопросы, но строго конфиденциально, с непременным требованием не оглашать их.

Ф. К. Швейкарт и Ф. А. Тауринус

Первые сообщения этого рода пришли из России.

С 1812 по 1816 г. в Харькове состоял профессором права Фердинанд Швейкарт (1780—1857). Живя в Харькове в глубоком одиночестве, Швейкарт посвящал свой досуг геометрии. Он еще раньше заинтересовался теорией параллельных линий и в 1807 г. опубликовал работу, содержавшую доказательство V постулата [1]. Убедившись потом в неправильности этого доказательства, Швейкарт во время своего пребывания в Харькове пришел к тем же воззрениям, которых придерживался Гаусс. В 1817 г. Швейкарт был приглашен в Марбург, где сблизился с профессором Герлингом, и через него препроводил Гауссу заметку следующего содержания:

> «Существует двоякая геометрия: геометрия в узком смысле слова — евклидова — и звездное (astralische) учение о величине.
>
> Треугольники последней геометрии имеют ту особенность, что сумма трех углов не равна двум прямым.
>
> Принимая это, можно самым точным образом доказать следующее:
>
> a) что сумма трех углов в треугольнике *меньше* двух прямых;
>
> b) что сумма эта тем меньше, чем больше площадь треугольника;

[1] F. K. Schweikart, Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie. Leipzig und Jena, 1808.

c) что высота прямоугольного равнобедренного треугольника, постоянно возрастая с возрастанием боковых сторон, не может превзойти некоторую линию, которую я называю *константой*.

Квадраты имеют поэтому следующий вид [рис. 1].

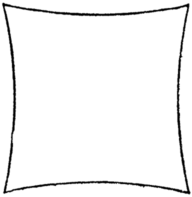

Рис. 1.

Если эта константа для *нас* равна радиусу Земли (в каковом случае всякая линия, проведенная в пространстве от одной неподвижной звезды к другой, отстоящей от нее на 90°, была бы касательной к *земному шару*), то она бесконечно велика по сравнению с протяжениями, которые мы встречаем в повседневной жизни.

Евклидова геометрия имеет место только в том случае, если константа бесконечно велика. Только в этом случае сумма углов каждого треугольника равна двум прямым, и это легко доказать, если принять, что константа бесконечно велика».

Для осведомленного человека совершенно ясно, что в этих немногих словах содержатся первые основные положения гиперболической геометрии. Она, конечно, не получила у Швейкарта сколько-нибудь углубленного развития, но в этой короткой заметке содержатся все те элементарные факты, из которых остальное уже непосредственно выводится.

Швейкарт, повидимому, не владел достаточно математикой, чтобы продвинуть свою «звездную геометрию» дальше того, что изложено в его заметке к Гауссу.

В переписке со своим племянником Тауринусом (1794—1874), в то время также изучавшим юридические науки, Швейкарт сообщил последнему о своих занятиях теорией параллельных линий и в общих чертах познакомил его с результатами, к которым он пришел. Тауринус отнесся к этому сначала совершенно безучастно, но через несколько лет, случайно познакомившись с упомянутой выше брошюрой Швейкарта, он с увлечением занялся теорией параллельных линий. В чем собственно его результаты в ту пору заключались, остается неизвестным, так как письмо Тауринуса к Гауссу, содержавшее изложение этих результатов, не сохранилось. Ответное письмо Гаусса от 8 ноября 1824 г. очень характерно. Он воздает, конечно, молодому автору должное, но говорит больше о себе, о своих собственных достижениях, чем об авторе. Гаусс посвящает его в собственные идеи по этому вопросу. Чрезвычайно интересную выдержку из этого письма мы приводим.

> «Допущение, что сумма трех углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной, совершенно отличной от нашей (евклидовой) геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя (für mich selbst) совершенно удовлетворительно; я имею возможность решить в этой геометрии любую задачу, за исключением определения некоторой постоянной, значение которой a priori установлено быть не может. Чем большее значение мы придаем этой постоянной, тем ближе мы подойдем к евклидовой геометрии, а бесконечно большое ее значение приводит обе системы к совпадению. Предложения этой геометрии отчасти кажутся парадоксальными и непривычному человеку даже несуразными; но при строгом и спокойном размышлении оказывается, что они не содержат ничего невозможного. Так, например, все три угла треугольника можно сделать сколь угодно малыми, если только взять достаточно большие стороны; площадь же треугольника не может превысить, даже не может достичь некоторого предела, как бы

велики ни были его стороны. Все мои старания найти в этой неевклидовой геометрии [1]) противоречие или непоследовательность остались бесплодными, и единственно, что в этой системе противится нашему разуму, это то, что в пространстве, если бы эта система была справедлива, должна была бы существовать некоторая сама по себе определенная (хотя нам и неизвестная) линейная величина. Но мне кажется, что мы, кроме ничего не выражающей словесной мудрости метафизиков, знаем очень мало или даже не знаем ничего о сущности пространства; мы не можем смешивать того, что нам представляется неестественным, с абсолютно невозможным. Если бы неевклидова геометрия была истинна и упомянутая выше постоянная находилась бы в определенном отношении к таким величинам, которые доступны нашему измерению на небе или на земле, то ее можно было бы определить a posteriori. Я поэтому иногда в шутку высказывал желание, чтобы евклидова геометрия не была истинной, потому что мы тогда имели бы a priori абсолютную меру длины» [2]).

Благожелательный тон Гаусса побудил Тауринуса продолжать свои занятия теорией параллельных линий, в результате чего он в 1825 г. опубликовал брошюру, посвященную теории параллельных линий [3]). В следующем 1826 г. он опубликовал новую брошюру, содержащую тот же материал в исправленном и дополненном виде [4]).

---

[1]) В этом письме, таким образом, впервые появляется термин «неевклидова геометрия». Заметим, что термин этот в настоящее время имеет более широкое значение, охватывающее как частный случай и ту неевклидову геометрию, которая была создана Лобачевским; последнюю в настоящее время обычно называют *геометрией Лобачевского* или *гиперболической геометрией.*

[2]) C. F. Gauss, Werke, т. VIII, Grundlagen der Geometrie. Göttingen — Leipzig, 1900.

[3]) F. A. Taurinus, Theorie der Parallellinien. Köln, 1825.

[4]) F. A. Taurinus, Geometriae prima elementa. Köln, 1826.

Стремясь, как уже указано выше, доказать постулат о параллельных от противного, Тауринус также пришел к константе Гаусса и Швейкарта и фактически открыл тригонометрию гиперболического пространства с такой полнотой, что решает при их помощи ряд задач, в том числе вычисляет длину окружности, площадь круга, поверхность и объем шара. Методы вычисления довольно тяжеловесны, изложение сжато и мало вразумительно—это в значительной мере обусловливалось тем, что Тауринус сам не отдавал себе полного отчета о содержании и значении проблем, решением которых он занимался. По существу, однако, Тауринусу принадлежит большая заслуга: он первый опубликовал прямолинейную тригонометрию неевклидовой (гиперболической) плоскости, повторяем, не отдавая себе, собственно, отчета в ее значении.

В предисловии к своей последней брошюре Тауринус в осторожной форме высказывает пожелание, чтобы Гаусс опубликовал свои взгляды на основы геометрии. Брошюры были, конечно, посланы Гауссу; но последний усмотрел в словах Тауринуса, помещенных в предисловии, нарушение его воли и прекратил с ним какие бы то ни было сношения. Не встретив ни малейшего признания своих идей, Тауринус впал в меланхолию; в припадке болезни он сжег оставшиеся у него экземпляры брошюр. В Европе сохранилось лишь несколько экземпляров этих брошюр. Профессор Энгель их разыскал и опубликовал те материалы, которые представляют интерес, в своем «Собрании первоисточников» [1]).

Янош Больаи [2])

Еще трагичнее была судьба молодого венгерского математика Яноша Больаи—сына Фаркаша Больаи, друга Гаусса. Молодой офицер получил математическое образование в военной академии. Назначенный в гарнизон небольшого городка в Трансильвании и находясь там в глу-

[1]) См. ниже, стр. 162.

[2]) Более подробные сведения о Я. Больаи даны в очерке «Янош Больаи», помещенном в этой книге. [*Ред.*]

боком одиночестве, он занялся теорией параллельных линий и пришел к сознанию возможности другой геометрии, отличной от евклидовой. После десятилетних размышлений он построил элементарные начала той геометрии, которая в настоящее время по праву называется геометрией Лобачевского. В 1832 г. Я. Больаи опубликовал эти результаты в виде приложения («Appendix») к учебному руководству своего отца. Отец и сын послали это руководство вместе с приложением Гауссу. В ответном письме Гаусс после нескольких слов одобрения говорит, однако, что он затрудняется хвалить работу Яноша потому, что это значило бы хвалить самого себя. Он сам давно владеет этими идеями, собирался их со временем опубликовать и очень доволен, что теперь освобожден от этой необходимости. Письмо носило довольно сдержанный характер; в печати же Гаусс ни единого слова об этой, несомненно замечательной, работе не проронил.

Не встретив никакой поддержки у Гаусса, Я. Больаи также впал в глубокую меланхолию, близкую к умопомешательству. Это состояние особенно ухудшилось в 1848 г., когда он получил от отца экземпляр «Geometrische Untersuchungen» Лобачевского. Он чрезвычайно тщательно изучил это сочинение, «отмеченное», по его словам, «печатью гения». Он написал обширные к нему примечания, но вместе с тем он не верил в существование Лобачевского; он был убежден, что жадный Гаусс хочет вырвать у него приоритет этого открытия, и опубликовал свои собственные исследования под псевдонимом Казанского профессора Лобачевского. Между тем Больаи никакого права на приоритет в открытии неевклидовой геометрии не имел: Н. И. Лобачевский опубликовал свой первый мемуар «О началах геометрии» в 1829 г., т. е. за три года до появления «Аппендикса», и еще в 1826 г., т. е. за шесть лет до опубликования книги Больаи, он доложил результаты своих замечательных исследований Физико-математическому факультету Казанского университета.

Однако не только в том, что Лобачевский опередил Больаи на несколько лет, заключается его общепризнанное преимущество. Уже в первой работе Лобачевского неевклидова геометрия развернута несравненно шире и глубже нежели это было сделано Гауссом и Больаи; в последующих же работах он дал им еще гораздо более углубленное развитие. Можно сказать, что работа Лобачевского находится в таком же отношении к результатам Гаусса и Больаи, как современная геометрия во всем ее развитии относится к элементам геометрии, к «Началам» Евклида. Это — творение несравненно более высокого порядка.

Оставляя теперь научную и переходя к моральной стороне дела, нельзя не поставить Лобачевскому в особую заслугу то, что он не убоялся «крика беотийцев», не устрашился, как Гаусс, «ос, которые поднялись бы над его головой»; не встретив сочувствия, он не сжег своих работ, как Тауринус, не ушел от людей, как Больаи. Он мужественно боролся всю жизнь за свои идеи; не встретив ни единого человека, который понял и оценил бы их, все же на краю могилы он еще раз продиктовал для потомства свое великое научное завещание, на базе которого геометрия совершенно изменила свой облик и свое строение.

И. Саккери и И. Г. Ламберт

Роль всего того круга людей, о которых речь шла выше, выяснилась, как мы видели, после опубликования переписки Гаусса с друзьями. Но в конце восьмидесятых годов прошлого столетия были как бы вновь открыты сочинения двух авторов, которых можно отнести к предшественникам Лобачевского и притом с тем бóльшим правом, что хронологически они первые приблизились к этому кругу идей. Это были итальянский монах Иероним Саккери (Girolamo Saccheri) и швейцарский философ и математик Генрих Ламберт (Johann Heinrich Lambert).

Рассуждения Лежандра, как мы видели, установили связь между теоремой о сумме углов треугольника и теорией параллельных линий. В дополнение к тому, что было уже сделано Насир-Эддином [1]), Лежандр доказал, что сумма углов треугольника не может быть больше двух

1) См. стр. 38—46 этой книги.

прямых и что она либо во всех треугольниках равна двум прямым, либо во всех треугольниках меньше двух прямых. Эта дилемма считалась существенным достижением Лежандра и в течение долгого времени связывалась с его именем. Но в 1889 г. известный итальянский геометр Е. Бельтрами обратил внимание на замечательное сочинение итальянского иезуита Иеронима Саккери, в котором все результаты Лежандра не только уже были опубликованы, но получили значительно большее развитие. Это сочинение — издание «Начал» Евклида под широковещательным заглавием «Евклид, освобожденный от всех пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии» [1]).

Это сочинение, несомненно, представлявшее собой труд многих лет, было опубликовано в 1733 г., уже после смерти автора, умершего в том же году. Тонко анализируя Евклида, Саккери очень подробно останавливается на постулате о параллельных линиях и действительно дает этому вопросу существенно новое освещение.

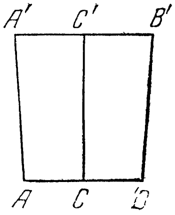

Рис. 2.

Точкой отправления для Саккери служит четырехугольник, который фактически встречается уже у Насир-Эддина.

Из крайних точек A и B отрезка AB (рис. 2) восставим к нему перпендикуляры AA' и BB', расположенные в одной плоскости по одну сторону прямой AB. На этих перпендикулярах отложим равные отрезки AA' и BB'. Таким образом, составится четырехугольник $AA'B'B$ с двумя прямыми углами при нижнем основании AB. Соединим середины C и C' оснований AB и $A'B'$; налагая четырехугольник $AA'B'B$ на себя другой стороной ($BB'A'A$), мы докажем, что прямая CC' перпендикулярна к обоим основаниям, а углы A' и B' равны между собой. Относительно этих углов может быть сделано три предположения:

[1]) G. Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriac. principia. Milano, 1733. Нем. перевод в соч. Штекеля (см. стр. 162).

либо эти углы тупые, либо они прямые, либо острые. Саккери показывает прежде всего, что, принимая то или другое предположение относительно одного четырехугольника этого типа, мы тем самым должны принять его также относительно всех четырехугольников того же типа. Иными словами, если какой-либо один из этих четырехугольников имеет при верхнем основании, например, острые углы, то и все четырехугольники этого типа имеют острые же углы. Саккери называет три различных допущения, которые здесь могут быть сделаны, «гипотезой острого угла», «гипотезой прямого угла» и «гипотезой тупого угла». Саккери доказывает далее, что при гипотезе тупого угла сумма углов всякого треугольника больше двух прямых, при гипотезе прямого угла она равна двум прямым, при гипотезе острого угла она меньше двух прямых. Далее доказывается, что гипотеза прямого угла эквивалентна постулату Евклида; чтобы доказать постулат, нужно, следовательно, опровергнуть две другие гипотезы. Но если принять гипотезу тупого угла, то прямые $A'B'$ и AB сближаются по обе стороны прямой CC' и сближаются настолько быстро, что по обе стороны должно произойти пересечение (Саккери это доказывает вполне строго); а так как две прямые не могут пересекаться в двух точках, то гипотеза тупого угла падает. Остается опровергнуть гипотезу острого угла. Этой гипотезе Саккери посвящает обширное исследование, занимающее около 80 страниц. Саккери показывает, что при гипотезе острого угла две непересекающиеся прямые, расположенные в одной плоскости, либо имеют общий перпендикуляр, от которого они расходятся, бесконечно удаляясь друг от друга в обе стороны, либо бесконечно удаляются друг от друга в одну сторону и неопределенно сближаются в другую сторону. Чтобы это обнаружить, нужен ряд подготовительных рассуждений, которые Саккери проводит с безупречной строгостью. Он показывает при этом, что перпендикуляр к стороне острого угла (при гипотезе острого угла) сначала пересекает вторую сторону, а потом, по мере удаления от вершины, перестает ее пересекать; что при этом существует предельный — первый не пересекающий — перпендикуляр и т. д. Словом, — это целая геометрическая система, соответствующая «гипотезе острого угла».

Но эта тонкая нить безупречных рассуждений внезапно прерывается теоремой XXXIII, в которой Саккери заявляет: «Гипотеза острого угла совершенно ложна, ибо противоречит природе прямой линии».

В чем же сказывается это противоречие? Рассматривая неограниченно сближающиеся прямые как пересекающиеся в бесконечно удаленной точке, Саккери приходит к заключению, что в этой бесконечно удаленной точке к обеим прямым можно было бы провести общий перпендикуляр, что «противно природе прямой линии». Человек, чрезвычайно тонко разбирающий доказательства Прокла, Насир-Эддина и Клавия, искусно вылавливающий глубоко сокрытую логическую ошибку, запутывается сам в элементарных рассуждениях, потому что он не имеет твердых оснований для суждения о том, в какой мере можно пользоваться бесконечно удаленными точками. При всей категоричности, с которой формулирована упомянутая выше XXXIII теорема, Саккери, очевидно, чувствует слабость этих рассуждений, ибо он заканчивает следующим примечанием:

> «На этом я мог бы спокойно остановиться, но я не хочу отказаться от попытки доказать, что эта упорная гипотеза острого угла, которую я вырвал уже с корнем, противоречит самой себе. Этому посвящены следующие теоремы настоящей книги».

Возвращаясь, таким образом, вновь к гипотезе острого угла, Саккери показывает, что геометрическое место точек в плоскости, удаленных на данное расстояние от данной прямой, представляет собой кривую линию («кривая равных расстояний» или «эквидистанта»). За этим следует подробный анализ этой кривой, совершенно правильный до тех пор, пока он не приступает к определению ее длины при помощи метода бесконечно малых. Здесь он вновь впадает в ошибку, которая заставляет его отвергнуть гипотезу острого угла. Но и здесь он кончает примечанием, указывающим, что и эти рассуждения его, в сущности, не удовлетворяли:

> «Не могу не указать здесь, — говорит он, — разницы между приведенными опровержениями обеих гипотез. При гипотезе тупого угла дело ясно, как свет божий... Между тем опровергнуть гипотезу острого угла мне не удается иначе, как доказав, что длина эквидистанты равна длине ее прямолинейного базиса» [1]).

Аналогичную постановку вопроса мы находим в сочинении математика и философа Генриха Ламберта «Теория параллельных линий», относящемся к 1776 г. [2]).

Ламберт рассматривает четырехугольник, имеющий три прямых угла. Относительно четвертого угла могут быть опять три гипотезы: либо это угол тупой, либо прямой, либо острый. Ламберт рассматривает каждую гипотезу отдельно и в некоторых отношениях он уходит значительно дальше Саккери.

Во-первых, Ламберт указывает, что гипотеза тупого угла оправдывается на сфере, если присвоить окружностям большого круга роль прямых линий: так как окружности эти имеют по две общие точки, то предложение,

---

[1]) В 1895 г. германские математики Ф. Энгель и П. Штекель выпустили первый том сочинения, очень важного для изучения истории неевклидовой геометрии; оно носит название «Собрание первоисточников по предистории неевклидовой геометрии»: F. Engel und P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Leipzig, 1895. В этом сочинении воспроизведены все материалы по неевклидовой геометрии, появившиеся в печати до сочинений Лобачевского. В нем помещен и немецкий перевод той части сочинения Саккери, которая относится к теории параллельных линий.

[2]) Johann Heinrich Lambert жил в 1728 — 1777 гг. Он написал ряд выдающихся сочинений по физике, логике и теории познания. Сочинение «Theorie der Parallellinien» было опубликовано в 1786 г. после смерти автора: J. H. Lambert, Theorie der Parallellinien. Magazin für die reine und angewandte Mathematik, Leipzig, 1786; помещено также в книге Энгеля и Штекеля на стр. 152—207.

при помощи которого эта гипотеза отвергается на плоскости, здесь не находит себе применения.

Во-вторых, он ведет гипотезу острого угла еще дальше, нежели Саккери; он знает, например, что при этой гипотезе площадь треугольника должна быть пропорциональна разности между $2d$ и суммой его углов. Стройность умозаключений, к которым ведет гипотеза острого угла, и в особенности упомянутый сейчас факт наводят его даже на следующее размышление:

> «Я склонен даже думать, что третья гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере. Должна же быть причина, вследствие которой она на плоскости далеко не поддается опровержению, как это легко может быть сделано со второй гипотезой».

Гениальные люди часто предвидят истину! Слова Ламберта оправдались ровно через сто лет.

В-третьих, наиболее важная заслуга Ламберта заключается в том, что он не впал в заблуждение и не признал достаточным ни одного доказательства, опровергающего гипотезу острого угла.

> «Доказательства евклидова постулата, — говорит он, — могут быть доведены столь далеко, что остается, повидимому, ничтожная мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат».

В другом месте Ламберт восклицает:

> «В этом есть нечто восхитительное, что вызывает даже желание, чтобы третья гипотеза была справедлива.
>
> И все же я желал бы, несмотря на это преимущество[1]), чтобы это было не так, потому что это

[1]) Существование абсолютной меры длины.

было бы сопряжено с целым рядом других неудобств. Тригонометрические таблицы стали бы бесконечно пространными; подобие и пропорциональность фигур не существовали бы вовсе; ни одна фигура не могла бы быть представлена иначе, как в абсолютной своей величине, и астрономии пришлось бы плохо...».

Указывая ряд абсурдов, с точки зрения наших представлений, к которым приводит гипотеза острого угла, Ламберт замечает, что все это не дает логического доказательства, что все это, как он выражается, «argumenta ab amore ac invidia ducta» [1]), аргументы, которым не может быть места в геометрии. Как и профессор Кестнер, много занимавшийся теорией параллельных линий, — быть может, лучший знаток этого вопроса в XVIII в., как и ученик последнего, Клюгель, Ламберт приходит к твердому выводу, что все попытки доказать V постулат Евклида не привели ни к чему.

---

[1]) «Аргументы, вызываемые любовью и недоброжелательством».

IV

ЯНОШ БОЛЬАИ

Вся жизнь и творчество Яноша Больаи в такой мере связаны с деятельностью и влиянием его отца Фаркаша Больаи, что дать очерк жизни Яноша, не посвятив несколько страниц его отцу, вряд ли возможно[1]).

Первая статья, посвященная отцу и сыну Больаи, была написана Францем Шмидтом, венским архитектором, в 1868 г. [2]). Сведения об этих математиках Шмидт имел главным образом от своего отца Антона Шмидта, также архитектора, работавшего в городе Марош-Вашаргель, где протекала бóльшая часть жизни обоих Больаи. В то время о неевклидовой геометрии имели понятие лишь очень немногие европейские математики; архитектор Шмидт, конечно, не имел о ней представления: статья Шмидта не касалась творчества отца и сына Больаи и отражала только уважение к памяти двух замечательных математиков,

---

[1]) Авторы, писавшие о Больаи, вместо венгерского имени Больаи-отца Фаркаш употребляют латинизированное имя Вольфганг, а вместо имени Янош — имя Иоанн. Эти имена утвердились в европейской, в том числе и в нашей литературе. Правильнее, однако, сохранить за обоими Больаи их настоящие венгерские имена.

В венгерском языке ударение всегда падает на первый слог (Фáркаш, Я́нош, Бóльаи). О произношении фамилии Больаи см. ниже, стр. 167.

[2]) Fr. Schmidt, Aus dem Leben zweier ungarischen Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya. Archiv der Mathematiker und Physiker 48, 1868.

которое сохранилось в академических сферах Венгрии. Когда в 70-х годах прошлого века возродился интерес к работам Больаи, Шмидт задался целью тщательно изучить их жизнь и деятельность и написать обстоятельную их биографию. Но это ему не удалось, и через 30 лет, в 1898 г., он опубликовал о них лишь краткие биографические сведения [1]). Почти в то же время И. Бедёгаци, профессор коллегии в Марош-Вашаргеле, в которой в свое время работал Фаркаш Больаи, опубликовал обширную биографию обоих Больаи [2]). Однако она напечатана на венгерском языке и мало кому доступна. В позднейших работах Штекеля приведены многие выдержки из нее, но сколько-нибудь ясного представления об идеях не только Яноша, но даже его отца Бедёгаци не имел.

На юбилейном торжестве по случаю столетия со дня рождения Яноша Больаи германский математик Л. Шлезингер, уже глубоко изучивший неевклидову геометрию, произнес речь, которую опубликовал в 1903 г. [3]); она содержит уже не только краткие биографические сведения главным образом о Яноше Больаи, но и научную характеристику его творчества.

С начала 90-х годов прошлого столетия два германских математика Ф. Энгель и П. Штекель предприняли совместно издание обстоятельного труда, посвященного предистории и возникновению неевклидовой геометрии. Первый выпуск этого издания, составленный главным образом Энгелем, появился в 1895 г. [4]). После этого они

---

[1]) Fr. Schmidt, Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann Bolyai. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **8**, 1898.

[2]) J. Bedëházi, A ket Bolyai (Два Больаи). Maros-Vásárhely, 1897. [Апострофы над гласными буквами означают в венгерском языке не ударение, а долготу слога].

[3]) L. Schlesinger, Johann Bolyai. Festrede gehalten bei der von der ungarischen Universität veranstalteten Bolyai-Feier am 15. Januar 1903. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **12**, 1903.

[4]) P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, herausgegeben in Gemeinschaft mit F. Engel, Leipzig, 1895.

разделились: Энгель посвятил следующую работу Н. И. Лобачевскому [1]), а Штекель занялся изучением жизни отца и сына Больаи.

Задача, которую поставил себе Штекель, оказалась исключительно трудной: работы Лобачевского, которые изучал Энгель, были напечатаны; между тем, Янош Больаи опубликовал только «Аппендикс» и оставил около 1500 листов рукописей — статей и заметок, написанных на различных языках — на венгерском, латинском и немецком. Штекель тщательно изучил венгерский язык и в течение свыше десяти лет изучал все литературное наследие Яноша, а также всевозможные материалы и документы, относящиеся к жизни и деятельности обоих Больаи. В результате он в 1913 г. выпустил в свет последнюю часть труда, состоявшую из двух томов и посвященную жизни и творчеству отца и сына Больаи [2]). Первый том посвящен жизнеописанию обоих Больаи и характеристике их трудов, второй содержит обширные выдержки из их сочинений. Весь этот материал разработан с такой исчерпывающей полнотой, что вряд ли нуждается в дальнейшем в каких-либо дополнениях. В книгу включены также обширные извлечения из переписки Гаусса с Шумахером и со старшим Больаи.

Таковы материалы, на основании которых составлен настоящий очерк.

В юго-восточной части Венгрии, в так называемой Трансильвании, было местечко, называвшееся Больа [3]). В этом местечке большой земельный участок принадлежал

[1]) F. Engel, Nikolay Ivanovitsch Lobatschefsky, Zwei geometrische Abhandlungen aus dem russischen übersetzt mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers. Leipzig, 1898.

[2]) P. Stäckel, Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. I. Leben und Schriften der beiden Bolyai. II. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. Leipzig und Berlin, 1913.

[3]) В венгерском языке сочетание ly после гласной буквы произносится, как «й». Поэтому название Bolya и фамилия Bolyai произносятся, как Бóйа и Бóйаи. Однако в русской научной литературе укоренилось написание и произношение Больа и Больаи. Сохраняем эту традицию.

семье Больаи; она и называла себя «Больаи из Больа» (Bolyai de Bolya). Когда-то это была богатая и знатная семья — крупные землевладельцы. Штекель имел возможность проследить ее родословную до XVI столетия. С течением времени семья Больаи обеднела и лишилась большей части своих владений. Правда, мать Фаркаша получила в приданое небольшое имение, называвшееся Домальд (Domáld).

Фаркаш Больаи родился в 1775 г. в Больа. В 1781 г. родители перевезли мальчика в главный город Семиградского княжества — Надженьед [1]) и поместили в реформатско-евангелистскую коллегию, которая представляла собой среднее учебное заведение. В нем имелись, однако, два старших класса, преподавание в которых носило уже характер начал высшего образования, подготовляло учащихся в университет. Чрезвычайно одаренный мальчик поражал своей памятью и способностью производить в уме сложные математические вычисления. Это и вызвало впервые его интерес к математике. Но когда он стал требовать и в других предметах точных доказательств, то его учитель, профессор теологии, убедил его не заниматься математикой, «так как ее стремления все доказывать, проникавшие и в вопросы богословия, исходят от дьявола». Фаркаш поддался увещаниям и сначала отказался от занятий математикой. Его воззрения скоро изменились; одно время он был даже склонен к атеизму, но и эти настроения продолжались недолго. Вообще неустойчивость интересов как в юности, так и в зрелые годы была характерной его чертой.

Подходило время думать о выборе специальности; Фаркаш очень колебался. Одно время учитель рисования склонял его к занятиям живописью. Но заболевание глаз, вызванное взрывом пороха собственного изготовления, лишило его возможности пойти по этому пути. Средства его отца к этому времени были ограничены, и вряд ли он мог бы получить серьезное образование, если бы не благоприятные обстоятельства, оказавшие решающее влия-

---

[1]) Nadyenyed, ныне Айуд (Aiud) в Румынии.

ние на всю его жизнь: Фаркаш был приглашен бароном Кемень (K. Kemény) в его семью для совместных занятий с его сыном Симоном; Фаркаш и Симон стали большими друзьями. К концу средних классов школы Фаркаш склонялся к поступлению в артиллерийскую академию; но Симон Кемень его отговорил и убедил поехать вместе с ним в Германию — в университет. Они поехали сначала в Иену, а потом в Геттинген, где научные интересы Фаркаша окончательно склонились к математике. В этом большую роль сыграло его сближение с Гауссом, с которым он познакомился в доме профессора астрономии Зейфера (C. Seyffer). Юный Гаусс был на два года моложе Фаркаша Больаи; они очень подружились и даже принесли друг другу клятву в вечной дружбе. В беседах с Гауссом окрепли интересы Фаркаша к основаниям геометрии, в частности к вопросу о доказательстве XI аксиомы (V постулата) Евклида. Кафедру геометрии в Геттингенском университете занимал Кестнер (A. G. Kästner). Кестнер не был очень крупным геометром, но он очень хорошо знал Евклида и обширную литературу, с ним связанную. По инициативе Кестнера его ученик Клюгель (S. Klügel) написал диссертацию, содержавшую обзор важнейших попыток доказать постулат о параллельных линиях, и показал, что ни одно из этих доказательств не выдерживает критики. В этой обстановке, в общении с Кестнером и Гауссом Фаркаш Больаи, естественно, заинтересовался основаниями геометрии, в частности доказательством V постулата. С Гауссом они об этих вещах часто беседовали, и Гаусс с восторгом отзывался о высказанных Фаркашем мыслях. В это время Фаркаш уже задумал доказательство, которое он позднее много раз перерабатывал — в литературе оно известно под именем «геттингенской теории параллельных линий» и изложено Штекелем в указанном выше (стр. 167, сноска [2])) мемуаре. Гаусс уехал из Геттингена раньше, а потом перед отъездом Больаи они снова встретились в Гарце и подтвердили принятую клятву дружбы на всю жизнь.

Больаи к тому времени был в такой мере стеснен в средствах, что был вынужден вернуться на родину пешком.

Однако, когда он дошел до границы Трансильвании, Симон Кемень, узнав о его затруднениях, прислал за ним экипаж, который довез Фаркаша до Клаузенбурга[1]) — главного культурного центра Трансильвании. Тут он остался, заинтересованный общением с венгерской интеллигенцией. По его воспоминаниям, проведенные здесь три года были лучшими годами его жизни. В 1800 г. он познакомился на балу с молодой девушкой Сусанной Аркос, дочерью местного хирурга, и вскоре женился на ней. Со свойственной ему экзальтацией Фаркаш пишет Гауссу восторженные письма о своем счастье. Однако счастье это длилось недолго: молодая жена Фаркаша была очень больна, страдала тяжелой истерией. От этого брака — от талантливого, экзальтированного и непостоянного в своих стремлениях отца и матери-истерички — в декабре 1802 г. родился сын Янош; он превзошел отца в своих дарованиях и унаследовал от матери ее болезнь, позже еще усилившуюся вследствие тяжелых переживаний. Семья переехала в Домальд, в имение, принадлежащее Фаркашу, но здесь она оставалась недолго.

В Трансильвании было четыре евангелистско-реформатских коллегии, в одной из которых Фаркаш начал свое образование. В городе Марош-Вашаргель[2]) функционировала другая такая же коллегия. В 1803 г. скончался профессор Чернатон (V. Csernáton), занимавший там кафедру философии и математики. Коллегия сочла нужным разделить эти две специальности, организовав отдельную профессуру по математике, физике и химии. На эту кафедру в 1804 г. был приглашен Фаркаш Больаи. Не без колебаний принял Больаи это приглашение. В апреле 1804 г. он переехал в Марош-Вашаргель, где оставался на своем посту около 50 лет.

Со свойственной ему добросовестностью Фаркаш Больаи занялся глубоким изучением предметов, входящих в его

[1]) В настоящее время этот город носит румынское название К л у ж.

[2]) Название означает «рынок на реке Марош». В настоящее время этот город носит румынское название Т ы р г у-М у р е ш.

кафедру, и подготовкой курсов. Был ли он на высоте своей задачи? «Из трех качеств ответственного преподавателя, — говорит Штекель, — он обладал двумя и притом в высокой степени: он был энтузиастом своей науки и горячо любил молодежь». Но он не обладал способностями излагать свои мысли в доступной форме, выбирать материал для своей аудитории. Он сознавал этот свой недостаток и тяжело это переживал.

В то же время Фаркаш вновь занялся исследованиями в области математики и, конечно, прежде всего своей геттингенской теорией параллельных линий; он отдал этой задаче много сил и в тщательно обработанном виде прислал свое доказательство Гауссу. Но в его рассуждениях была элементарная ошибка, на которую Гаусс ему указал. Фаркашу это причинило много огорчений. Позднее, в 1821 г., к этому присоединилось большое семейное несчастье — умерла его жена.

Чтобы найти утешение, которого он не нашел в математике, Фаркаш обратился к литературному творчеству. В Венгрии возник театр; одно время Фаркаш предполагал даже принять в нем участие в качестве артиста, однако от этого он отказался. С большим рвением он занялся писанием пьес и написал пять трагедий, но ни одна из них не была поставлена на сцене. Его произведения, как и все, что он делал, носили экзальтированный характер, содержали длинные беседы о морали при отсутствии действия.

Потерпев неудачу в театре, Больаи направил свои силы в другую сторону — весьма неожиданную. Специальной комиссии в Вене было поручено сконструировать экономическую печь, но комиссия эта не справилась со своей задачей. Больаи, узнав об этом, в качестве химика занялся этим делом и не без успеха. Его печь получила в Венгрии распространение.

Но главным его занятием была подготовка к печати курса математики. Он работал над этим курсом около 20 лет, постоянно возвращаясь то к одним, то к другим его частям.

Тем временем подрастал его сын Янош. Отец лично руководил занятиями сына, и успехи мальчика были единственным утешением в безрадостной жизни Фаркаша. В 13 лет Янош уже владел дифференциальным и даже интегральным исчислением. В 1816 г., когда Яношу минуло 14 лет, отец написал об его успехах Гауссу, но на это письмо не получил ответа. Это было первым нарушением клятвы, данной друзьями в студенческие годы.

Между тем, разносторонняя одаренность мальчика сказывалась не только в математике. Семи лет Янош начал учиться игре на скрипке, а в 10 лет он уже имел свои собственные композиции. На протяжении всей жизни страстный интерес как к математике, так и к музыке в нем не угасал. В 1817 г., 15 лет от роду, Янош выдержал экзамен на аттестат зрелости. Надо было думать о высшем образовании.

Отец и сын — оба мечтали о том, чтобы Янош продолжал свое образование под руководством Гаусса в Геттингене. Еще до окончания Яношем коллегии, 10 апреля 1816 г., Фаркаш написал об этом Гауссу. Он не решался предоставить 15-летнего юношу самому себе, да и не был в состоянии расходовать значительные суммы на содержание сына в большом городе. Он просил Гаусса взять юношу в свою семью с тем, что он, конечно, оплатит связанные с этим расходы. Фаркаш уверял Гаусса, что он найдет в Яноше достойного ученика.

В течение многих месяцев и отец и сын с волнением ожидали ответа на это письмо. Но ответа не было. «Насколько горячей была дружба вначале, настолько она успела остыть за годы», — пишет биограф Больаи Бедёгаци. Однако Шлезингер, который не в состоянии принять никакого упрека Гауссу и готов оправдать любой его поступок, говорит по этому поводу: «Нужно удивляться не столько молчанию Гаусса, сколько соображениям, высказанным в письме Больаи за и против этого плана». Действительно, Фаркаш спрашивал Гаусса, нет ли у него дочери, в интересах которой пребывание юноши в их доме было бы нецелесообразно; он спрашивал, все ли в семье Гаусса здоровы, живут ли они безбедно, представляет ли его супруга «исключение из всего женского пола», «не меняется ли подобно флюгеру ее настроение». Конечно, эти вопросы лишены такта, но их можно было при желании легко отвести, простить старому другу неудачные фразы. Во всяком случае, со стороны Гаусса было жестоко прекратить только из-за этого переписку, продолжавшуюся столько лет.

Так или иначе, от этого плана Фаркашу Больаи пришлось отказаться и надо было искать другие пути для дальнейшего образования Яноша. После продолжительных колебаний отец решил поместить сына в военно-инженерную академию в Вене — закрытое учебное заведение, не требовавшее значительных расходов. К тому же программа обучения в этой академии предусматривала значительный курс математики. В конце жизни Янош горько жаловался на это решение отца. Он считал, что отец поступил бы лучше, если бы оставил его у себя и продолжал сам руководить его занятиями.

В августе 1818 г. Янош отправился в Вену. С особенно тяжелым чувством отпускала его мать, не рассчитывавшая его больше увидеть; и действительно, как уже сказано, в сентябре 1821 г. она скончалась.

С августа 1818 г. Янош в течение четырех лет состоял студентом военно-инженерной академии. Он работал успешно, все время занимая второе место в своем классе. Преподавателем математики состоял Вольтер Эквер (Wolter v. Eckwer); это был военный, повидимому, хорошо владевший теми разделами математики, которые преподавал; но от научных задач современной ему математики он, конечно, стоял далеко. Янош получил солидные, но не углубленные познания. Из академии он вышел дисциплинированным человеком с серьезными знаниями как в области военного дела, так и в области математики. Одного, однако, академия не достигла — она не могла сделать из математика офицера.

Во время пребывания в Вене Янош познакомился с Карлом Сасом (K. Szász) — математиком, который позже заменил его отца на кафедре в Марош-Вашаргеле. Уже в Вене Янош некоторое время работал совместно с Сасом над доказательством постулата о параллельных линиях; оба были чрезвычайно увлечены этой проблемой и даже дали друг другу обещание только сообща публиковать свои дальнейшие достижения.

Отношения Яноша с отцом во время пребывания в академии были нормальны: отец был вполне доволен успехами Яноша и возлагал большие надежды на его будущее. Здесь будет уместно рассказать о новом увлечении Фаркаша, относящемся к этому периоду. Венгерским правительством был объявлен конкурс на пост заведующего лесничеством. Эта должность оплачивалась много выше, нежели профессура. Фаркаш со свойственным ему увлечением занялся тщательным изучением лесного дела; он имел уже некоторые познания по лесоводству с того времени, когда занимался хозяйством в своем имении в Домальд. В связи с конкурсом он изучил около сорока сочинений по лесоводству и просил сына поддержать в Вене его кандидатуру. Однако должность эта Фаркашу не была предоставлена.

Первого сентября 1823 г. Янош был произведен в офицеры и в чине младшего лейтенанта командирован в небольшую крепость Темешвар[1]). Здесь в одиночестве, располагая значительным досугом, Янош со свойственным ему увлечением всецело ушел в занятия математикой и был поглощен главным образом теорией параллельных линий. Вначале он шел по пути, который они наметили совместно с Сасом, но позже его мысли приняли другое направление. С 1823 г. Янош сообщает в письмах к отцу, что достиг в своих исследованиях значительных результатов. Правда, пишет он, я не достиг еще цели, но получил очень замечательные результаты — из ничего я создал целый новый мир!

Когда отец узнал об увлечении сына теорией параллельных линий, он пришел в глубокое отчаяние. Он умолял Яноша оставить эти занятия. Он пишет ему:

---

[1]) Temesvár. В настоящее время этот город называется Тимишоара.

«Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий на этом пути; я знаю этот путь, я проделал его до конца, я пережил эту беспросветную ночь, и всякий светоч, всякую радость моей жизни я в ней похоронил. Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; ты должен его страшиться, как чувственных увлечений; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя — оно тебе погубит всю радость жизни. Эта беспросветная мгла может поглотить тысячу ньютоновых башен, и никогда на земле не прояснится; никогда несчастный род человеческий не достигнет совершенной истины, — даже в геометрии! Да хранит тебя бог от этого увлечения, которое тобой овладело. Оно лишит тебя радости не только в геометрии, но и во всей земной жизни. Я был готов сделаться мучеником этой истины, чтобы только очистить геометрию от этого пятна, чтобы передать роду человеческому безукоризненную науку. Я проделал ужасную, гигантскую работу; я достиг много лучшего, нежели то, что было получено до меня; но совершенного удовлетворения я не получил!».

Это письмо на Яноша не подействовало. Янош продолжал работать над проблемой о параллельных линиях еще около десяти лет, пока привел свои исследования в полный порядок. Он посылал отцу выдержки из своей работы, но тот не сумел уяснить себе его идей и продолжал настаивать на том, чтобы Янош оставил эти занятия.

Однако служба в Темешваре была Яношу в тягость. К тому же и здоровье его пошатнулось; вместе с тем раздражительность и несдержанность, унаследованные им от матери, стали все больше проявляться. Происходили стычки с товарищами, кончавшиеся поединками. Доходило даже до того, что в один день он был вызван двенадцатью офицерами. Он принял все вызовы с тем условием, чтобы после каждого поединка ему была предоставлена передышка — поиграть на скрипке. Во всю его трудную жизнь музыка была его единственным утешением. Из всех поединков он вышел победителем.

В 1833 г., после 10 лет военной службы, которая стала для него невыносимой, Янош возбудил ходатайство об отставке, которая была ему предоставлена с небольшой пенсией в 280 гульденов в год.

Как уже сказано выше, Янош с 1823 г. начал заниматься проблемой параллельных линий. Несмотря на расхождения во взглядах на этот вопрос, отец склонился к тому, чтобы помочь Яношу опубликовать свою работу.

К 1830 г. Фаркаш составил свой курс математики и решил его опубликовать в двух томах. Задача была нелегкая: объявленная подписка дала только 175 подписчиков; тем не менее Фаркаш решил довести издание до конца. Янош убедил его поместить в качестве приложения («Appendix») к первому тому его собственную работу. Отец согласился с тем условием, чтобы все расходы по напечатанию этого приложения Янош взял на себя. Под названием «Аппендикс» [1]) это замечательное произведение геометрической мысли известно в литературе до сих пор.

Сочинение отца известно в литературе под названием «Тентамен» (Tentamen). Полное его латинское название: «Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi»; в русском переводе гласит: «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики, элементарной и высшей, приспособленным для этого наглядным методом. Публичного ординарного профессора математики, физики и химии [Ф. Больаи]. Том. I. Марош-Вашаргель, 1832».

---

[1]) Приводим полное латинское название сочинения: «Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica». Русский перевод: «Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может), с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга». [*Ред.*]

Первый том этого сочинения появился в 1832 г. Но отдельный оттиск «Аппендикса» вышел из печати несколько раньше, в 1831 г., и экземпляр его тотчас послан был Гауссу. Однако в Австрии в это время была холера, и посылка до Гаусса не дошла. Через несколько месяцев отец и сын послали книгу оказией с письмом, в котором Фаркаш просил Гаусса сообщить свое мнение о работе сына; «мой сын ставит на твой отзыв больше, чем на мнение всей Европы», — пишет он.

Получив это письмо и «Аппендикс», Гаусс сейчас же написал своему другу Герлингу, что он получил от Больаи замечательную работу и считает ее автора «гением первого ранга». Однако Фаркашу Больаи он ответил значительно позже — только через месяц, 6 марта 1832 г. и в гораздо более сдержанном тоне. После приветствия «своему старому незабвенному другу» и кратких сведений о своей жизни за время 15-летнего молчания Гаусс обращается к работе Яноша. Эта часть письма настолько характерна и интересна, что мы приводим начало ее текстуально:

> «Теперь кое-что о работе твоего сына. Если я начну с того, что *я ее не должен хвалить*[1]), то на мгновение ты поразишься, но я не могу поступить иначе: хвалить ее — значило бы хвалить самого себя, ибо все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, — почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен.
>
> Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать. Большинство людей совершенно не имеют правильного понятия о том, о чем здесь идет речь; я встретил только очень немногих людей, которые с особенным интересом восприняли то, что я им об этом сообщал. Чтобы быть в состоянии это понять, надо сначала живо ощутить

[1]) Подчеркнуто Гауссом.

то, чего собственно здесь недостает, а это большинству людей совершенно неясно. Но я имел намерение со временем нанести на бумагу все, чтобы эти мысли, по крайней мере, не погибли со мной.

Я поэтому очень поражен тем, что я освобожден от этой необходимости, и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил».

Затем следуют различные соображения относительно текста «Аппендикса», о задачах, которыми, следуя замыслам «Аппендикса», было бы интересно заняться.

Ответ Гаусса, конечно, не только не удовлетворил Яноша, но вызвал в нем естественное возмущение. Первоначально Янош даже не поверил тому, что Гаусс независимо от него пришел к основным идеям неевклидовой геометрии.

К сожалению, в это время Янош еще не знал, что приоритет открытия неевклидовой геометрии принадлежал уже русскому математику Н. И. Лобачевскому, опубликовавшему свои результаты в 1829 г. в Казани. Между тем, Янош предполагал, что «жадный колосс Гаусс» хочет похитить приоритет этого открытия, присвоив эти идеи себе. Более того, он даже пришел к нелепой мысли, что отец выдал его идеи Гауссу. Но и позже, когда Янош убедился в том, что эти его предположения лишены основания, он оставался в убеждении, что поведение Гаусса по отношению к нему очень неправильно и несправедливо. И это его убеждение, конечно, имело полное основание. Вместо того, чтобы поддержать замечательные идеи молодого математика, он больше останавливается на своих собственных заслугах, а в печати не проронил ни единого слова в поддержку этого «гения первого ранга». В наследии Яноша Больаи сохранилось много заметок по этому поводу. Мы приведем одну из них, которую сообщает Штекель.

Янош Больаи пишет:

«По моему мнению и, как я глубоко убежден, по мнению каждого непредубежденного человека, все доводы, которые Гаусс приводит в объяснение того, почему он вовсе не хотел опубликовать при жизни ничего из собственных работ [по этому вопросу] — бессильны и ничтожны. Ведь в науке, как в действительной жизни, дело заключается в том, чтобы всемерно выяснить необходимые общеполезные, хотя еще неясные вещи, и вместе с тем пробудить еще дремлющее сознание истины, укрепить и развернуть его. Понимание математики, к сожалению, пробудилось еще у немногих людей. И на этом основании, под таким предлогом Гаусс мог бы совершенно последовательно скрыть значительную часть своих прекрасных работ. И то обстоятельство, что, к сожалению, даже между математиками, в том числе и знаменитыми математиками, имеется много поверхностных, — это обстоятельство отнюдь не может служить для разумного человека основанием и впредь заниматься только поверхностным и посредственным, держать науку в летаргии, в унаследованном ее состоянии. Такого рода умонастроение справедливо можно было бы назвать противоестественным и чистым безрассудством; поэтому производит весьма неприятное впечатление, что Гаусс вместо прямого, честного, искреннего признания высокого значения „Аппендикса“ и всего „Тентамена“, вместо того, чтоб с радостью и участием проложить путь новому учению и подумать о том, как бы искуснее изложить эти идеи, дать хорошим мыслям надлежащий путь, — Гаусс, напротив, старается этого избежать и изливается в благочестивых пожеланиях и сожалениях по поводу недостатка у читателей достаточного образования. Не в этом, конечно, состоит жизнь, деятельность и заслуга ученого!».

Штекель отмечает, ка́к много правды в этих словах. Но Шлезингер, для которого характерно филистерское благоговение перед всем, что было высказано гениальным ученым, думает иначе. «Может быть, — говорит он в своей речи, — Гаусс поступил правильно, когда он молчал, как бы не желая предвосхищать развития истории; может быть, его сдержанность, которую мы, не будучи в состоянии проследить путей его великого ума, находим непонятной, оберегла Яноша от того, чтобы „беотийцы“ [1]) охаяли его как дурня и еретика,—обеспечила ему по крайней мере мир и уединение, хотя он, как и большинство основоположников науки, и не мог при жизни увидеть плоды из посеянных им семян».

Шлезингер, конечно, совершенно неправ. В своем слепом подчинении авторитету Гаусса он готов оправдать любой, даже неправильный его шаг. Ведь именно отзыв Гаусса, прозвучавший, к сожалению, уже после его смерти в его письмах, в значительной мере способствовал возрождению и признанию замечательных идей Лобачевского и Больаи! И не подлежит сомнению, что на Гауссе лежит тяжелая ответственность за те переживания, которые омрачили жизнь Яноша и довели его до состояния, граничившего с психическим расстройством.

Было бы уместно хотя бы вкратце изложить содержание самого «Тентамена». Но это трудно сделать. Тентамен—сочинение, которое нелегко прочитать, труднее понять, еще много труднее изложить. «О нем многие говорили,—замечает Штекель,—но очень немногие читали!». При всем стремлении к точности оно несет печать той экзальтации, которая так свойственна всему, что Фаркаш делал, говорил и писал. Свое вступление автор начинает с двух основных понятий, которыми он руководится,—«Истины» (Veritas) и «Любви» (Amor). «Истина»—это то, что объективно неоспоримо, «любовь»—это то, что субъек-

[1]) Выражение Гаусса. «Бояться крика беотийцев» означало—бояться упреков невежд. Гаусс в своем письме Бесселю писал о своих работах по неевклидовой геометрии:

«Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, что я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что я боюсь крика беотийцев, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком».

тивно освещает истину в связанных с нею представлениях. Желая выяснить «истину», автор оснащает ее таким количеством «любви», что нередко истина в этой любви растворяется.

«Тентамен» состоит из двух частей. Первая содержит общий обзор арифметики, вторая — общий обзор геометрии. И в той и в другой частях автор стремится построить «истину» соответствующей науки из неоспоримых ясных понятий и начал; но эти попытки тонут в большом количестве отступлений.

Всё же его рассуждения во многих своих частях представляют интерес как оригинальные попытки построить строго выдержанную систему арифметики и геометрии. Эта тенденция, имевшая вековую давность, с середины XIX столетия принимает новые формы и становится насущной задачей в ходе обоснования математики; Фаркаш пытается идти по этому пути; он старается определить понятие о непрерывном линейном множестве и континууме, привлекая для этого *время* не только в качестве примера, но и как средство исследования. В геометрии Фаркаш впервые выдвинул требование независимости посылок. Он первый строго доказал, что равновеликие многоугольники всегда равносоставлены, т. е. могут быть составлены из соответственно конгруентных частей. В нем нельзя не видеть предшественника Фреге, Пеано и др. Но почти всегда его мысли растворяются в пространных и рискованных рассуждениях.

В противоположность ему Янош излагает свои мысли чрезвычайно сжато, не допуская не только лишнего слова, но даже лишней буквы. Эта сжатость изложения делает чтение «Аппендикса» очень затруднительным [1]). К тому же, стараясь уменьшить расходы, Янош пользуется одним и тем же чертежом для различных целей. Несмотря на эти расхождения с отцом в научном стиле, Янош высоко ценил «Тентамен»; по крайней мере он не раз отзывался о «Тентамене» с полным признанием и похвалой, однако

---

[1]) Об этом подробнее сказано в очерке «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи». [*Ред.*]

недостаточно строгие и пространные рассуждения отца его раздражали. В свою очередь Фаркаш, постепенно уясняя себе идеи «Аппендикса», не овладел ими до конца и многое в них оспаривал.

Вследствие этих расхождений между отцом и сыном возникали разногласия, которые скоро перешли в острые споры, а при нараставшей раздражительности Яноша перешли в раздоры. Повидимому, отношения отца с сыном еще обострялись материальными и семейными разногласиями. Отец женился вторично; ко времени приезда Яноша его вторая жена уже умерла. При Фаркаше оставался его сын от этого брака, маленький Грегор, которого Янош долго совершенно чуждался, и это раздражало отца. Еще более осложнились отношения, когда Янош в 1834 г. сошелся с девицей Розалией Орбаи и хотел на ней жениться. Однако и в отставке он все же оставался в подчинении военному начальству, которое давало согласие на этот брак только при условии материального обеспечения семьи. Янош такового предоставить не мог, а отец отказался выделить сыну некоторую долю своего имущества. Условия жизни становились все труднее, Янош становился все раздражительнее, его возбуждение принимало болезненный характер; отцу было трудно это понять.

Неприязненные отношения все более углублялись; дело дошло до того, что Янош вызвал отца на дуэль. Вмешался брат Фаркаша, который их примирил; но Янош должен был оставить родительский дом. Он переехал сначала в Домальд, а потом, когда у него появились дети, вернулся в Марош-Вашаргель. Однако, живя в одном городе с отцом, Янош не встречался с ним и только время от времени вступал с Фаркашем в своеобразную научную переписку.

Янош был поглощен главным образом развитием геометрических идей, изложенных в «Аппендиксе». Он хотел развернуть на новых началах всю геометрию и о своих достижениях сообщал отцу, но они действительно вызывали возражения и отца не удовлетворяли. Это еще больше увеличило вражду между ними, которая и достигла наибольшего напряжения в 1838 г.

Около этого времени был объявлен конкурс на премию Лейпцигского ученого общества им. Яблоновского. В качестве темы было предложено усовершенствовать геометрическую теорию мнимых чисел. Отец и сын оба приняли участие в конкурсе. Фаркаш представил переработанное извлечение из «Тентамена», Янош написал на эту тему новую работу. Между ними разгорелся жестокий спор о преимуществе той или иной работы, который еще осложнился личными столкновениями, возникшими на этой почве. Ни один из них не получил премии; не получил ее и третий претендент профессор Керекеш (F. Kerekes)[1]. Жюри дало о работах обоих Больаи отзывы, которые, несомненно, не были справедливы.

Особенно несправедлив был отзыв о работе Яноша. Между тем, эта работа, позже опубликованная Штекелем, по замыслу и построению мало отличалась от теории комплексных чисел, которая на несколько лет позже (1853 г.) была изложена Гамильтоном в его «Лекциях о кватернионах»[2]) и по существу сохранила свое значение до настоящего времени. Но, как и все работы Яноша, она была написана чрезвычайно сжато. Так, § 8 содержал начало общей теории логарифмической функции, позже вошедшей в теорию функций комплексного переменного; однако у Яноша эта теория была скорее намечена, чем построена. Два параграфа опирались на неевклидову геометрию, изложенную в «Аппендиксе»; непосвященному читателю они были совершенно недоступны. Были и другие недоделки. На оценке сказались, вероятно, и высказанные Яношем упреки теории Гаусса, хотя и выраженные в самой почтительной форме.

Может быть, «Обществу» действительно трудно поставить в упрек его неблагоприятный отзыв. До некоторой степени это признавал и сам Янош; но он сознавал высокое

---

1) Имена претендентов Обществу не были известны; как это издавна делалось, работа помечалась девизом (условной надписью). Работа Яноша имела девиз: «Fructus nonnisi maturi decerpendi» («Срывать надлежит только спелые плоды»).

2) W. R. Hamilton, Lectures on quaternions. Dublin, 1853.

достоинство своей работы, и новая неудача была для него очень тяжелым ударом. К сохранившемуся экземпляру этой работы приложена следующая его заметка.

> «Жаль, что этот большой клад попал в недостойные руки. В меру своих сил „Общество“ выполнило свой долг и свою обязанность, но теперь очередь за мной судить „Общество“. Защищать здесь нечего, поскольку противник ничего определенно не критикует, не приводит оснований, по которым он то или другое считает неважным или для него непонятным, а между тем своим властным словом он объявляет все в целом ничего не стоящим и непонятным. Такого рода осуждение было бы уместно относительно работы, в которой нельзя было бы найти ничего хорошего или понятного; но утверждать что-либо такое обо мне, который имел случай в вопросах, гораздо более трудных и глубже сокрытых, получить высокое признание Гаусса (колосса, по сравнению с которым вы только карлики!) — это дерзко, и я не могу надивиться, как „Общество“ себе позволило вынести такого рода приговор вместо того, чтобы снова и снова изучать работу».

И Янош, несомненно, был прав. «Теория мнимых чисел, построенная Яношем, — замечает по этому поводу Штекель, — несомненно была кладом, который, однако, нужно еще было вычеканить, прежде чем его можно было бы использовать. Она действительно представляла существенный шаг вперед после той точки зрения, которую занял Гаусс относительно направления нового учения о комплексных числах. Однако то, что нам теперь совершенно ясно, оставалось для Яноша еще туманным. Гениальной интуицией он предугадал решение проблемы, но он еще не был в состоянии дать проработанное, всем доступное изложение предмета».

Все это, несомненно, справедливо; но гениальный мыслитель, который и в этом сложном вопросе стоял впереди своего века, потерпел новое испытание, которое он очень тяжело перенес.

В последующие годы — почти десять лет — Янош работал над различными вопросами, относившимися главным образом к развитию неевклидовой геометрии. Больше всего его интересовало строгое доказательство того, что она не содержит в себе внутреннего противоречия. По отношению к геометрии плоскости это вытекало из известного соотношения между неевклидовой и сферической тригонометрией; но ка́к доказать, что к такому противоречию не может привести и стереометрия, к этому не видно было путей. В посмертных записках Больаи Штекель не нашел никаких результатов этого исследования.

Так прошло десять лет. В 1848 г. произошло событие, которое для Яноша было новым тяжелым ударом.

В 1840 г. появилась на немецком языке небольшая книжка Н. И. Лобачевского «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» («Геометрические исследования по теории параллельных линий»). Брошюра эта была в свое время прислана Гауссу, который ее очень высоко оценил. В августе 1843 г. Гаусса посетил Ф. Ментович (Fr. Mentovich). Это был тогда еще молодой венгерский математик (после Саса он занял кафедру математики в Марош-Вашаргеле). Приблизительно через год после этого посещения Ментович опубликовал в венгерской газете содержание своей беседы с Гауссом. В этой беседе Гаусс расспрашивал его о «своем старом друге» Больаи и о его сыне. Вместе с тем Гаусс показал Ментовичу брошюру Лобачевского, в которой содержатся те же идеи, что и в работе Яноша Больаи. «Эта работа, — сказал Гаусс, — должна для венгерского математика иметь двоякий интерес, — во-первых, по удивительному сходству его взглядов с идеями молодого Больаи, а во-вторых, потому, что и другие работы Лобачевского, написанные на русском языке, должны быть венгру доступны». Гаусс, очевидно, ошибался, считая, что венгерский язык близок к славянским языкам.

Эта заметка сначала, повидимому, ускользнула от внимания Больаи; только в январе 1848 г. Фаркаш осведомился у Гаусса о названии этого сочинения. Гаусс сообщил ему название; Фаркаш выписал эту книгу и препроводил ее Яношу. День 17 октября 1848 г., когда Янош получил «Геометрические исследования» Лобачевского, он считал началом новой эпохи своей жизни.

Сначала Янош вовсе не хотел верить в существование «какого-то Лобачевского»; он высказал мнение, что брошюру эту написал Гаусс, который всё еще претендует на приоритет открытия неевклидовой геометрии. Эти предположения сменялись другими. Приводим отрывок из «Замечаний» Яноша [1]), опубликованный Штекелем.

> «Дух и результат этого сочинения в такой мере совпадает с „Приложением“ (Appendix) к сочинению „Тентамен“, опубликованному в 1832 г., что этому нельзя не удивляться. Уже Гаусс, по его словам, был в высшей степени поражен сначала «Аппендиксом», а затем замечательным совпадением работ мадьярского и московитского математиков. Воистину, я этим поражен не меньше!
>
> Конечно, сущность чистой истины как в Марош-Вашаргеле, так и на Камчатке и даже на Луне, короче говоря, — на всем свете должна быть одна и та же. Что открывает одно разумное существо, то может открыть и другое — это не лишено возможности. К тому же, произведения ума, как и продукты природы — по ходу развития человечества, — имеют свое время, когда они появляются; так иногда на суше и на море изучается один и тот же предмет, и появляются родственные идеи, как это имело, например, место в случае дифференциального и интегрального исчисления. Наконец, и самый предмет этот не особенно труден и не так скрыт. Но если все же подумать, ка́к мало было глубокомысленных математиков, даже среди лучших из них, которые пришли к осознанию этого пробела в геометрии и стремились к его восполнению, — что со времен Евклида и даже со времени существования человечества, несмотря на многие пре-

---

[1]) Об этих «Замечаниях» см. ниже (стр. 188).

красные глубокие исследования (между ними в отношении строгости, ясности и глубины рассуждения „Тентамен“, непосредственно предшествующий „Аппендиксу“, бесспорно, занимает первое место) в этой области, по крайней мере, в печати[1]) ничего значительного не появлялось, если принять во внимание, что столь серьезный Эттингаузен[2]) не был в состоянии понять „Аппендикс“, — если все это принять во внимание, то вряд ли можно считать вероятным, что два или даже три человека, ничего друг о друге не зная, почти в одно и то же время, хотя и различными путями, почти полностью исчерпали вопрос.

После этих соображений я не считаю лишенным основания подозрение — хотя я здесь очень неохотно его высказываю — не предназначая его для опубликования, что Литтров[3]), как почетный член Казанского университета, может быть в прошлом профессор математики, находился в переписке с Лобачевским и послал ему экземпляр „Тентамена“, который мой отец переслал ему в Вену; Лобачевский же, как человек бесспорно талантливый, уяснил себе цель и значение этой работы и старался достигнуть той же цели другим путем. Но еще вероятнее то, что Гаусс — колосс, и без того владевший такими сокровищами — не мог примириться с тем, что кто-то в этом вопросе его предвосхитил; и так как он уже не был в состоянии этому воспрепятствовать, то он сам обработал теорию и выпустил в свет под именем Лобачевского».

«Геометрические исследования» появились в свет только в 1840 г., но во вступлении к этому сочинению Лобачевский указал, что первую свою работу, содержащую

---

[1]) Явный намек на Гаусса.

[2]) Эттингаузен (Ettinhausen) — один из преподавателей математики, которого Янош слушал в Вене; Янош послал ему экземпляр «Аппендикса».

[3]) И. И. Литтров состоял профессором астрономии с 1810 по 1816 г. в Казанском университете. Он, таким образом, оставил Казань задолго до того, как Лобачевский занялся теорией параллельных линий.

эти результаты, он опубликовал в «Казанском Вестнике» в 1829 г., т. е. за три года до выхода в свет «Тентамена». Больаи не мог, таким образом, претендовать на приоритет, который, бесспорно, принадлежал Лобачевскому.

Янош чрезвычайно тщательно изучил книгу Лобачевского и продумал каждое его слово. Он написал на венгерском языке обширные «Замечания», которые сохранились в его наследии. Штекель и Кюршак опубликовали их в 1902 г. в оригинале, а в следующем году — в немецком переводе [1]). Эти «Замечания» частью посвящены пояснению мыслей Лобачевского, частью представляют собой любопытные, но несущественные, можно сказать, придирчивые упреки; только одно замечание, относящееся к § 36, действительно содержит указание на недоделку. Однако в сочинении «Новые Начала геометрии» у Лобачевского этого дефекта нет, а в «Пангеометрии» он отмечен и исправлен. Во всяком случае, Янош Больаи отдает Лобачевскому справедливость, называя некоторые из его выводов «гениальными».

Посвятив много времени изучению «Геометрических исследований», Янош занялся развитием своей «абсолютно истинной» геометрии, выполнил ряд вычислений, в том числе вычисление объема тетраэдра в неевклидовой геометрии, и, наконец, вернулся к «Общим основаниям» геометрии. И тут он неожиданно усомнился в правильности своей новой геометрии.

Его привело к этому следующее обстоятельство. Противоречие, как уже указано выше, можно было искать только в стереометрии. Имея это в виду, Янош рассматривает тетраэдр и вычисляет его двугранные углы (их косинусы) через шесть ребер тетраэдра. Оказалось,

---

[1]) P. Stäckel und Kürschák, Johann Bolyas Bemerkungen über Nicolaus Lobatschefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Mathem. und naturwiss. Berichte aus Ungarn, Bd. 18, 1903. «Замечания» включены также в работу Штекеля, приведенную на стр. 167 [сноска [2])]. [Они почти полностью помещены в качестве дополнения к русскому изданию «Аппендикса». — *Ред.*]

что вычисление каждого угла возможно провести двумя способами. Полученные в том и другом случаях выражения содержат гиперболическую постоянную, которую Янош обозначает через i. Приравняв два полученных выражения, он получает *уравнение*, из которого должно получиться значение i. Основной вывод «Аппендикса» — что i может иметь произвольное значение — таким образом, отпадает. Стараясь, однако, это значение i действительно получить, Янош убеждается, что полученное им равенство представляет собой *тождество*. Тогда он обращается к пентаэдру (к многограннику, имеющему пять вершин и десять ребер). Вычислив и здесь двугранные углы, каждый двумя способами, и вновь приравняв полученные два выражения, Янош пришел к заключению, что получаемое равенство действительно представляет собой *уравнение* относительно i. Стало быть, система S (неевклидова) *ложна*, а вместе с тем доказан постулат о параллельных линиях.

Больаи приступает к составлению работы, заголовок которой гласит: «Доказательство XI евклидовой аксиомы, которая до сих пор на земле оставалась сомнительной, действительно в высшей степени важное, так как она служит основанием всего учения о пространстве и движении». Введение содержит важные биографические сведения об авторе и его отце. Однако дальше Янош не пошел, так как убедился, что в сложное вычисление вкралась ошибка — уравнение действительно оказалось тождеством.

«Развертывая эту идею, — замечает Янош, — следовало бы перейти к системе шести точек; однако трудоемкие вычисления, которые здесь возникают, способны остановить самого настойчивого вычислителя». Янош их не продолжает и, таким образом, как бы остается в сомнении, не возникает ли в стереометрии неевклидова пространства противоречия. Решение этого вопроса выпало на долю геометров более позднего времени. Янош же был отвлечен другого рода задачами.

В начале пятидесятых годов Гаусса посетило еще одно, по выражению Яноша, «достойное доверия лицо»; кто это был — так и не удалось выяснить. Когда в беседе речь зашла о параллельных линиях, Гаусс в восторженных выражениях отозвался о работах Лобачевского, но вовсе не упомянул о Больаи. Это, повидимому, объясняется тем, что Гаусс за это время познакомился с мемуаром Лобачевского в XIV томе журнала Крелля; он заинтересовался работами Лобачевского и даже занялся русским языком, чтобы ознакомиться с остальными его мемуарами. Это пренебрежение Яноша очень обидело; в его бумагах Штекель обнаружил весьма резкое выражение по этому поводу.

Под влиянием этой обиды, нанесенной Гауссом, Янош Больаи решил вернуться к математическим исследованиям и превзойти как Лобачевского, так и Гаусса. Но здесь сказалось его недостаточно глубокое математическое образование: он ставил себе явно неосуществимые задачи. Он хотел доказать, что каждое алгебраическое уравнение допускает решение в радикалах; очевидно, он не знал уже опубликованной работы Абеля. Он пытался доказать, что каждая элементарная функция допускает интегрирование в элементарных же функциях. Он пытался установить выражения, с помощью которых можно выразить все простые, даже алгебраические числа. Выше уже было сказано, что Фаркаш первый доказал возможность разложения равновеликих многоугольников на конгруентные части. Теперь Янош старался доказать ту же теорему для равновеликих многогранников. Из сохранившихся набросков видно, что он затратил много усилий для решения этой задачи. В настоящее время хорошо известно, что такое разложение неосуществимо [1]). Любопытно, что над этой задачей некоторое время бесплодно трудился и Гаусс.

Наброски Яноша, сообщает Штекель, заполняли много листов. Они всегда начинаются торжественным возвещением о великих открытиях; читая, однако, дальнейшее, находишь только пространные рассуждения, в которых автор запутывается и ничего нового, существенного не

[1]) См. В. Ф. Каган, О преобразовании многогранников. 2-е изд., М. — Л., 1933.

дает; в них нет и следа того глубокого мастерства, которое так характерно для «Аппендикса».

Годы творчества прошли. Неудачи, обиды, тяжелая жизнь обессилили Яноша Больаи. Человек большого проникновения, Больаи не мог выдать за достижение то, что действительного достижения не представляло. А совершенное одиночество делало его жизнь чрезвычайно тягостной. Реальные задачи заменяются фантастическими и приносят ему новые разочарования.

В числе этих фантазий нельзя не упомянуть об одном замысле, к которому он много раз возвращался в течение своей жизни. Он стремился создать науку наук, которую он назвал по-немецки «Allheillehre» — учение о всеобщем благе. В сохранившихся набросках Штекель нашел свыше двенадцати обширных заголовков этого учения. Насколько можно судить, это учение должно было содержать систему правил жизни и государственного устройства, которая принесла бы благо всему человеческому роду. И эта система должна была, по замыслу Яноша, быть построена строго на математической основе. Это, как замечает Штекель, — не наука, а скорее религия, не апеллирующая к божеству; она содержит следы утопического коммунизма.

Шли годы. Фаркашу было уже свыше 80 лет, и в этом преклонном возрасте он тяжело болел. Свои книги он завещал коллегии, где раньше преподавал. Это распоряжение вызвало новую, последнюю ссору между отцом и сыном, который хотел книги отца сохранить для себя.

В своем завещании Фаркаш выразил настойчивое требование, чтобы его похороны происходили без священника, без торжественности, чтобы на могиле его не ставили памятника. Он скончался в 1856 г.

Янош пережил отца только на три года. Он скончался 27 января 1860 г. В последние годы тяжелые переживания и неудачи его жизни сломили не только физические, но и душевные его силы. И ответственность за горькую судьбу этого гениального страдальца нельзя снять с «геттингенского колосса».

Прошло сорок лет. За эти годы была установлена логическая правильность неевклидовой геометрии. Она широко развернулась и принесла бессмертную славу ее творцам. В 1903 г. Венгерская академия наук организовала торжественное чествование памяти Яноша Больаи по случаю столетнего юбилея со дня его рождения. Установили международную премию его имени, «Аппендикс» переведен на различные европейские языки. Гордость венгерского народа — Янош Больаи — справедливо может быть причислен к классикам мировой науки.

V

СТРОЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ У ЛОБАЧЕВСКОГО, ГАУССА И БОЛЬАИ

§ 1. Создание неевклидовой геометрии

Постулат Евклида о параллельных линиях с древних времен привлекал внимание геометров, стремившихся освободить от него геометрию, доказать содержавшееся в нем утверждение, вывести его из предыдущих постулатов и аксиом. Н. И. Лобачевский, а также Гаусс и Больаи отличаются от своих предшественников на этом пути тем, что они первые, независимо друг от друга, пришли к сознанию возможности такой геометрии, в которой место V постулата (аксиомы о параллельных линиях) занимает противоположное допущение. Предшественники их (Саккери, Тауринус и др.) уже делали выводы из такого допущения, иногда очень глубокие, но ими всегда руководило стремление доказать постулат от противного. Одни из этих предшественников так или иначе запутывались в своих выводах и приходили к убеждению, что им удалось доказать постулат, другие не впадали в эту иллюзию. Саккери, более других углубившийся в «гипотезу острого угла», дважды победоносно утверждает, что он «с корнем вырвал» эту упорную гипотезу, но Ламберта уже не ввели в заблуждение ни свои, ни чужие доказательства[1]). Однако ни один из них не стал на ту точку зрения, что геометрия, отличная от евклидовой, действительно возможна. Правда, Ламберт, доказав, что при «гипотезе острого угла» должна была бы существовать абсолютная единица длины, восклицает: «В этом есть нечто восхитительное, что вызывает даже желание, чтобы третья гипотеза была справедлива!». Вместе с тем, однако, Ламберт дважды со всей определенностью говорит, что усомниться в истинности геометрии Евклида и допустить выводы, к которым приводит отрицание постулата о параллельных линиях, невозможно. Конечно, в самых этих утверждениях уже слышится, если не сомнение, то во всяком случае недоумение. Но верно то, что в тех работах, которые мы считаем предшествующими неевклидовой геометрии, вопрос о возможности геометрии, отличной от евклидовой, только вырисовывается в смутной, неотчетливой форме. С полной определенностью этот вопрос поставили и разрешили Лобачевский, Гаусс и Больаи. Новая геометрия носит имя Лобачевского, которому принадлежит приоритет ее открытия и опубликования.

В 20-х годах истекшего столетия эти три геометра после продолжительных попыток доказать постулат о параллельных линиях от противного пришли к убеждению, что это неосуществимо, потому что постулат этот не представляет собой следствия остальных постулатов Евклида. Основания для такого заключения изложены Гауссом в письме к Тауринусу от 8 ноября 1824 г. [2])

---

[1]) G. Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, Milano, 1733. Нем. пер. в соч. Штекеля: P. Stäckel und F. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss; ein Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig, 1895.

J. H. Lambert, Theorie der Parallellinien. Magazin für die reine und angewandte Mathematik. Leipzig, 1786. Перепеч. в указанном соч. Штекеля.

[2]) Соответствующая выдержка из этого письма приведена в очерке «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров» (стр. 154—155 этой книги). [*Ред.*]

в немногих словах с исчерпывающей отчетливостью. Но это было частное письмо, содержание которого Гаусс категорически запретил Тауринусу публиковать. Между тем, уже в 1823 г. Н. И. Лобачевский в своем учебном руководстве «Геометрия» [1]) начинает VI главу следующими соображениями.

> «Измерение плоскостей основывается на том, что две линии сходятся, когда они стоят на третьей по одну сторону и когда одна перпендикул, а другая наклонена под острым углом, обращенным к перпендикулу. Линии *AB* и *CD* [рис. 1] должны сходиться по достаточном продолжении, если одна из них *AB* перпендикулярна к *BC*, а другая *CD* наклонена к *BC* под острым углом *C*, обращенным к перпендикулу *AB*. Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле Математическими доказательствами».

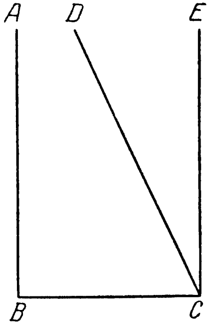

Рис. 1.

Таким образом, Лобачевский в 1823 г. ясно сознавал, что все попытки доказать постулат о параллельных линиях к цели не привели [2]). 11 февраля (ст. стиля) 1826 г. Лобачевский сделал в заседании Физико-математического отделения Казанского университета доклад, содержавший уже систематическое изложение начал неевклидовой геометрии,

[1]) Н. И. Лобачевский, Геометрия, 1823. Полное собрание сочинения, т. II, М. — Л., 1949, стр. 70.

[2]) Позднейшие исследования показывают, что Лобачевский уже в 1824 г. владел основными фактами «воображаемой геометрии». (См. И. Н. Бронштейн, К истории «Обозрений преподавания чистой математики» Н. И. Лобачевского. Историко-математические исследования, вып. 3, М.— Л., 1950, стр. 184—186). [*Ред.*]

а в 1829 г. он опубликовал в журнале «Казанский вестник» обширный мемуар «О началах геометрии» [1]), содержавший настолько обстоятельное изложение неевклидовой геометрии, что все дальнейшие его сочинения по геометрии представляли собой только переработку и развитие того же материала. Если учесть, что работа Больаи «Аппендикс» [2]) появилась в свет только в 1832 г., а Гаусс при жизни своей ничего по неевклидовой геометрии не опубликовал, то не подлежит сомнению, что Лобачевскому принадлежит безусловный приоритет открытия и опубликования неевклидовой (гиперболической) геометрии и при этом в широко развернутом виде. Столь же несомненно, однако, что к тем же идеям, независимо друг от друга, пришли также Янош Больаи и Гаусс. Эти три геометра занимают поэтому в истории неевклидовой геометрии исключительное место: многочисленные авторы, работавшие в этом направлении позже их, уже только развивали их идеи, опираясь главным образом на работы Лобачевского.

Выяснить подход к неевклидовой геометрии каждого из этих трех великих геометров, ее строение в их работах, особенности в их установках составляет первую задачу настоящей статьи.

То обстоятельство, что к общему решению вопроса, о котором в течение двух тысячелетий так настойчиво и все же безуспешно размышляли многие выдающиеся математики, в течение одного десятилетия пришли три геометра, живших в отдаленных друг от друга частях Европы, при крайней своеобразности этого решения, требовавшего совершенно исключительной глубины мысли и редкой смелости ума, вызывало глубокое удивление у самих Больаи и Гаусса. Сообщая Фаркашу Больаи, отцу Яноша, в письме от 6 марта 1832 г. [3]) о том, что он давно владеет идеями,

---

[1]) Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полное собрание сочинений, т. I, М.— Л., 1946.

[2]) J. Bolyai, Appendix (Полное название см. на стр. 176 этой книги). Русский перевод: Янош Больаи, Аппендикс. М.— Л., 1950.

[3]) C. F. Gauss, Werke, т. VIII, Grundlagen der Geometrie. Göttingen-Leipzig, 1900. (Отрывок из этого письма см. на стр. 177. [*Ред.*])

опубликованными его сыном, Гаусс дважды говорит, что он «в высшей степени поражен» этим совпадением. В своих «Замечаниях к „Геометрическим исследованиям“ Лобачевского [1]) Янош Больаи пишет: «Гаусс, по его словам, был в высшей степени поражен сначала „Аппендиксом“, а затем замечательным совпадением идей мадьярского и московитского математиков. Воистину, я этим поражен не меньше» [2]).

Мы привели эти цитаты для того, чтобы показать, насколько Гаусс и Больаи сами были удивлены возможностью такого совпадения. Это совпадение продолжало удивлять математиков и позже, когда идеи неевклидовой геометрии получили широкое распространение. Вместе с тем неоднократно высказывалась мысль, что истинным родоначальником этих идей был только Гаусс, что от него они перешли не только к Тауринусу, но также к Больаи и Лобачевскому. Посредником этой передачи по отношению к Больаи мог-де быть его отец, старый друг Гаусса, а по отношению к Лобачевскому — его учитель Бартельс [3]), находившийся в дружбе с Гауссом (раньше бывший даже помощником учителя в школе, в которой Гаусс получил первое обучение).

В Германии наиболее настойчивым защитником этой точки зрения был выдающийся математик Ф. Клейн. В первом литографированном издании своих лекций по неевклидовой геометрии [4]), сообщая исторические сведения о возникновении этих идей у Гаусса, Клейн прибавляет:

> «Но не подлежит никакому сомнению, что он [Гаусс] своим влиянием вызвал также исследования Лобачевского и Больаи, ибо новые идеи возникли в уме этих

---

[1]) Русский перевод этих «Замечаний» помещен в виде приложения в книге: Янош Больаи, Аппендикс. М.—Л., 1950. [*Ред.*]

[2]) Продолжение этой выдержки из «замечаний» Яноша Больаи помещено на стр. 178—179 этой книги. [*Ред.*]

[3]) М. Ф. Бартельс в 1808 г. был приглашен для преподавания математических наук в Казанский университет, где и находился до 1820 г.

[4]) F. Klein, Nicht-Euklidische Geometrie, I. Vorlesungen, gehalten während des Wintersemesters 1889—1890. Göttingen, 1893.

людей не самостоятельно (sua sponte), но частью косвенным путем, благодаря персональной связи с Гауссом. Мы должны поэтому безусловно признать Гаусса творцом неевклидовой геометрии».

В подтверждение этого взгляда Клейн ссылается на известный некролог Гаусса, написанный Сарториусом Вальтерсгаузеном [1]), и на переписку Гаусса с друзьями. Однако эти материалы не дают никаких оснований для такого утверждения, и два немецких же математика Фр. Энгель и П. Штекель, посвятившие много труда истории возникновения неевклидовой геометрии, тщательно исследовали вопрос о влиянии Гаусса на зарождение неевклидовой геометрии у Лобачевского и Больаи. Энгелем такое исследование выполнено по отношению к Лобачевскому (1898), а Штекелем — по отношению к обоим Больаи (1913) [2]). Тщательным анализом хода развития этих идей у Гаусса и у Лобачевского в период, когда Лобачевский находился в общении с Бартельсом, Энгель приходит к несомненному выводу, что Бартельс в этой области идей не мог оказать никакого влияния на Лобачевского [3]). Другого же лица, которое могло бы быть косвенным проводником идей Гаусса к Лобачевскому, не было. Материалы, опубликованные после появления книги Энгеля в VIII томе Полного собрания сочинений Гаусса, ничего в этом отношении не меняют. В статье о геометрических исследованиях Гаусса, опубликованной в 1923 г. во второй части X тома Полного собрания сочинений Гаусса и вышедшей отдельным изданием [4]), Штекель присоединяется к заключению Эн-

---

1) W. Waltershausen, Gauss zum Gedächtnis. Leipzig, 1856.

2) F. Engel, N. I. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers. Leipzig, 1898—1899. P. Stäckel, Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen. Leipzig und Berlin, 1913.

3) Подробнее об этом см. мою книгу «Лобачевский», изд. АН СССР, М.—Л., 1944; 2-е изд., 1948.

4) P. Stäckel, Gauss als Geometer. Помещ. в качестве прилож. к кн.: Gauss, Werke, т. X; вышло также отдельным изданием.

геля, что нет никаких оснований признать какое-либо влияние Гаусса на зарождение неевклидовой геометрии у Лобачевского. Повидимому, позже и сам Клейн изменил эту точку зрения: в своих «Лекциях о развитии математики в XIX столетии», опубликованных в 1926 г.[1]), он выражается об этом несколько осторожнее, но все же настаивает на своем безусловно неправильном утверждении, но в вышедшем в 1928 г. печатном издании его лекций по неевклидовой геометрии[2]) этого утверждения уже нет.

Что касается Я. Больаи, то вся история развития у него этих идей, как обнаружил Штекель, находится в полном противоречии с допущением какого бы то ни было постороннего влияния, и вся трагедия его жизни заключалась в опасении, что Гаусс склонен оспаривать его приоритет в этом отношении[3]).

Мы имеем перед собой, таким образом, действительное совпадение, тем более разительное, что самые пути, по которым шли Лобачевский, Больаи и Гаусс, при внимательном сопоставлении оказываются далеко не столь различными, как это можно было бы думать. Напротив, русла, по которым эти идеи направляются у каждого из трех геометров, хотя и различные, нередко очень близко подходят одно к другому.

Еще в пору, когда Янош Больаи был занят разработкой своих идей, его отец, сам в них не разбираясь, все же настоятельно советовал ему не откладывать их опубликования. «Для идей, — писал он сыну, повидимому, в конце 1823 г., — наступает время, когда они созревают в различных местах, подобно тому как весною фиалки появляются всюду, где светит солнце». Повторяя отца, Янош высказывает такую же мысль. Если понимать эти сентенции в том смысле, что каждый комплекс идей вызывается

[1]) Имеется русский перевод: Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.—Л., 1937.

[2]) F. Klein, Forlesungen über nicht-Euclidische Geometrie. Berlin, 1928. Русский перевод: Ф. Клейн, Неевклидова геометрия. М.—Л., 1936.

[3]) См. очерк «Янош Больаи», помещенный в этой книге. [*Ред.*]

к жизни определенными условиями, при наступлении которых эти идеи легко могут появиться в различных местах, то это, конечно, справедливо.

Эпоха, когда производили свою творческую работу Лобачевский, Гаусс и Больаи, в истории математики характеризуется тем, что высший анализ уже твердо стал на ноги и сделался сильным орудием математических изысканий. Но быстро развивавшееся естествознание, главным образом механика и физика, требовало все более мощных средств исследования. Изыскание этих средств требовало в свою очередь тонкой и глубокой работы мысли. Рассуждения эпохи Эйлера уже никого не удовлетворяли; они нередко приводили к ошибочным результатам во всех отраслях анализа. Не будет преувеличением сказать, что развернувшийся анализ бесконечно малых словно колебался, не имея под собой достаточно глубоко и прочно заложенного фундамента. Со времен Гаусса и Коши требования совершенной строгости доказательства становятся лозунгом, которым характеризуется все направление математической мысли XIX в. и которое получает первое завершение в трудах К. Вейерштрасса и Г. Кантора. А строгая постановка анализа абсолютно невозможна без обоснования начал математики.

Гаусс уже с этим сознанием вступил в сферу математического творчества и скоро сам стал одним из главных столпов этого направления. Читая его переписку с друзьями, его дневник, посмертные материалы, нельзя не удивляться тому вниманию, которое он уделяет основам математики во всех ее частях, часто очень элементарным вопросам; нельзя не удивляться, как он находит время подробно разъяснять их своим корреспондентам, излагать свои взгляды на вопросы, мимо которых и раньше и много позже крупные математики проходили с пренебрежением. Эта атмосфера уважения к началам математики, сознания их дефектов, необходимости их обоснования, как мы уже сказали, была создана во Франции Коши, а в Германии Гауссом. И с начала XIX в. обоснование начал математики было не случайным, не малозначительным вопросом, часто занимавшим полудилетантов, — это была основная проблема в ходе перестройки математического анализа. В этом широком смысле, может быть, справедливо, что присущее ряду крупнейших математиков начала XIX в. стремление к строгости математического рассуждения, к обоснованию начал, к пересмотру элементов математики сказалось и на Лобачевском и на Я. Больаи.

Таким образом, в связи с развитием и требованиями анализа интерес к обоснованию самих начал математики, не угасавший со времен Евклида, получил в начале XIX в. новый мощный размах. Работы Тауринуса и Вахтера, Лобачевского и Больаи не были результатом случайного совпадения вдохновенных идей; это были звенья в длинной цепи, последний участок которой идет через Коши и Гаусса, а затем через Лобачевского, Я. Больаи, Гамильтона, Грассмана, Абеля, Римана, Гельмгольца, Вейерштрасса, доходит до школы Пеано, Паша, Г. Кантора, Гильберта и в порядке то преемственной, то независимой мысли претворяет XIX век в век точного обоснования математики.

К сказанному присоединились интересы философского характера. В области гносеологии и, в частности, в вопросе об источнике математического знания в первой четверти XIX в. не только в Германии, но и далеко за ее пределами, можно сказать, господствовали воззрения Канта. Гаусс, оба Больаи, Лобачевский были решительными противниками этих идей. Выяснение источников математического знания чрезвычайно занимало этих геометров и неизбежно возвращало к его основам.

И Лобачевский, и Гаусс, и оба Больаи интересовались не только обоснованием одной геометрии. Относительно Гаусса об этом и говорить не приходится. Но «Тентамен»[1] и «Краткий обзор»[2] Ф. Больаи, замечательная работа Я. Больаи о мнимых величинах, представленная им на соискание премии Лейпцигского ученого общества

---

[1]) W. Bolyai, Tentamen (Полное название см. на стр. 176 этой книги).

[2]) W. Bolyai, Kurzer Grundriss eines Versuchs. Maros-Vásárhely, 1851. Воспроизведено в соч. Штекеля (см. сноску на стр. 162).

имени Яблоновского [1]), его же многочисленные посмертные материалы, «Алгебра» Лобачевского [2]) и его статья «Об исчезании тригонометрических строк» [3]), не говоря уже об отдельных замечаниях, рассыпанных по его работам, свидетельствуют о том, что всех этих геометров занимала задача об обосновании математики в целом, а обоснование геометрии было только первым этапом на этом пути. И не удивительно, что они занялись прежде всего именно обоснованием геометрии, а не арифметики: в геометрии эта задача была неизмеримо больше подготовлена. Здесь были уже отчетливо отмеченные вехи: как ни суха была работа комментаторов Евклида, она сделала свое дело. Среди этих наметившихся вех гордиев узел в теории параллельных линий, несомненно, занимал выдающееся место. Однако как первые шесть глав «Новых начал геометрии» Лобачевского [4]), так и «краткий обзор» Ф. Больаи и «Учение о пространстве» Я. Больаи [5]) — всё свидетельствует о том, что и Лобачевский и оба Больаи ставили себе более широкую задачу—обоснование геометрии вообще: теория параллельных линий была только первой крепостью, которой нужно было овладеть на этом пути.

И были, конечно, специальные причины, по которым внимание Лобачевского и Я. Больаи было так сосредоточено на этой задаче. Как известно, Гаусс уклонился от того, чтобы взять Я. Больаи к себе в ученики, и юноша был определен отцом в Военно-инженерную академию в Вене. Это не была Парижская политехническая школа. Математика в ней преподавалась в весьма скромных размерах; вместо Лагранжа и Араго в ней преподавали мало

---

[1]) Об этой работе Я. Больаи см. в очерке «Янош Больаи» (стр. 183—184). [*Ред.*]

[2]) Н. И. Лобачевский, Алгебра или исчисление конечных. Полное собрание сочинений, т. IV, М.—Л., 1948.

[3]) Н. И. Лобачевский, Об исчезании тригонометрических строк. Полное собрание сочинений, т. V, М.—Л., 1951.

[4]) Н. И. Лобачевский, Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. Полное собрание сочинений, т. II, М.—Л., 1949.

[5]) J. Bolyai, Raum-Lehre oder Geometrie. Воспроизведено в сочинении Штекеля (см. сноску на стр. 167).

кому известные полковник Эквер и майор Ленкер. Больаи получил основательную подготовку в области элементов высшей математики, но не больше. Он позже горько сетовал на отца, что тот обрек его на скудное математическое образование, но, кто знает, не было ли это и залогом его своеобразного успеха. Очень возможно, что более глубокое образование увлекло бы его в область актуальных проблем высшей математики, над которыми работали другие корифеи науки и которые отвлекли бы его от неблагодарной работы над теорией параллельных линий. Так или иначе, с этим сравнительно скромным образованием, с общими тенденциями, воспринятыми от отца, имея в нем единственную поддержку в своих научных занятиях, молодой офицер очутился в захолустных углах Трансильвании один со своими мыслями: за его спиной не было Гаусса, который учил Римана, не было Лагранжа, который руководил Араго, не было даже Гомбое, который руководил первыми работами Абеля. А отец делал все, чтобы отвлечь сына от этой проблемы; что́ сталось бы с творчеством Яноша, если бы он последовал совету отца? Его посмертные бумаги с очевидностью обнаруживают, что выбрать задачи из более глубоких отраслей математики ему было не под силу: он не имел для этого подготовки и принимался за решение вопросов абсолютно безнадежных, как, например, интегрирование всех алгебраических дифференциалов в элементарных функциях. И только исключительная сила воли и ума привела к тому, что он все же справился с одной из труднейших проблем; но проблемы эти принадлежали к числу немногих, для решения которых он был вполне подготовлен.

Лобачевский имел более основательную подготовку, чем Я. Больаи. Но к тому времени, когда он приступил к самостоятельной работе, он уже был один, в другом углу Европы, далеком от тех центров научной мысли, в которых шла творческая математическая работа по перестройке и развитию анализа; и ему поэтому было естественно сосредоточиться на задаче, которая, казалось, ближе лежала. В этом, повидимому, заключалась причина того, что проблема о параллельных линиях была разрешена в отдаленных углах Европы, вдали от центров математической мысли.

Но если Лобачевский и Больаи занялись так глубоко задачей о параллельных линиях, повидимому, потому, что они были далеки от актуальных в то время задач углубленного анализа, то подошли они к ней уже с подготовкой математиков нового времени; заблуждения Саккери и иных предшественников уже не могли их сбить с правильного пути. Твердая настойчивость того и другого, сосредоточенная работа в течение многих лет и гениальная прозорливость истинных геометров довершили дело. Так была создана неевклидова геометрия.

§ 2. Общее сопоставление работ Лобачевского, Гаусса и Больаи по неевклидовой геометрии

В этом предварительном обзоре мы начнем с работ Гаусса и Больаи, так как это создает фон, на котором труды Лобачевского выделяются особенно отчетливо.

Гаусс, как говорилось, не только не опубликовал ничего из своих исследований по неевклидовой геометрии, но даже категорически воспрещал всем, кого он посвящал в свои взгляды по этому вопросу, делать их достоянием гласности. Как хорошо известно, Гаусс мотивировал это как в ту пору, когда это воззрение у него стало складываться, в письме к Герлингу от 25 августа 1818 г.[1]), так и гораздо позже, когда эти взгляды у него уже сложились, в письме к Бесселю от 27 января 1829 г., тем, что он боится нападок со стороны людей, которые не поймут этих странных идей, разрушающих прочно установившиеся воззрения. В письме к Шумахеру от 15 января 1827 г. Гаусс сообщает даже, что его осторожное указание на недоказуемость постулата о параллельных было забросано грязью («Es ist mit Kodarnach geworfen»).

---

[1]) C. F. Gauss, Werke, т. VIII, Grundlagen der Geometrie. Göttingen—Leipzig, 1900. Там же помещены и другие письма Гаусса, о которых говорится в тексте.

Речь идет о рецензии на доказательства постулата, предложенные одно Швабом, другое Метернихом. Гаусс начал эту рецензию[1]) замечанием, что в деле доказательства постулата о параллельных мы, по существу, совершенно не продвинулись со времен Евклида и что, по его мнению, гораздо лучше откровенно в этом сознаться, чем делать тщетные попытки несостоятельной сетью мнимых доказательств скрыть пробел, восполнить который мы не в состоянии. Однако Штекелю не удалось выяснить, с какой стороны были сделаны грубые нападки, о которых говорит Гаусс; в печати же они, очевидно, не появились. Этой сдержанности Гаусса Я. Больаи, со свойственной ему резкостью, противопоставил подробные возражения[2]), сохранившиеся в его бумагах.

Сколько-нибудь цельной системы неевклидовой геометрии, построенной Гауссом, не сохранилось. Однако отдельные указания, разбросанные в его письмах к Ф. Больаи, Ольберсу, Шумахеру, Герлингу, Тауринусу, Бесселю, в сохранившихся отметках в различных местах, в его отзывах об изданных сочинениях по теории параллельных линий, в небольших, но более систематических набросках по теории параллельных линий, относящихся, повидимому, к 1831 г., в его замечаниях к отдельным частям работ Больаи и Лобачевского, позволяют обрисовать довольно отчетливо контуры его построения. Все эти материалы собраны и отчасти комментированы Штекелем в VIII томе Полного собрания сочинений Гаусса. В виде прибавления ко второй части X тома собрания его сочинений приложена статья Штекеля «Gauss als Geometer»[3]), содержащая обзор всего геометрического творчества Гаусса. В этой статье произведен столь тщательный и полный анализ развития идей Гаусса об основаниях геометрии вообще и

[1]) Текст начала этой рецензии помещен в очерке «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии» (стр. 69 этой книги). [*Ред.*]

[2]) Одно из них приведено в очерке «Янош Больаи» (стр. 178—179 этой книги).

[3]) См. сноску [4]) на стр. 198.

о неевклидовой геометрии в частности, что к нему вряд ли что можно прибавить. Результат этого анализа сводится к следующему.

Первые зародыши идей о недоказуемости евклидова постулата в связи с возможностью существования геометрии, отличной от евклидовой, возникли у Гаусса очень рано, еще около 1792 г. Около 1795 г. начинаются его углубленные размышления по основаниям геометрии; и хотя он, по собственному выражению, достиг в этой области значительных успехов, но по вопросу о доказуемости постулата о параллельных линиях у него в эту пору гнездились колебания и сомнения. Однако эти сомнения не остановили его размышлений; около 1816 г. он уже владел «трансцендентной тригонометрией», т. е. тригонометрией гиперболического пространства; повидимому, около 1817 г. он окончательно утвердился в своих взглядах на возможность существования «антиевклидовой геометрии». С этого времени среди работ по астрономии, практической геодезии, теоретической физике и дифференциальной геометрии Гаусс не покидает и своих исследований по неевклидовой геометрии. Сохранившиеся весьма краткие первые наброски более или менее систематического изложения начал этих исследований относятся, как видно, к 1831 г.; они содержат только первые шаги, только самые начальные элементы неевклидовой геометрии. В начале февраля 1832 г. Гаусс получил экземпляр «Аппендикса» Больаи, содержавший уже систематическое развитие его идей. С работами Лобачевского он познакомился в начале 40-х годов. Верный своему решению не высказываться в печати об этих идеях, Гаусс, как видно из его переписки с друзьями, все же отнесся с полным признанием к более молодым геометрам, самостоятельно к ним пришедшим, подробно их развившим и сделавшим их достоянием науки. Но это признание, как уже указано, оставалось известным только немногим его ученикам и друзьям. Признание заслуг Лобачевского и преимущественное значение, которое Гаусс придавал его достижениям, выразилось лишь косвенно в том, что в 1842 г. он провел Лобачевского в число членов Геттингенского ученого общества.

Штекель так же тщательно проследил историю развития идей неевклидовой геометрии у Я. Больаи, подробно изложил ее в исчерпывающем сочинении, посвященном жизни и деятельности обоих Больаи — отца и сына[1]).

Янош Больаи в 1825 г. представил отцу первый систематический очерк этой геометрии. В следующем 1826 г. он посылает другой очерк своему бывшему учителю Экверу. С 1825 до 1829 г. шли переговоры с отцом, который не был склонен признать достижений сына, в то же время Янош разрабатывал и углублял полученные им результаты. После этого между отцом и сыном состоялось соглашение, по которому работа сына была напечатана за его счет в виде приложения («Аппендикс») к обширному сочинению отца «Тентамен». Эту работу, написанную на латинском языке, Янош передал отцу в начале 1831 г.; в июне того же года она вышла из печати отдельными оттисками, а вместе с сочинением отца — в следующем 1832 г. «Аппендикс» — единственное сочинение Я. Больаи, содержащее систематическое изложение его системы. В том же 1832 г. Янош написал обработку этого сочинения на немецком языке.

«Аппендикс» содержит тщательно продуманное изложение начал неевклидовой геометрии — элементарную геометрию «гиперболического пространства», как его теперь называют; она заканчивается выводом элементов тригонометрии прямоугольного треугольника, к которым присоединено выражение элемента длины в неевклидовой (гиперболической) плоскости.

В бумагах, оставшихся после смерти Яноша, сохранились сравнительно скудные наброски дальнейших его исследований, относящиеся к 1830—1835 гг., и гораздо более обширные материалы, относящиеся к последним годам его жизни (1851—1858). Среди них имеются две сравнительно большие работы: во-первых, обстоятельные «Замечания» к «Геометрическим исследованиям» Лобачевского,

[1]) Сведения о развитии взглядов Я. Больаи на вопрос о параллельных линиях до 1825 г. подробно изложены в очерке «Янош Больаи» и поэтому здесь опущены. [*Ред.*]

написанные на венгерском языке и воспроизведенные (хотя и не дословно) Штекелем; во-вторых, «Учение о пространстве» — сочинение, имеющее целью дать общее обоснование всей геометрии [1]). Таковы материалы, содержащие творения Больаи по неевклидовой геометрии.

У Н. И. Лобачевского интерес к теории параллельных линий можно проследить уже с 1815—1816 гг. Как и все, он начал с неудачных доказательств постулата; сохранившаяся тетрадь одного из слушателей его лекций в университете содержит такое доказательство [2]). Ни одно из этих доказательств, повидимому, вполне его не удовлетворяло. Установить, когда он твердо пришел к убеждению, что все предложенные доказательства неудовлетворительны, до сих пор не удалось [3]). Во всяком случае этот взгляд, как уже было сказано выше, он высказывает в «Геометрии» в 1823 г., но еще без каких бы то ни было указаний на возможность совершенно иначе подойти к учению о параллельных линиях. Таким образом, неевклидова геометрия была построена Лобачевским между 1823 и 1826 гг. [4]). 11 февраля 1826 г., как упоминалось, он доложил в заседании Отделения физико-математических наук Казанского университета «Рассуждение» под названием «Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles» [5]).

«Рассуждение» в подлиннике до нас не дошло. Самое название вызывает некоторое недоумение. Оно не говорит о новой теории параллельных линий, о решении вопроса о параллельных линиях, оно определенно говорит *о строгом доказательстве теоремы о параллельных линиях*. Нет речи об аксиоме, о постулате, есть *теорема*

---

[1]) Подробнее об этих работах Я. Больаи см. в очерке «Янош Больаи». [*Ред.*]

[2]) См. Б. Л. Лаптев, Теория параллельных линий в ранних работах Лобачевского. Историко-математические исследования, вып. 4, М. — Л., 1951. [*Ред.*]

[3]) Во всяком случае, не позднее 1822 г. См. работу, цит. в сноске [2]) на стр. 195. [*Ред.*]

[4]) Точнее — не позднее 1824 г. См. ту же сноску [*Ред.*]

[5]) «Сжатое изложение принципов геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях».

о параллельных линиях, которую Лобачевский строго доказывает. О какой же собственно теореме шла речь? Внимательное изучение первого сочинения, в котором опубликовал свои новые идеи Лобачевский («О началах геометрии», 1829)[1]), не дает вполне определенного ответа на этот вопрос. Это сочинение состоит из двух частей: первая, составляющая меньше четверти всего сочинения, извлечена из «Exposition succincte», причем Лобачевский точно указывает материал, содержавшийся уже в «Exposition succincte»; вторая прибавлена позже. Первая часть в свою очередь разбивается на две части: сначала идет изложение начал геометрии в той своеобразной схеме, которая намечается уже в «Геометрии» 1823 г. и к которой Лобачевский и позже не раз возвращается, а затем только несколько страниц[2]) посвящены новой «воображаемой» геометрии. На этом протяжении теорему, о которой говорит заглавие «Exposition succincte», выделить невозможно[3]).

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1946.

[2]) Там же, стр. 194—206.

[3]) Существуют различные предположения о том, что́ понимал Лобачевский под «теоремой о параллельных», которая была им «строго доказана» в работе 1826 г. Одни исследователи считают, что эта работа заканчивалась ошибочным доказательством внутренней противоречивости «воображаемой геометрии», откуда следует справедливость постулата Евклида, который, таким образом, является «строго доказанной» теоремой. Другие полагают, что «теорема о параллельных» состоит в утверждении возможности существования обеих геометрий, и только опыт может произвести выбор между ними. «То и другое может быть принято без всякого противоречия в последствии, от чего и происходят две геометрии» (Н. И. Лобачевский, О началах геометрии. Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1946, стр. 194).

Первое предположение, — что Лобачевский в 1826 г. повторил путь Саккери (см. стр. 158—162 этой книги), — является совершенно невероятным: оно находится в явном противоречии со всем характером вступления к первой части сочинения «О началах геометрии», вошедшей в «Рассуждение» 1826 г., и с работами Лобачевского до 1826 г. Слова Лобачевского: «К тому же и не в праве пренебрегать решением вопроса, покуда оно еще неизвестно и покуда не знаем, не послужит ли оно еще к чему

Эти страницы содержат только план построения начал неевклидовой геометрии, выводы основной зависимости между расстоянием x и соответствующим ему углом параллельности $\Pi(x)$, а также уравнения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника, хотя также в очень сжатой форме. На этом заканчивается та часть работы, которая извлечена из «Рассуждения», т. е. «Exposition succincte». Однако весь тот материал, который был изложен позднее в «Аппендиксе» Больаи, явно уже нашел себе место в «Exposition succincte».

Нельзя не обратить внимание и на то, что в самом названии «Рассуждения» акцент падает не на теорию параллельных линий, а на систематическое изложение начал геометрии, к которым строгое доказательство теоремы о параллельных линиях только присоединяется. Все это приводит пишущего эти строки к убеждению, что в 1826 г., когда Лобачевский представил свое «Рассуждение» в Отделение физико-математических наук, он уже, несомненно, владел началами неевклидовой геометрии, но еще недостаточно оценивал размеры и значение своего открытия. Только в период 1826—1829 гг. эти идеи им были раз-

другому» в работе 1829 г. и «К тому же, кто знает, какие от нас скрыты истины в том, чего мы не понимаем» в работе 1824 г. («Материалы для биографии Н. И. Лобачевского», собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, М.—Л., 1948, стр. 177) почти тождественны и относятся к одному и тому же вопросу — теории параллельных линий. Лобачевский не только в 1826 г., но и в 1824 г. владел основными фактами новой геометрии; бессмысленно было бы говорить о важности решения вопроса, который послужит *к чему другому* — о чем же «другом» хотел сказать Лобачевский, кроме решения вопроса двухтысячелетней давности?

Второе предположение, что «теорема о параллельных» имеет совсем не то содержание, которое ей придавали раньше, конечно, более основательно. Но следует признать, что в этом случае название работы 1826 г. является все же странным и не может не вызывать недоумений, о которых говорит В. Ф. Каган. Естественнее считать, что под «теоремой о параллельных» Лобачевский понимал справедливость V постулата, который «соглашается со всеми измерениями на самом деле» (см. сноску [1]) на стр. 209). Что же касается «строгого доказательства», о котором Лобачевский говорит в названии, то он вернуты во всей полноте, только в этот период он уяснил себе все их значение. Но зато сочинение «О началах геометрии», опубликованное в 1829 г., содержит уже все главные достижения Лобачевского в области неевклидовой геометрии. Элементарная геометрия, которой только и занимались Гаусс и Больаи, составляет только начало этого мемуара; за ней следуют основы аналитической и дифференциальной геометрии и очень обширные интегральные вычисления, содержание и значение которых будет изложено ниже.

Не будет преувеличением сказать, что написанное Лобачевским позже было только развитием и обоснованием того, что содержится в этом первом его печатном произведении; дополнения играют лишь сравнительно второстепенную роль.

Весь этот обзор обнаруживает, что в 1829 г. Н. И. Лобачевский первый опубликовал изложение неевклидовой (гиперболической) геометрии и притом уже во вполне развернутом виде; в 20-х годах того же века к твердому убеждению о возможности геометрии, отличной от евкли-

---

сам объяснил эти слова в своем сочинении «Воображаемая геометрия» (1835 г.):

«В моем сочинении о началах геометрии (речь идет о работе 1829 г. — *Ред.*) я доказывал, основываясь на некоторых астрономических наблюдениях, что в треугольнике, которого бока почти таковы, как расстояние от Земли до Солнца, сумма углов может разниться до двух прямых не более 0″,0003 в шестидесятичных секундах градуса. *Предположение употребительной геометрии* (т. е. справедливость постулата Евклида. — *Ред.*) *надобно, следовательно, почитать как бы строго доказанным, а вместе быть убеждену и в том, что, независимо от опыта, напрасно было бы искать доказательства на такую истину, которая еще не заключается сама собою в нашем понятии о телах*» (Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. III, М.—Л., 1951, стр. 26—27. Курсив наш. — *Ред.*).

Совпадение слов о «строгом доказательстве» в приведенной цитате и в названии «Рассуждения» 1826 г., конечно, не случайно. В самом начале своего сочинения «О началах геометрии» (1829 г.) он говорит об астрономических наблюдениях и возвращается к ним в начале второй части этой работы; именно их он и имел в виду, говоря о «строгом доказательстве теоремы о параллельных». [*Ред.*]

довой, пришел Гаусс; но, ничего не опубликовав об этом при жизни, он оставил только наброски отдельных, наиболее элементарных теорем этой геометрии. Наконец, на протяжении того же десятилетия с успехом строил неевклидову геометрию и Янош Больаи; он опубликовал ее элементарные основы в прекрасном сочинении, которое, однако, появилось в свет только в 1832 г.; к тому же его содержание составляет только вводную главу той обширной дисциплины, которую развернул Лобачевский.

§ 3. Характер изложения основ неевклидовой геометрии у ее творцов

Мы постараемся теперь выяснить как общие черты, так и отличия в характере изложения неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи.

Первая опубликованная Лобачевским по основаниям геометрии работа — «О началах геометрии», как мы указывали выше, состоит из двух частей, из которых первая представляет собой извлечение из рассуждения «Exposition succincte». Именно эта первая часть посвящена обоснованию геометрии — евклидовой и неевклидовой. Но, как уже указано выше, это скорее только план работы, а не самая работа. На протяжении печатного листа в очень конспективной форме намечен план новой системы построения «употребительной» геометрии почти во всем ее объеме, включая и тригонометрию, указаны источник и смысл расщепления геометрии, а далее почти столь же конспективно намечен план построения «воображаемой» геометрии, как называет свое творение Лобачевский. Существенные и своеобразные предложения воображаемой геометрии, определение предельной поверхности, ее основное свойство приведены без какого-либо указания на выводы. Очень трудно уяснить, на кого было рассчитано это изложение. Может быть, люди, проникшие в этот сложный вопрос так же глубоко, как сам автор, с такой же силой ума и геометрической прозорливости, могли бы воспроизвести новую геометрию по этому плану и то, конечно, с затратой очень большого труда; но таких людей тогда в России не было.

Немногие приведенные краткие выводы вряд ли могут быть усвоены кем-либо без вывода предыдущих предложений. Неизвестный рецензент из «Сына отечества»[1]), высказавшийся в грубых выражениях о работе Лобачевского, конечно, обесславил бы свое имя, если бы подписал статью. Но нужно сказать, что когда он жалуется, что в этом сочинении нельзя ничего понять, — он в большой мере прав.

Вторая часть мемуара носит уже аналитический характер, такой же характер носят «Воображаемая геометрия»[2]) (во французской обработке значительно сокращенная) и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам»[3]). Как известно, Гаусс уже указывал, что «эти мемуары напоминают запутанный лес, через который трудно найти путь и просвет, не изучив предварительно каждое дерево в отдельности». Конечно, не только в настоящее время, но и в последнюю четверть XIX в. эти отдельные деревья были уже очень многими хорошо изучены, и мемуары Лобачевского для них не представляли затруднений. Но сам Лобачевский в ту пору, когда он этот мемуар опубликовал, не дал никаких средств для такого ознакомления. Этот пробел должны были позже восполнить «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»[4]).

Это сочинение имеет прежде всего целью осуществить тот план, который набросан в первой части мемуара «О началах геометрии». Шаг за шагом выполняются намеченные там идеи, предложения сопровождаются доказательствами, вводятся недостающие звенья, выводы

---

[1]) С. С., О началах геометрии, соч. Г. Лобачевского. Сын отечества, № 41, 1834. Подробнее об этом отзыве сказано в моей книге «Лобачевский», М.—Л., 1944, 2-е изд., 1948.

[2]) Н. И. Лобачевский, Воображаемая геометрия (1835). Полное собрание сочинений, т. III, М.—Л., 1951.

[3]) Н. И. Лобачевский, Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам (1836). Полное собрание сочинений, т. III, М.—Л., 1951.

[4]) Н. И. Лобачевский, Новые начала геометрии с полной теорией параллельных (1835—1838). Полное собрание сочинений, т. II, М.—Л., 1849.

излагаются обычно с достаточной полнотой. В 1826 г. Физико-математическому отделению был доложен замысел работы, по существу уже Лобачевским продуманный; в 1829 г. был опубликован план уже выполненной работы, не оставляющий ни малейших сомнений в достижениях автора и сопровождающийся обширными аналитическими применениями этих достижений; эти применения развертываются в работах 1835—1836 гг., и только в промежутке 1835—1838 гг. «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» принесли действительное выполнение основного плана.

Некоторые геометры считают «Новые начала» основным трудом жизни Лобачевского. Но слишком обширен был замысел, слишком широко был составлен план, и это отразилось на его выполнении. «Новые начала» содержат систематическое построение всей геометрии ab ovo. В главе VII, посвященной параллельным линиям, расщепляются «употребительная» и «воображаемая» геометрия, но развертываются параллельно. Однако содержащиеся в «Новых началах» определения основных понятий классической геометрии и построение ее установившихся начал при всем их своеобразии, при всей глубине отдельных рассуждений далеко не имеют той ценности, которую им, повидимому, приписывал Лобачевский. Вся система в отдельных своих частях и в целом вызывает сомнения и возражения. Оно и естественно: создание неевклидовой геометрии только установило те пути, которые в течение последующего столетия привели к построению полной системы геометрии на новых началах.

Между тем, в «Новых началах» среди пространных рассуждений второстепенного значения до некоторой степени как бы отступает на задний план великое творение Лобачевского — неевклидова геометрия. Шесть обширных глав, не содержащих новых геометрических идей и представляющих собой еще один, может быть и своеобразный вклад в многовековую литературу комментаторов и совершенствователей Евклида, составили изгородь, забаррикадировавшую «новый мир» замечательнейших геометрических идей, содержавшихся в VII, VIII, X и XI главах (глава IX посвящена изучению тригонометрических функций), и вряд ли кто эту баррикаду одолел. Между тем, в этих четырех главах «Новых начал» и содержится отчетливое изложение основ новой геометрии.

Затруднения, которые отсюда возникли, были, повидимому, ясны и Лобачевскому, и через два года после того, как было закончено печатание «Новых начал», после того как первоначальный план уже был выполнен во всех своих частях, Лобачевский сделал из этой работы извлечение на немецком языке под названием «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» (Геометрические исследования по теории параллельных линий) [1].

По форме, по обработке «Геометрические исследования» — самое совершенное изложение основ неевклидовой геометрии, данное Лобачевским. Все общие рассуждения о началах геометрии оставлены, необходимый предварительный материал приведен без доказательств; работа заканчивается выводом основных уравнений плоской и сферической тригонометрии средствами новой геометрии. «Геометрические исследования» — не простое извлечение из «Новых начал». Многое переработано, иначе пояснено, иногда несколько развито, иногда значительно сокращено. «Это произведение, — говорит Гаусс, — отличается гораздо большей связностью и точностью, чем большие статьи Лобачевского». С этой небольшой работы начал свое знакомство с работами Лобачевского Гаусс; с нее должен и в настоящее время начинать всякий, кто приступает к изучению работ Лобачевского; и по настоящее время — это одно из наиболее отчетливых и доступных изложений основ неевклидовой геометрии, один из наиболее ценных и блестящих перлов математической литературы. В Полном собрании сочинений Н. И. Лобачевского «Геометрические исследования» помещены поэтому на первом месте в первом томе.

[1] Н. И. Лобачевский, Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Берлин, 1840. Полное собрание сочинений, т. I, М. — Л., 1946. Имеется отдельное издание перевода этого сочинения на русский язык, сделанного автором настоящего очерка (М. — Л., 1945).

К обработке основ неевклидовой геометрии Лобачевский после опубликования «Геометрических исследований» уже не возвращался. В «Пангеометрии» [1]) (1855) в начале в повествовательной форме рассказано то, что в «Геометрических исследованиях» действительно построено и доказано. Как всегда, когда математическое произведение переходит в повествование, изложение становится расплывчатым и теряет математическую выдержанность. Гаусс дважды жалуется Герлингу на то, что Лобачевский злоупотребляет выражениями «J'ai demontré», «j'ai prouvé». Хотя непосредственно это относится к «Воображаемой геометрии», но и изложение в «Пангеометрии» вряд ли могло что-либо прибавить тому, кто усвоил «Геометрические исследования», и вряд ли могло быть доступно читателю, который не изучил предварительно этой небольшой работы. Впрочем, одну существенную недоделку Лобачевский здесь восполнил. Об этом будет указано ниже.

О систематическом изложении неевклидовой геометрии у Гаусса, как мы видели, не может быть речи. Но все же нельзя не отметить, что всюду, где он об этих идеях говорит, они выражены с той отчетливой ясностью, с той отчеканенной определенностью и с той художественностью слога, какие вообще свойственны Гауссу. Однако, как уже сказано, сохранились и такие наброски, которые пришлось восстановить.

Обращаясь к характеристике изложения и внешней обработке «Аппендикса» Больаи, нужно прежде всего отметить следующее.

Работа изложена чрезвычайно сжато. Больаи вообще не был склонен к краткому изложению своих мыслей; его письма и заметки страдают скорее многословием. Но когда он готовил работу к опубликованию, он выражал ее с чрезвычайной краткостью. Это отличает и «Аппендикс», и мемуар о мнимых величинах, представленный им на соискание премии Яблоновского, и «Учение о пространстве». Но сжатость изложения «Аппендикса» имела и свою особую

[1]) Н. И. Лобачевский, Пангеометрия (1855). Полное собрание сочинений, т. III, М. — Л., 1951.

причину. Больаи должен был напечатать это сочинение на свои средства, из скудного жалованья молодого армейского офицера. В качестве материала им отобран минимум, прокладывающий дорогу к тем средствам, которые делают дальнейшее исследование доступным общим методам анализа. Нет ни одного предложения не только лишнего, но сколько-нибудь нарушающего тонкую цепь умозаключений, ведущих к основным тригонометрическим и дифференциальным соотношениям гиперболического пространства.

Нельзя не отметить чрезвычайную продуманность каждой фразы, каждого слова и обозначения. Работа была выполнена в течение почти десяти лет. Очерки, переданные Яношем отцу, а затем Экверу, очевидно, были первыми набросками «Аппендикса», которые продумывались, выкристаллизовывались и шлифовались еще в течение пяти лет. Именем Гаусса пестрит относящаяся к этому времени переписка между отцом и сыном. Создается впечатление, что облик этого «колосса», будущего судьи, на котором были сосредоточены надежды и отца и сына, всегда витал перед Яношем, когда он обрабатывал свое изложение, быть может, даже более, — что собственно для Гаусса, во всяком случае прежде всего для него, «Аппендикс» и писался. И для Гаусса не нужно было распространяться; он поймет с полуслова; скорее нужно было беречь каждую минуту, которую он уделит этому небольшому сочинению, нужно было избегать всякого слова, которое могло бы вызвать хотя бы косвенное возражение.

Особенностью изложения Больаи является еще крайняя схематичность, находящаяся, повидимому, в тесной связи с краткостью, которой он старается достичь. Схематичность заключается в обилии символов, заменяющих термины и иногда довольно сложные понятия. Так, в этом сочинении, в котором учение о параллельных линиях имеет такое исключительное значение, самое слово «параллельная прямая», «параллель» или, по Больаи, «асимптотическая» прямая встречается только один раз в подстрочном примечании; везде же в тексте оно заменяется обозначением $\mathfrak{ab} \,|||\, \mathfrak{cd}$, точно выражающим, что луч, идущий от точки $\mathfrak{a}$ к точке $\mathfrak{b}$, параллелен лучу, идущему от точки $\mathfrak{c}$ к точке $\mathfrak{d}$. Символ

$\mathfrak{ab} \stackrel{\frown}{=} \mathfrak{cd}$ выражает, что отрезок $\mathfrak{ac}$ образует с лучами $\mathfrak{ab}$ и $\mathfrak{cd}$ равные углы, т. е. что $\angle \mathfrak{cab} = \angle \mathfrak{acd}$ (см. ниже, рис. 4, на стр. 229, где $AM \stackrel{\frown}{=} BN$). Самое сочинение начинается объяснением символов, в нем употребляемых, причем объяснение некоторых символов занимает по две-три строки. Это «Explicatio signorum» до некоторой степени напоминает определения, начинающие каждую книгу Евклида. Но Больаи вводит еще добавочные обозначения в самом тексте: предельная линия, например, обозначается просто буквой L, предельная поверхность — буквой F. Гаусс в первом же своем отзыве указал, что для этих понятий было бы лучше придумать подходящие наименования. Лобачевский так и делал, и его термины «орициклы» и «орисферы» (точно означающие «предельные круги» и «предельные сферы»), несомненно, удачнее, чем термины, предложенные Гауссом: «парациклы» и «парасферы». Самую систему евклидовой геометрии Больаи обозначает символом Σ, а систему неевклидовой геометрии — символом S.

Эта схематичность, конечно, затрудняет чтение, но только до тех пор, пока значение символа не продумано и не усвоено до конца. Чего-либо недосказанного, т. е. чего-либо такого, без чего текст становится совершенно непонятным или неубедительным, у Больаи, можно сказать, нет, но нет и лишнего слова, разъясняющего мысль, делающего ее более доступной. Чтение сочинения требует поэтому большого внимания, даже напряжения; в ту пору, когда оно появилось, оно, конечно, было доступно очень немногим.

Таким образом, чрезмерная сжатость и недоступность изложения — общая черта как «Аппендикса», так и первых основных работ Лобачевского. Повидимому, оба геометра, продумавших свои новые идеи в течение ряда лет, в такой мере себе их уяснили, что не оценивали, ка́к трудно будет их усвоить людям, которым эти идеи новы, а потому и чужды.

Все изложение «Аппендикса» носит выдержанно геометрический характер; это как бы построение неевклидовой геометрии в стиле Евклида и Архимеда. Как уже сказано выше, оно доведено до аналитических методов, применение которых проведено лишь на небольшом числе простых примеров (вычисление площади круга, площади криволинейной трапеции, верхним основанием которой служит линия равных расстояний, поверхности шара), в которых вычисления по указанию автора могут быть произведены и элементарными средствами. В работах Лобачевского этот материал развит несравненно шире и глубже.

§ 4. Постановка задачи

Лобачевский, Гаусс и Больаи, как и их предшественники, исходили из попыток доказать постулат о параллельных линиях от противного. Сообразно этому естественное строение неевклидовой геометрии заключалось бы в том, чтобы в надлежащем месте вместо постулата Евклида установить противоположное допущение и отсюда вести дальнейшие выводы. Таков именно был замысел Гаусса; по этому пути, несомненно, шли и Лобачевский и Янош Больаи, но самое строение неевклидовой геометрии, когда оно уже вылилось в обработанное сочинение, далеко не вполне соответствует этой простой схеме.

Вникнем глубже в громоздкое наименование «Аппендикса». По-русски оно гласит:

«Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может)...».

В этом заглавии точно формулирована задача, которую Больаи себе ставил.

И Лобачевскому, и Гауссу, и Больаи было хорошо известно, что евклидова геометрия представляет собой частный случай новой «воображаемой» геометрии, соответствующий бесконечному значению параметра k или, следовательно, нулевому значению кривизны пространства (так называется в настоящее время величина $-\frac{1}{k^2}$). Метрические соотношения неевклидовой геометрии, содержащие параметр k, выражаются поэтому таким образом, что они справедливы и для предельного значения параметра, т. е. для евклидовой геометрии. Как эти метрические свойства, так и другие основные предложения можно и чисто геометрически выразить таким образом, чтобы они получили формулировку, одинаково справедливую как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии; такую формулировку можно дать и определениям понятий, которые вносит «воображаемая» геометрия.

Так, например, термин «линия равных расстояний» («гиперцикл» по Гауссу) и «поверхность равных расстояний» («гиперсфера» по Гауссу) формально определяются одинаково как в обыкновенной, так и в «воображаемой» геометрии (геометрическое место точек, расположенных по одну сторону данной прямой — или соответственно данной плоскости — и отстоящих от нее на одно и то же расстояние), только форма и свойства этой линии (поверхности) одни в обыкновенной геометрии и другие — в неевклидовой.

Так называемая «теорема синусов» выражается в обыкновенной геометрии уравнениями

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

а в «воображаемой» геометрии — уравнениями

$$\frac{e^{\frac{a}{k}}-e^{-\frac{a}{k}}}{\sin A}=\frac{e^{\frac{b}{k}}-e^{-\frac{b}{k}}}{\sin B}=\frac{e^{\frac{c}{k}}-e^{-\frac{c}{k}}}{\sin C},$$

где k — параметр, о котором мы говорили выше.

Если, однако, в первой системе уравнений все три числителя умножить на 2π, а во второй — на $2\pi k$, то произведения выразят длины окружностей радиусов a, b, c соответственно в обыкновенной и в гиперболической геометрии. Если поэтому обозначим, как это делает Больаи, через $\bigcirc r$ функцию от r, выражающую длину окружности радиуса r, то теорема синусов в обеих системах геометрии получит общее выражение

$$\frac{\bigcirc a}{\sin A}=\frac{\bigcirc b}{\sin B}=\frac{\bigcirc c}{\sin C}. \tag{1}$$

Таким образом, предложение: во всяком прямолинейном треугольнике синусы его углов пропорциональны длинам окружностей, радиусами которых служат противоположные стороны, одинаково справедливо как в евклидовой, так и в воображаемой геометрии, по выражению Больаи, «независимо от истинности или ложности XI аксиомы».

Если при ортогональных осях декартовых координат под x и y разуметь расстояния точки x, y от осей, а через r — ее радиус-вектор, то соотношение

$$(\bigcirc x)^2 + (\bigcirc y)^2 = (\bigcirc r)^2 \tag{2}$$

справедливо как в евклидовой, так и в воображаемой геометрии; по терминологии Больаи, — это такое выражение пифагоровой теоремы, которое «не зависит от истинности или ложности XI аксиомы».

Эти примеры можно было бы умножить. Идея Больаи заключается в том, чтобы всей геометрии дать выражение, не зависящее от истинности или ложности XI аксиомы, и таким образом вовсе элиминировать постулат Евклида. Различие геометрических систем по этому замыслу должно выступить лишь в заключительной части, в применениях, при спецификации основных понятий применительно к каждой геометрии. Это и есть его геометрия «абсолютно истинная». Не всегда ему удается провести эту идею в полной мере; в некоторых случаях ему все же приходится расщепить вопрос, рассматривать его отдельно для системы Σ (евклидовой) и системы S (неевклидовой); но вслед за этим он проводит синтез a posteriori (см., например, §§ 16—20 «Аппендикса»). Больаи тщательно избегает предложений, которые такому синтезу не поддаются, и для различения обеих систем остается лишь теорема о сумме углов треугольника.

Любопытно, что этот синтез идет дальше, нежели Больаи, собственно, предполагал. Указанные выше предложения в формулировке Больаи справедливы не только в евклидовой геометрии и в геометрии Лобачевского-Больаи, но и в римановой (эллиптической) геометрии. Не будет преувеличением сказать, что Больаи фактически построил начала геометрии любого пространства постоянной кривизны, т. е. отобрал тот материал, который допускает в чисто геометрической форме выражение, общее для всех пространств постоянной кривизны. Нельзя утверждать, что изложение «Аппендикса» совершенно строго в этом отношении выдержано, но его содержание чрезвычайно близко к этому подходит.

Лобачевский подходит к тому же материалу совершенно иначе, до некоторой степени с противоположной точки зрения. После попытки построения общих основ геометрии в «Новых началах», Лобачевский подготовляет учение о параллельных линиях исследованием суммы углов треугольника, как это делали Саккери, Ламберт и Лежандр [1]). Однако, установив дилемму, которая тут представляется, Лобачевский занимается не *синтезом* того, что «абсолютно истинно», что объединяет тезу и антитезу этой дилеммы, а, напротив, *анализом* различия, к которому приводит одно и другое предположения. С VII главы в «Новых началах» обе системы развертываются параллельно, и на первый план выдвигаются именно те предложения, которые в одной и другой геометрии резко различаются. То, с чего Больаи начинает и что он систематически проводит через всю свою работу, составляет у Лобачевского заключительный акт: евклидова геометрия включается в «воображаемую» как предельный частный случай. В «Геометрических исследованиях» евклидова геометрия рассматривается как система хорошо известная. Теза уходит в прошлое, а антитеза знаменует будущее — неевклидову геометрию.

Идея Больаи, идея синтеза, таким образом, не была чужда Лобачевскому. Более того, чем дальше шли его размышления, тем ближе ему становилась эта точка зрения. И хотя последнее его сочинение «Пангеометрия», по существу, представляет лишь свободный обзор его прежних исследований, идея объединения отмечена уже в самом наименовании работы. «Это последнее предложение (что сумма углов треугольника меньше π), — говорит он в начале этой работы, — служит основанием особой

[1]) См. очерки «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии» и «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров» в этой книге. [*Ред.*]

геометрии, которой я дал название «воображаемой геометрии», но которую, может быть, приличнее назвать *пангеометрией*, потому что это означает геометрию в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай».

§ 5. На рубеже

В «Новых началах», как мы уже сказали, Лобачевский дает построение всей системы геометрии ab ovo. К этим идеям мы еще возвратимся, здесь же остановимся лишь на том материале, который непосредственно подготовляет неевклидову геометрию.

В «Геометрических исследованиях» после краткого введения Лобачевский приводит без доказательства пятнадцать положений не зависящих от теории параллельных линий и необходимых для дальнейших построений. Одни из этих положений обычно рассматриваются как аксиомы, другие доказываются у Евклида. Большинство их относится к планиметрии, часть — к геометрии сферы и к стереометрии, некоторые содержат целый комплекс теорем. Среди этих положений есть такие, которые, может быть, недостаточно точно формулированы. Но возражений они не вызывают, если к ним не подходить с точки зрения общего обоснования начал геометрии.

За этим следуют предложения, находящиеся на рубеже евклидовой и неевклидовой геометрии. Это — теоремы, которые также не зависят от постулата Евклида, но возникли в процессе углубленного исследования теории параллельных линий. Сюда относятся теоремы о сумме углов треугольника и ее связи с теорией параллельных линий. По существу, здесь дело сводится к тому, что, не пользуясь постулатом Евклида, при помощи остальных его допущений доказываются три теоремы: 1) сумма углов прямолинейного треугольника не может быть больше двух прямых; 2) если она равна $2d$ в одном треугольнике, то она равна $2d$ во всяком треугольнике; 3) если сумма углов в треугольнике равна $2d$, то имеет место постулат о параллельных линиях.

Все эти теоремы были хорошо известны Саккери и Ламберту, но Лобачевский, который работ этих геометров не знал, приписывает их Лежандру. Работы Саккери и Ламберта [1]) в то время действительно были мало известны. Лежандр не только нашел эти теоремы независимо от Саккери и Ламберта, но и дал им несравненно более простые доказательства. Так, для первой из перечисленных теорем Лежандр дал в своих «Началах» в 1794 г. и в 1823 г. два доказательства [2]). Лобачевский излагает оба доказательства Лежандра в «Новых началах» со ссылкой на автора, а в «Геометрических исследованиях» — первое из них. Замечание Штекеля, что в «Новых началах» дано совершенно то же доказательство, не следует поэтому понимать в том смысле, что Лобачевский к нему пришел независимо от Лежандра. Напротив, доказательство второй из перечисленных выше теорем также вполне повторяет Лежандра, а доказательство третьей очень мало отличается от доказательства аналогичного предложения у Лежандра. Таким образом, это совпадение отчетливо обнаруживает, что к самому рубежу неевклидовой геометрии Лобачевский пришел, отправляясь от идей Лежандра, которые, как он сам отмечает, ему были хорошо известны.

Что касается Больаи, то у него все эти предложения отсутствуют. И это, конечно, не случайно. Не подлежит никакому сомнению, что Больаи вполне владел этими фактами, но они не соответствуют духу его изложения, они не укладываются в схему синтеза обеих систем, а потому соответствуют более замыслу Лобачевского, нежели Больаи. Даже основное предложение о том, что в неевклидовой геометрии сумма внутренних углов треугольника меньше $2d$, в «Аппендиксе» не подчеркнуто. Больаи пользуется им в самом конце работы, уже в приложениях — в § 41, без предварительного доказательства, со ссылкой на § 31, в котором приведены тригонометрические уравнения пря-

---

[1]) См. сноску на стр. 194.

[2]) A. M. Legendre, Èlèments de Gèomètrie. Paris, 1794, 12-е изд., 1823 [эти доказательства изложены в очерке «Учение о параллельных линиях до создания неевклидовой геометрии» на стр. 56 и 60 этой книги. *Ред.*]

моугольного треугольника. Конечно, из тригонометрических уравнений гиперболической геометрии можно вывести, что сумма углов треугольника меньше $2d$; но это не так уже просто, чтобы ограничиться такой ссылкой. Это доказательство действительно приведено у Лобачевского в «Воображаемой геометрии», где вся неевклидова геометрия выводится из трех тригонометрических уравнений, устанавливаемых им a priori (см. ниже). Лобачевский выводит для этого следующую формулу:

$$\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\sqrt{(e^{s}-1)(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}}{(e^{a}+1)(e^{b}+1)(e^{c}+1)}$$

а отсюда следует, что

$$\cos\frac{1}{2}(A+B+C)>0,\ \frac{1}{2}(A+B+C)<d,\ A+B+C<2d.$$

Но это — окольный путь. Прямой путь, которым Лобачевский идет в других своих работах, гораздо проще. Из двух возможных допущений $A+B+C=2d$ или $A+B+C<2d$ он, в той или иной форме, просто принимает последнее и тем становится на путь неевклидовой геометрии. Так это сделано в первом мемуаре Лобачевского «О началах геометрии»; рубеж перейден, Лобачевский вступает на путь новой «воображаемой» или неевклидовой геометрии.

§ 6. Параллельные линии

Отказ от V постулата приводит к тому, что на плоскости через точку C, не принадлежащую прямой AB, проходит не одна, а бесчисленное множество прямых, не встречающих BC. Вместе с тем евклидово определение параллельных линий становится нецелесообразным, требует существенной модификации. Этому и посвящена у Лобачевского глава VII «Новых начал», переданная в более сжатом виде в «Геометрических исследованиях» (рубр. 6—25), у Больаи — параграфы 1—15 «Аппендикса». Вот как это излагает Лобачевский в «Новых началах» в начале VII главы «Параллельные линии» [1]):

«Линии, выходя из одной точки, либо пересекают данную прямую в той же плоскости, либо никогда с ней не встречаются, сколько бы ни продолжались. Надобно, следовательно, различать между такими линиями в отношении к одной данной, встречные или сводные и невстречные или несводные [2]), *к которым принадлежат параллельные, составляя переход от одних к другим — разводным. Две параллельные к данной разделяют плоскость на четыре части: в двух противоположных заключаются сводные, в двух остальных — разводные линии.*

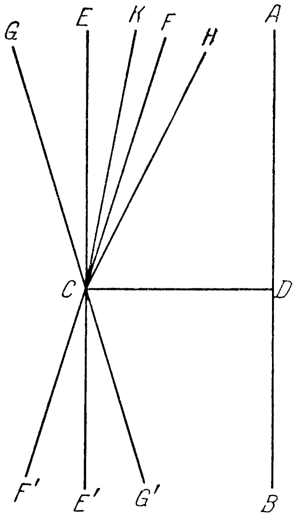

Рис. 2.

Пусть AB — прямая [рис. 2] дана с точкой C в одной плоскости, где все линии, выходя из точки C, должны либо пересекать AB, как например, перпендикул CD к AB; либо не встречаться с AB, как например, перпендикул CE на CD. Эта линия CD, обращаясь около точки C, переходит от сводных в угле FCG' к несводным в угле FCG, потом опять в угле GCF' к таким, которых продолжение за точку C пересекает AB; наконец, к несводным в угле $F\,CG'$. Здесь

[1]) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений. М.—Л., 1949, стр. 266—267.

[2]) То-есть пересекающие данную прямую и не пересекающие ее.

бока четырех углов происходят от пересечения двух линий FF' и GG', которые, представляя переход от сводных к несводным, будут параллельны с AB».

По существу, конечно, так же определяют параллель Гаусс и Больаи, и все-таки математическая установка их определения иная.

«Если луч CF [рис. 2] в плоскости CAB расположен относительно перпендикуляра CD к AB в ту же сторону, что и луч DA, но его не встречает, между тем как всякий луч CH, проходящий внутри угла FCD, этот луч DA встречает, то мы будем говорить, что луч CF параллелен лучу DA (или, что то же, лучу BA)».

Приведя определение в этом последнем виде, трудно сказать, чей текст с ним совпадает — Больаи или Гаусса, — до того эти тексты сходны не только по своему содержанию, но и по формулировке, в которую они вылились; даже буквы для обозначения лучей у обоих авторов те же [1]). У Больаи текст определения по внешности несколько короче, потому что при схематичности его изложения термины у него заменены символами и даже слов «параллельный луч» (по его терминологии, «асимптотический луч») он избегает, заменяя их обозначением $CF \parallel\!| BA$ [2]).

Это определение для Больаи чрезвычайно характерно: оно вполне пригодно также для евклидовой плоскости (здесь этим свойством обладает перпендикуляр CE к CD), оно носит по его терминологии абсолютный характер. Однако, если требование единственности параллели предварительно не установлено, если мы понимаем это определение параллели в широком смысле (т. е., по словам Больаи, «независимо от истинности или ложности XI аксиомы»), то оно отличается от упрощенного евклидова определения. Оно

1) Хотя и не те, что на нашем чертеже, заимствованном из «Новых начал». C. F. Gauss, Werke, т. VIII, стр. 203; Янош Больаи, Аппендикс, стр. 52 русского издания.

2) Для обозначения параллелизма в неевклидовой геометрии Больаи пользуется тремя черточками вместо двух.

связывает определение параллельного луча с точкой C, из которой он выходит, — оно не ставит параллель CF к лучу DA в равноправное с последним положение. Вследствие этого возникает необходимость установить такие свойства параллели, которые в евклидовой геометрии совершенно тривиальны. Построение теории параллельных линий в такой постановке требует, вследствие этого, доказательства трех предложений: 1) если луч CF параллелен лучу DA ($CF \parallel\mkern-3mu| DA$), то это соотношение остается в силе, где бы мы ни выбрали начало луча C на соответствующей прямой (CF); 2) параллелизм есть свойство взаимное, т. е. соотношение $CF \parallel\mkern-3mu| DA$ влечет за собой $DA \parallel\mkern-3mu| CF$; 3) два луча, параллельные третьему, параллельны между собой. Эти предложения все три автора отчетливо выражают в формулировках, которые можно считать тождественными не только по существу, но и по форме.

Первое предложение сопровождается доказательствами, которые тоже друг от друга почти не отличаются. По

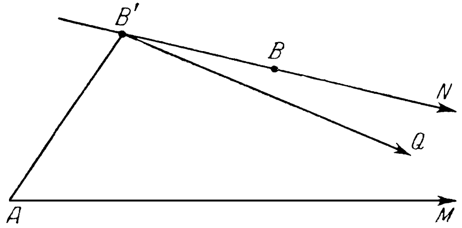

Рис. 3.

поводу этих доказательств необходимо сделать одно замечание принципиального свойства. Чтобы доказать, что из $BN \parallel\mkern-3mu| AM$ следует $B'N \parallel\mkern-3mu| AM$ (рис. 3), достаточно обнаружить, что всякий луч $B'Q$, проходящий внутри угла $AB'N$, пересекает луч AM. Средством для доказательства того, что одна прямая пересекает другую, у всех трех авторов служит положение: если прямая, лежащая в плоскости треугольника, встречает одну сторону треугольника во внутренней ее точке, то она необходимо встречает еще одну его сторону (входя внутрь треугольника, она должна из него выйти). Ни у одного из трех авторов это положение не формулировано отдельно ни в виде постулата, ни как-либо иначе, но оно неоднократно высказывается в тексте доказательств, подобно тому как Евклид часто пользуется аргументами, не выдвинутыми предварительно в своем месте в качестве аксиомы или постулата. Только через 50 лет Пашем было указано, что это положение должно быть включено в число аксиом геометрии, и с тех пор оно обычно связывается с его именем, но Лобачевскому, Гауссу и Больаи роль и значение этой аксиомы в геометрии были совершенно ясны.

Вторая теорема доказывается Больаи при помощи так называемой «секущей равного наклона» [1]; Больаи показывает (рис. 4), что при $BN \parallel AM$ через каждую точку B прямой BN можно провести секущую BA таким образом, чтобы она образовала с лучами BN и AM равные внутренние односторонние углы (т. е. чтобы $\angle MAB = \angle NBA$). Симметричным положением обеих параллелей по отношению к этой секущей обусловливается взаимность параллелизма.

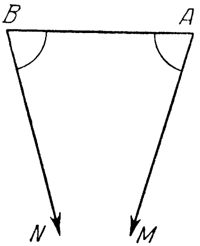

Рис. 4.

Достоинство этого приема заключается в том, что с первых же шагов в учение о параллельных линиях вводится понятие о секущей равного наклона, играющей большую роль во всем строении неевклидовой геометрии. Это понятие есть и у Гаусса; вернее, термина такого у Гаусса нет, но точки A и B, в которых параллели пересекаются секущей равного наклона, он называет «соответственными точками параллельных лучей». Однако к этой концепции Гаусс пришел, повидимому, позже; для доказательства же теоремы о взаимности параллелизма Гаусс пользуется другим приемом, по существу сходным с приемом, который для этой цели применяет Лобачевский.

[1] Этим термином Больаи также не пользуется, заменяя его символическим обозначением $BN \triangleq AM$.

Идея этого приема заключается в следующем. Чтобы обнаружить, что при $BN \parallel\!| AM$ также $AM \parallel\!| BN$ (рис. 5), нужно показать, что всякий луч AK, проходящий внутри угла BAM, встречает луч BN в некоторой точке L. Как Гаусс, так и Лобачевский фактически дают построение этой точки L при помощи циркуля и линейки.

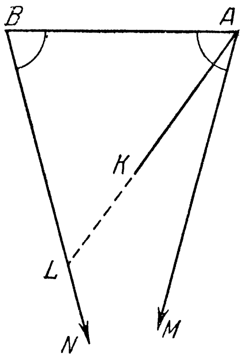

Рис. 5.

Наконец, несколько слов о третьей теореме. Больаи указывает, что она доказывается проще всего стереометрическими соображениями. Если лучи AA' и BB' параллельны, а точка C лежит вне плоскости, содержащей эти параллели, то луч CC', параллельный обеим, если таковой существует, должен лежать в плоскостях CAA' и CBB'. И действительно, с большой простотой доказывается, что луч CC', по которому эти плоскости пересекаются, параллелен лучам AA' и BB'. Образуется своеобразный триэдр с бесконечно удаленной вершиной, ребра которого попарно параллельны. Отсюда непосредственно вытекает и обратное предложение: если лучи AA' и BB' параллельны третьему лучу CC', не лежащему с ними в одной плоскости, то три луча AA', BB' и CC' всегда представляют собой ребра такого триэдра, а потому лучи AA' и BB' параллельны. От этого легко перейти к тому случаю, когда все три луча лежат в одной плоскости; нужно только прибегнуть к четвертому лучу, этой плоскости не принадлежащему. Однако, указывая на исключительную простоту и изящество этих рассуждений, Больаи все же дает для того случая, когда три луча лежат в одной плоскости, планиметрическое доказательство, и вполне аналогичные планиметрические доказательства дают Лобачевский и Гаусс.

Сверх этих теорем, Лобачевский приводит четвертую, устанавливающую, что параллельные лучи в воображаемой геометрии неограниченно сближаются в направлении параллелизма. Конечно, Больаи это хорошо знает: недаром он называет эти лучи (в подстрочном примечании) асимптотическими. Но этого предложения он в «Аппендиксе» не приводит, потому что оно не соответствует его синтезу; это характерное предложение именно неевклидовой (гиперболической) геометрии. Но зато у Больаи есть другая теорема, вполне соответствующая его схеме, потому что она представляет одно из наиболее характерных предложений, «не зависящих от истинности или ложности XI аксиомы».

Если в евклидовом пространстве через два параллельных луча p и q проведем плоскости P и Q таким образом, чтобы одна была перпендикулярна к плоскости параллелей (p, q), а другая была к ней наклонена под острым углом, то эти плоскости пересекутся со стороны острого угла. Казалось бы, что это предложение представляет такую аналогию с постулатом Евклида, что может его заменить. Но Больаи тонко подметил, что это не так: это предложение (при установленном выше определении параллельных лучей) остается справедливым и в неевклидовой геометрии, т. е. по его терминологии принадлежит «абсолютной» геометрии; более того, оно имеет в дальнейшем решающее значение.

Однако, как настойчиво ни проводит Больаи свою систему абсолютной геометрии, выдержать ее вполне он, конечно, не может, и дилемма Лобачевского-Гаусса у него выплывает, но не в той форме, как у Саккери Ламберта и Лежандра: он непосредственно примыкает к тексту постулата Евклида.

Если два луча AM и BN образуют с секущей внутренние односторонние углы, сумма которых больше $2d$, то они не могут быть параллельными, потому что в этом случае внутри угла BAM пройдут лучи, не встречающие луча BN. Среди этих лучей имеется *первый* луч AL, не встречающий BN. Больаи рассматривает сумму углов ABN и BAL. Он с необычайной простотой доказывает, что сумма этих углов либо *всегда* равна $2d$, либо *всегда* меньше $2d$; это и отличает геометрию Евклида (Σ) от новой, им созданной геометрии (S). Заканчивая этим теорию параллельных линий и нарушая здесь свой синтез, Больаи, однако, сейчас же к нему вновь возвращается.

Глава VII «Новых начал», посвященная теории параллельных линий, более чем какая-либо другая выявляет разницу в структуре новой геометрии у Лобачевского и Больаи. Оно и естественно: различием в теории параллельных линий определяется все различие «употребительной» и «воображаемой» геометрии; и Лобачевский старается отчетливее выявить это различие путем сопоставления. Покажем это на нескольких примерах.

В употребительной геометрии перпендикуляры к одной и той же прямой параллельны (ст. 101)[1]), в воображаемой они расходятся (ст. 108). В употребительной геометрии две параллельные прямые сохраняют одна от другой на всем протяжении одно и то же расстояние (ст. 103), в воображаемой геометрии они неограниченно сближаются в направлении параллелизма и неограниченно расходятся в противоположном направлении (ст. 109). В употребительной геометрии в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (ст. 105), в воображаемой геометрии квадрат гипотенузы более суммы квадратов катетов (ст. 107). В употребительной геометрии расстояния точек одной стороны угла от другой стороны пропорциональны расстояниям этих точек от вершины (ст. 104), в воображаемой — первые расстояния возрастают быстрее вторых (ст. 106).

В таких сопоставлениях со всей отчетливостью выясняется отличие неевклидовой геометрии от евклидовой. У Больаи это отличие нужно распознать в конечных результатах: оно скрывается в предположениях, формулированных в такой форме, «которая не зависит от истинности или ложности XI аксиомы».

§ 7. Восстановление евклидовой планиметрии

Из теории параллельных линий вытекает учение о расположении прямых и плоскостей в пространстве, систематически установленное Лобачевским, можно сказать, в законченной форме; это учение во всех деталях было известно

---

[1]) «Ст.» — *статья*; так называет Лобачевский рубрики во всех своих сочинениях. [*Ред.*]

и Гауссу и Больаи. Больаи уделяет ему гораздо меньше места, чем Лобачевский, потому что предложения, сюда относящиеся, редко укладываются в формы того синтеза, который Больаи ставит себе задачей. Но в настоящую геометрию все эти достижения претворились только тогда, когда была построена связанная с ними метрика. Только тригонометрические уравнения дали возможность развернуть новую геометрию до тех же пределов, до каких дошла геометрия Евклида, — создать аналитическую и дифференциальную геометрию. Только совместность и независимость уравнений тригонометрии и совпадение численных результатов, к которым эти уравнения различными путями приводили, создали как у Лобачевского, так и у Гаусса и Больаи по крайней мере субъективную уверенность в логической правильности новой, «воображаемой», «антиевклидовой» геометрии. Только это достижение дало Гауссу право утверждать, что в новой геометрии он «в состоянии решить всякую задачу», только оно составило тот «новый мир», об открытии которого Янош Больаи с таким торжеством возвестил своему отцу, только открытие метрики дало Лобачевскому основание к тому выводу, который он делает в «Заключении» к мемуару «О началах геометрии»:

> «После того, как мы нашли уравнения, которые представляют зависимость углов и боков треугольника; когда, наконец, дали мы общие выражения для элементов линий, площадей и объема тел, все прочее в Геометрии будет уже аналитикой, где исчисления необходимо должны быть согласны между собой и ничего не в состоянии открыть нам нового, чего бы не заключалось в тех первых уравнениях, откуда должны быть взяты все отношения геометрических величин друг к другу».

Естественно поэтому возникает вопрос, какие пути привели творцов неевклидовой геометрии к установлению ее метрики.

Быть может, наиболее замечательным является то, что путь этот по замыслу своему один и тот же у всех творцов неевклидовой геометрии — он ведет через воссоздание двумерной евклидовой геометрии в недрах неевклидова (гиперболического) пространства, он ведет через предельную линию и предельную поверхность.

Больаи определяет эту поверхность следующим образом. Если из точки A луча AM провести отрезок AB равного наклона к каждому лучу BN, параллельному AM, то геометрическое место точек B (включая и точку A) составит *поверхность* F, как он ее называет, «предельную поверхность» по терминологии Лобачевского. Это определение действительно «абсолютное», по терминологии Больаи; со всей строгостью оно определяет поверхность F как для евклидова, так и для гиперболического пространства.

Для Лобачевского предельная поверхность по замыслу своему — сфера бесконечно большого радиуса, и, исходя из этого определения, он строит ее геометрию специфическими средствами неевклидовой геометрии. В мемуаре «О началах геометрии» это определение так и формулировано. Но по характеру своему оно не содержит еще элементов, которые могли бы служить точками отправления точных рассуждений. Поэтому Лобачевский вынужден прибегать к другим признакам поверхности, в которых по существу коренится ее определение. В «Новых началах» и в «Геометрических исследованиях» он дает определение предельной линии, а предельную поверхность получает путем вращения этой линии вокруг любой из ее осей. Предельная поверхность, таким образом, подобно сфере, имеет бесчисленное множество осей вращения. «С предположением переменных углов параллельности, — так начинает Лобачевский VIII главу «Новых начал», — можем представлять себе кривую, которую назовем *предельная*, где всякие две параллельные к одной данной бывают наклонены под одним углом к хорде». По существу, с этим совпадает определение Больаи; построение предельной линии, которое Лобачевский вслед за тем дает, мало отличается от построения Больаи (хотя последний начинает с предельной поверхности, а не с предельной линии). Но уже из приведенной цитаты ясно, что с первых же слов Лобачевский становится на позицию неевклидовой геометрии, тогда как Больаи старается сохранить общность абсолютной геометрии.

Значение предельной поверхности и для Лобачевского и для Больаи коренится, конечно, в том, что на ней сохраняется планиметрия Евклида, если роль прямых линий играют предельные линии поверхности. Ка́к доказывают это один и другой геометры? Больаи исходит из того предложения абсолютной геометрии, которое мы привели выше. Вопрос заключается в том, всегда ли на предельной поверхности пересекаются предельные линии AA' и BB' (рис. 6), из которых одна (AA') перпендикулярна к секущей AB, а другая (BB') образует с ней острый угол ABB'. Проводя оси поверхности AM и BN, Больаи получает две плоскости MAA' и NBB', из которых одна перпендикулярна к плоскости $MABN$, а другая к ней наклонена под острым углом. Такие две плоскости, как Больаи обнаружил выше, пересекаются всегда (независимо от постулата о параллельных линиях) по прямой CP, параллельной AM и BN; в пересечении с поверхностью эта прямая дает точку C, в которой встречаются линии AA' и BB'. Эта точка, таким образом, существует всегда (имеет ли место постулат Евклида или нет), и потому на предельной поверхности всегда осуществляется постулат Евклида. К восстановлению евклидовой планиметрии в гиперболическом пространстве Больаи приводит, таким образом, установленная им теорема абсолютной геометрии.

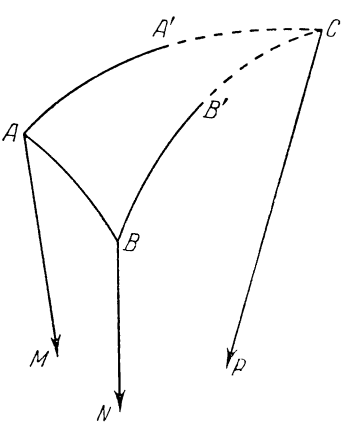

Рис. 6.

Лобачевского приводит к тому же заключению то, что «в воображаемой геометрии» сумма углов геодезического треугольника ABC на предельной поверхности равна двум прямым. Он пользуется для доказательства этого триэдром AM, BN, CP с вершиной в бесконечности. Он доказывает средствами неевклидовой геометрии, что в триэдре (ABC, M) сумма двугранных углов приближается к $2d$, когда вершина M неограниченно удаляется, и обращается в $2d$ когда эта вершина уходит в бесконечность.

Нужно сказать, что в процессе развертывания учения о предельной поверхности Больаи все же останавливается и отдельно на случаях Σ и S; он указывает, что в первом случае предельная поверхность представляет собой плоскость, во втором — кривую поверхность, но все рассуждение принадлежит абсолютной геометрии; у Лобачевского оно целиком относится к гиперболической геометрии.

Что касается Гаусса, то мы не располагаем достаточно полными сведениями относительно того, как он обрабатывал этот материал. Но в сохранившемся в обрывках очень сжатом письме Вахтера[1]) от 12 декабря 1816 г. к Гауссу, явно написанном под впечатлением указаний, которые он от Гаусса получил при личной беседе, Вахтер пишет, что он старался проникнуть в «трансцендентную тригонометрию» Гаусса, пользуясь сферой бесконечно большого радиуса. Такое указание он, очевидно, получил от Гаусса. В набросках же, относящихся, насколько можно судить, к 1831 г., Гаусс дает определение предельной линии, которую он называет «Trope» совершенно в духе Больаи.

Все это приводит к такому выводу: и Лобачевский и Гаусс пришли к предельной поверхности путем перехода от сферы при неограниченном возрастании ее радиуса; не лишено возможности, что этим путем к ней пришел и Больаи. Но формальное обоснование учения о предельной поверхности требовало более точного определения; Лобачевский и Гаусс пришли к одинаковому определению предельной поверхности, однако они не пользовались рассуждениями, основанными на абсолютной геометрии, а шли к своей цели своеобразными путями.

---

[1]) C. F. Gauss, Werke, т. VIII.

Вместе с евклидовой геометрией на предельной поверхности, естественно, сохраняется и вся евклидова тригонометрия; это — источник, из которого была почерпнута метрика гиперболического пространства.

§ 8. Латентные уравнения Лобачевского

Вслед за определением параллели в неевклидовой плоскости Лобачевский устанавливает функцию, тесно с этим определением связанную.

Если x есть расстояние CD точки C от прямой AB (рис. 7), а CK — луч, параллельный AB, то угол DCK в плоскости Лобачевского есть острый угол, который представляет собой функцию от x; Лобачевский обозначает ее через $\Pi(x)$ [в первых своих сочинениях — через $F(x)$]. В евклидовой геометрии — это постоянный угол $\left(\text{равный } \frac{\pi}{2}\right)$, в неевклидовой геометрии — это однозначная функция, монотонно убывающая с возрастанием x и принимающая при этом все значения, содержащиеся между $\frac{\pi}{2}$ и 0 $\left[\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}\right.$ при $x \to 0$, $\Pi(x) \to 0$ при $\left. x \to \infty\right]$. В непрерывной плоскости (что Лобачевский всегда подразумевает) каждому острому углу ω отвечает отрезок x, для которого $\Pi(x) = \omega$.

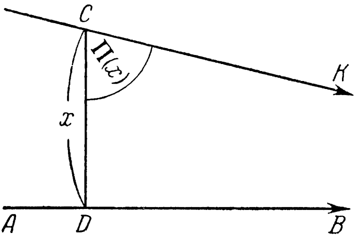

Рис. 7.

Это дает Лобачевскому возможность в гиперболическом пространстве выразить каждый острый угол ω соответствующим прямолинейным отрезком x; это — линейная мера угла в гиперболическом пространстве. Заметим, однако, тут же, что приняв такую точку отправления, Лобачевский уже с самого начала отказывается от абсолютной точки зрения.

К выводу тригонометрических соотношений Лобачевский возвращается несколько раз, однако он всегда при этом следует одному и тому же замыслу, по существу чрезвычайно простому, но очень своеобразному. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 8) мы обозначим через a и b катеты, через c гипотенузу, через a' и b' отрезки, линейно выражающие в указанном выше смысле углы A и B, так что

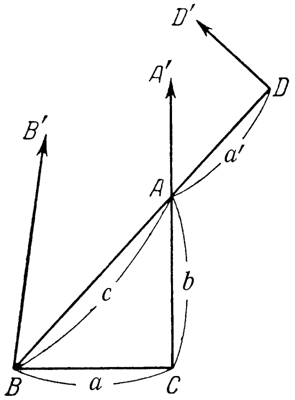

Рис. 8.

$$A = \Pi(a'), \quad B = \Pi(b'). \tag{3}$$

Лобачевский продолжает стороны AB и AC треугольника ABC за точку A и на продолжении отрезка BA откладывает отрезок $AD = a'$. Проводя тогда $DD' \perp DB$, он получает луч DD', параллельный AA'; проведя луч $BB' \parallel CA'$, имеем также $BB' \parallel DD'$. Поэтому $\angle B'BC = \Pi(a)$, $\angle B'BD = \Pi(c + a')$. Следовательно,

$$\Pi(a) = B + \Pi(c + a')$$

или

$$\left.\begin{aligned} \Pi(a) &= \Pi(b') + \Pi(c + a'), \\ \Pi(b) &= \Pi(a') + \Pi(c + b'), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где второе уравнение написано по аналогии с первым. Уравнения (4) представляют собой соотношения в прямоугольном треугольнике, выраженные в функции $\Pi(x)$.

Откладывая отрезок a' на AB по другую сторону и обобщая функцию $\Pi(x)$ путем положения $\Pi(-x) = \pi - \Pi(x)$, Лобачевский таким же образом приходит к двум другим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} \Pi(c - a') &= \Pi(b') + \Pi(a), \\ \Pi(c - b') &= \Pi(a') + \Pi(b). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В уравнениях (4) и (5) уже с избытком заключается вся тригонометрия гиперболической плоскости. Лобачевский их развивает, как обыкновенно развертывают тригонометрические уравнения прямоугольного треугольника, т. е. составляет 10 уравнений, определяющих любой из основных элементов треугольника по любым же двум остальным. Но эти уравнения пригодны только для гиперболической плоскости, в евклидовой плоскости отрезков a' и b' не существует. Однако и в гиперболической плоскости соотношения, связывающие стороны и углы треугольника, скрыты за функцией $\Pi(x)$, еще остающейся неизвестной; уравнения (4) и (5) иногда называют поэтому *латентными* уравнениями гиперболической тригонометрии. Для перехода к явным уравнениям, как увидим ниже, Лобачевский пользовался предельной поверхностью.

Гаусс, несомненно, также исходил для построения тригонометрии гиперболической плоскости от предельной поверхности; это видно из письма к нему Вахтера[1]), но о ходе его идей никаких следов не сохранилось.

Для Больаи такой ход идей был бы неприемлем; как уже отмечено, этот прием по самому замыслу чужд абсолютной геометрии. Больаи идет поэтому существенно другим путем.

§ 9. Эквидистантная линия и эквидистантная поверхность

В «Аппендиксе» при выводе тригонометрии большую роль играют линии и поверхности равных расстояний; Больаи не дает им особого названия. *Эквидистантная линия* (как ее теперь называют) — это путь, описываемый концом C постоянного отрезка AC, который движется в плоскости, опираясь вторым концом A на прямую AB (рис. 9), оставаясь перпендикулярным к последней. Иными словами, эквидистанта есть геометрическое место точек C на плоскости, отстоящих на одно и то же расстояние h от некоторой прямой AB, расположенной в той же плос-

[1]) См. стр. 236.

кости; расстояние h называется параметром эквидистанты [1]).

Гаусс называет линию, которая таким образом получается, *параллельной* AB. «Есть ли „параллельная" — прямая или кривая линия, — замечает при этом Гаусс, — это остается еще нерешенным». Эти соображения набросаны Гауссом на последней странице одного математического руководства, и к ним присоединены попытки установить форму линии. Результат сводится к тому, что в евклидовой геометрии — это прямая, в неевклидовой — кривая линия, обращенная вогнутостью к «базе» AB.

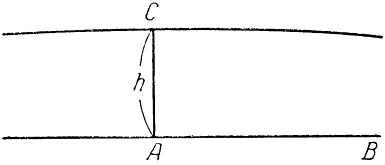

Рис. 9.

Аналогично *эквидистантной поверхностью* называется геометрическое место точек, отстоящих на одно и то же расстояние h от данной плоскости; эта плоскость называется основанием (или базой поверхности), а расстояние h — ее параметром, перпендикуляр же, опущенный из любой точки эквидистантной поверхности на ее базу, называется осью поверхности; эквидистантную поверхность (как и предельную) можно рассматривать как поверхность вращения вокруг любой из ее осей.

Больаи непосредственно после определения линии равных расстояний (эквидистанты) устанавливает основную теорему, носящую абсолютный характер. Если AB есть дуга эквидистанты, ab — ее проекция на основание (базу), u и v — отмеченные на чертеже углы (рис. 10), то

$$AB : ab = \sin u : \sin v. \tag{6}$$

В евклидовой геометрии $u = v$ и $AB = ab$. Этот синтез играет у Больаи решающую роль для построения тригонометрии.

---

[1]) Обычно под эквидистантой разумеют только одну кривую, расположенную только по одну сторону «базы» AB, но иногда две такие кривые, расположенные по обе стороны базы, рассматриваются как две ветви одной эквидистанты.

В чем же заключаются звенья, связывающие предельную и эквидистантную поверхности с плоскостью и дающие возможность построить тригонометрию плоскости? Эта связь коренится в том, что сечение той и другой поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси поверхности, есть окружность, так как та и другая поверхности есть поверхности вращения вокруг любой из ее осей. И так как всякая окружность может быть рассматриваема как сечение плоскости либо с предельной, либо с эквидистантной поверхностью данного параметра, то *всякую плоскую окружность можно рассматривать также как окружность на предельной или эквидистантной поверхности.*

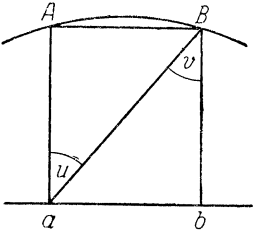

Рис. 10.

Конечно, есть поверхности еще одного типа, на которые укладываются окружности, — это сферы. Если бы тригонометрия сферы в гиперболическом пространстве была известна, то это дало бы возможность непосредственно перейти к плоской геометрии. Но тот факт, что тригонометрия сферы остается без изменения при переходе в гиперболическое пространство, явился апостериорным результатом, к которому творцы неевклидовой геометрии пришли позднее. Для построения плоской гиперболической тригонометрии решающую роль играла предельная и эквидистантная поверхность, а не сфера. Схема заключалась в переходе от тригонометрии предельной поверхности к плоской тригонометрии, а от нее к сферической.

Впрочем, у Лобачевского эквидистантные линии и поверхности в самом построении геометрии роли не играют. Но точкой отправления для построения дифференциальной геометрии, как увидим ниже, у него служит отношение элемента эквидистанты к соответствующему элементу основания.

Теперь нетрудно уяснить, почему именно Больаи несравненно больше пользуется эквидистантными линиями и поверхностями, нежели Лобачевский. Основное свойство эквидистантной поверхности заключается в том, что отношение длины какой бы то ни было линии, лежащей на эквидистантной поверхности, к ее проекции на базисную плоскость основания не зависит от формы этой линии, а вполне определяется параметром поверхности, т. е. расстоянием ее точек от основания. Это обусловливается тем, что равные геодезические элементы (т. е. равные элементы эквидистантных линий) на поверхности можно всегда привести в совмещение вместе с их основаниями. Каждая же линия на эквидистантной поверхности составляется из таких элементов совершенно так же, как ее проекция составляется из соответствующих элементов на плоскости основания. Для данной эквидистантной поверхности это отношение представляет собой, таким образом, постоянную величину.

При переходе же от одной эквидистантной поверхности к другой это отношение представляет собой функцию $g(h)$ параметра h. Ясно, что это свойство эквидистантной поверхности есть свойство «абсолютное»: в евклидовой геометрии это постоянное отношение не зависит также и от параметра: оно всегда равно единице. Для Больаи, по всему замыслу его построения, всякое абсолютное свойство играет особенную роль, является значительным орудием в его построении. Имея возможность присоединить к абсолютным свойствам предельной поверхности абсолютные же свойства эквидистантной поверхности, Больаи, естественно, широко этим пользуется.

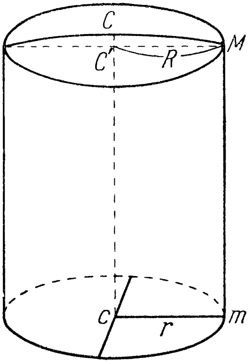

Рис. 11.

Особенное значение здесь имеет следующее обстоятельство. Если спроектировать эквидистантную окружность на плоскость основания, то проекцией будет также окружность (рис. 11). Радиус последней окружности cm есть проекция радиуса CM проектируемой окружности на плоскость основания; поэтому длины этих окружностей относятся, как $CM : cm$. Но проектируемая окружность может быть также рассматриваема как плоская окружность с радиусом $C'M = R (C'M \perp Cc)$. Поэтому если длину окружности радиуса x будем, следуя Больаи, обозначать через $\bigcirc x$, то

$$\bigcirc R : \bigcirc r = CM : cm = g(h) = g(Cc). \qquad (7)$$

Это соотношение — абсолютное: в евклидовой геометрии обе окружности равны, а правая часть равенства (7) обращается в единицу.

Важно еще отметить следующее. Если на сфере, на предельной или эквидистантной поверхности проходит окружность, имеющая центр в точке C, и CM есть ее геодезический радиус (как на чертеже), то ее прямолинейным радиусом служит расстояние MC' точки M от оси вращения CC', проходящей через точку C.

§ 10. Построение тригонометрии в «Аппендиксе» Больаи

Для установления соотношений между сторонами и углами треугольника в евклидовой геометрии понадобились функции, при помощи которых эту связь возможно выразить; это в свое время привело к открытию тригонометрических функций.

Предельная поверхность спасла эти функции в их геометрическом значении и для новой геометрии. Однако их было недостаточно для установления тригонометрии гиперболического пространства. Как оказалось позже, этого можно было достичь при помощи тех же функций, взятых с мнимыми значениями аргумента; это приводит даже к наиболее замечательному синтезу геометрии пространств постоянной кривизны. К этому пришли как Лобачевский, так и Больаи, но только a posteriori; начинать с этого они, конечно, не могли. А потому, естественно, понадобились новые функции, которые проложили бы мост от тригонометрии предельной поверхности к тригонометрии на плоскости. Такую роль у Лобачевского играла функция $\Pi(x)$. Так как руководящей идеей для этого перехода у Больаи служило перенесение окружности с плоскости на предельную поверхность, то он и пришел к своеобразной функции, выражающей длину окружности через ее прямолинейный радиус; эту функцию Больаи, как уже указано выше, обозначает символом $\bigcirc x$.

Для установления соотношений, связывающих элементы прямоугольного треугольника ABC в неевклидовой (гиперболической) плоскости, Больаи поступает следующим образом. Из вершины B треугольника ACB [с прямым углом при вершине C (рис. 12)] он восставляет перпендикуляр BB' к плоскости треугольника, через точки же A и C проводит прямые $A'A$ и $C'C$, параллельные $B'B$. Представим себе предельную поверхность, проходящую через точку A и имеющую параллели $A'A$, $B'B$, $C'C$ своими осями. Плоскости этих трех параллелей попарно вырезывают на предельной поверхности (предельный) треугольник $AB'C'$ с прямым углом при вершине C'.

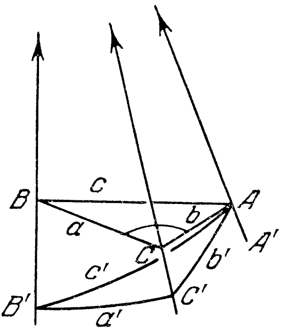

Рис. 12.

В этом треугольнике имеют место соотношения евклидовой геометрии. Если катеты этого треугольника обозначены через a' и b', а гипотенуза — через c', то

$$\bigcirc b' = \bigcirc c' \sin B', \tag{8}$$

где $\bigcirc b'$ и $\bigcirc c'$ — длины окружностей с радиусами b' и c' на предельной поверхности. Но так как окружности, имеющие на предельной поверхности радиусы $A'B'$ и $A'C'$, можно рассматривать как плоские окружности с плоскими радиусами b и c, то $\bigcirc b' = \bigcirc b$, $\bigcirc c' = \bigcirc c$; так как, сверх того, $\angle B' = \angle B$, то предыдущее равенство переходит в основное соотношение неевклидовой геометрии на плоскости

$$\bigcirc b = \bigcirc c \sin B. \tag{8a}$$

И таким же образом, конечно,

$$\bigcirc a = \bigcirc c \sin A. \tag{8b}$$

Разбивая косоугольный треугольник, как это обыкновенно делается, на два прямоугольных, мы получим теорему синусов для всякого треугольника в том «абсолютном виде», в каком мы уже привели ее выше [(1) на стр. 220]. Мы, таким образом, получаем два уравнения, связывающие стороны и углы треугольника.

Получить третье соотношение в абсолютном виде хотя бы для прямоугольного треугольника Больаи так легко не удается. Он прибегает к следующему обходному средству: из вершины A прямоугольного треугольника ABC (рис. 13) он восставляет перпендикуляр AD к катету AC, а из B опускает перпендикуляр BD на AD. Тогда соотношения (8) в применении к прямоугольному треугольнику ADB дают:

$$\bigcirc d = \bigcirc c \sin\alpha = \bigcirc c \cos A. \qquad (9)$$

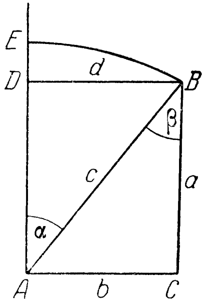

Рис. 13.

Из уравнений (8b) и (9) получаем абсолютное соотношение

$$(\bigcirc c)^2 = (\bigcirc a)^2 + (\bigcirc d)^2, \qquad (10)$$

которое мы уже приводили выше [(2) на стр. 221]; но оно содержит отрезок d, не входящий в состав треугольника. Необходимо поэтому выразить этот отрезок через элементы треугольника. Больаи для этого делает предварительно вывод, относящийся к эквидистанте: проводим через точку B дугу эквидистанты BE; если фигура $EBCA$ вращается вокруг оси AE, то дуга EB описывает эквидистантную поверхность; окружность $\bigcirc d$ имеет на этой поверхности радиус EB. Соотношение (6) (стр. 240) здесь дает:

$$\bigcirc d : \bigcirc b = \sin\alpha : \sin\beta. \qquad (11)$$

С другой стороны, фигура $EBCA$ не отличается от фигуры $CMmc$ на рис. 11. Соотношение (7) дает:

$$EB : AC = \bigcirc d : \bigcirc b = g(BC) = \sin\alpha : \sin\beta. \qquad (12)$$

Таким образом, соотношение

$$\bigcirc d = \bigcirc b\, g(a) \qquad (13)$$

выражает отрезок d через a, и пифагорова теорема теперь получает абсолютный характер:

$$(\bigcirc c)^2 = (\bigcirc a)^2 + (\bigcirc b\, g(a))^2. \tag{14}$$

В евклидовой геометрии $g(a)=1$, и это соотношение принимает обычную форму. Ясно, что этому сопутствует также уравнение

$$(\bigcirc c)^2 = (\bigcirc b)^2 + (\bigcirc a\, g(b))^2. \tag{14a}$$

Все четыре уравнения (8a), (8b) и (14), (14a), связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника, таким образом установлены в абсолютном виде; но они содержат две своеобразные функции $\bigcirc x$ и $g(x)$; они также еще носят латентный характер.

§ 11. Преобразование уравнений Больаи

Как уравнения Лобачевского (4) и (5), так и уравнения Больаи (8a), (8b) и (14), (14a) с избытком устанавливают соотношения, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника. Но те и другие уравнения имеют латентный характер; выражаемые ими уравнения скрыты за тремя функциями $\bigcirc x$, $g(x)$, $\Pi(x)$, которые еще остаются неизвестными. Задача разыскания этих функций занимает центральное место в деле установления неевклидовой метрики.

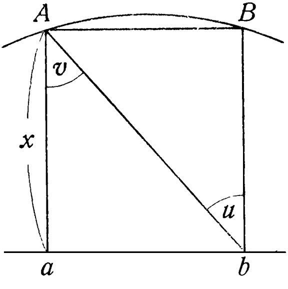

Рис. 14.

Первый шаг в этом направлении заключается в том, что функция $g(x)$ выражается через $\Pi(x)$. С наибольшей простотой это выполнено Больаи. Он пользуется для этого уравнением (6), которое напишем применительно к рис. 14 в таком виде:

$$AB : ab = \sin u : \sin v. \tag{15}$$

Когда точка B неограниченно удаляется от A по эквидистанте AB, а вместе с тем точка b неограниченно удаляется от a по прямой ab, то угол Aba стремится к нулю, а угол u — к $\frac{\pi}{2}$. Вместе с тем луч AB стремится занять положение, параллельное ab; это значит, угол v стремится к $\Pi(Aa)$ или к $\Pi(x)$, если x есть параметр эквидистанты. Уравнение (15) в пределе дает:

$$g(x) = \frac{1}{\sin \Pi(x)}; \tag{16}$$

это и есть требуемое соотношение, выражающее функцию $g(x)$ через $\Pi(x)$ (у Больаи оно приведено в иных обозначениях). Этот простой результат имеет очень большое значение. Прежде всего, он приводит к двум новым формам уравнения, связывающего катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника. Именно, уравнения (14) и (14а) принимают вид

$$(\bigcirc c)^2 = (\bigcirc a)^2 + \frac{(\bigcirc b)^2}{\sin^2 \Pi(a)}, \tag{17}$$

$$(\bigcirc c)^2 = (\bigcirc b)^2 + \frac{(\bigcirc a)^2}{\sin^2 \Pi(b)}. \tag{17a}$$

Эти соотношения носят абсолютный характер: в евклидовой геометрии $\Pi(a) = \Pi(b) = \frac{\pi}{2}$; мы получаем обычное выражение пифагоровой теоремы.

Больаи необычайно простым соображением приходит отсюда к наиболее установившемуся теперь в неевклидовой геометрии выражению того же соотношения. Пусть ABC будет прямоугольный треугольник, расположенный для наглядности в вертикальной плоскости (рис. 15). В горизонтальной плоскости проводим перпендикуляр AA' к катету AC и передвигаем треугольник ABC в положение $A'B'C'$ так, что он остается все время вертикальным, причем вершина A движется по прямой AA', а катет AC остается в горизонтальной плоскости $A'AC$ перпендикулярным к AA'. Вершины B и C опишут эквидистантные дуги с общим основанием (базой) AA'; вместе с тем дуга CC' есть проекция дуги BB' на горизонтальную плоскость. В силу общего соотношения между длиной дуги эквидистанты и ее проекцией

$$BB' = AA' g(c) = \frac{AA'}{\sin \Pi(c)},$$

$$CC' = AA' g(b) = \frac{AA'}{\sin \Pi(b)},$$

$$BB' = CC' g(a) = \frac{CC'}{\sin \Pi(a)},$$

откуда

$$g(c) = g(a) g(b), \tag{18a}$$

т. е.

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b). \tag{18b}$$

Это соотношение, полученное из абсолютных зависимостей, остается, конечно, абсолютным. Но в евклидовой геомет-

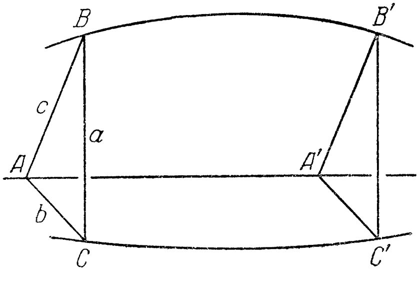

Рис. 15.

рии оно непосредственно не воспроизводит пифагоровой теоремы, а обращается в тождество.

Теперь уравнения прямоугольного треугольника, установленные в «Аппендиксе», образуют систему (8a), (8b) и (18b); они все еще содержат две неизвестные функции $\bigcirc x$ и $\Pi(x)$. Больаи удается выразить одну из них через другую; он достигает этого дальнейшим развитием абсолютных соотношений.

Возвратимся к соотношению (6) (стр. 240). В обозначениях, принятых на рис. 16, оно теперь может быть написано в виде

$$AB : CD = \cos\gamma : \sin\beta.$$

Если примем во внимание, что это отношение не зависит от длины дуги эквидистанты AB, так что

$$A'B : C'D = AB : CD,$$

то получим:

$$\cos\gamma' : \sin\beta' = \cos\gamma : \sin\beta. \tag{19}$$

Этим устанавливается, что в прямоугольном треугольнике BCD отношение $\cos\gamma : \sin\beta$ при постоянном катете BD

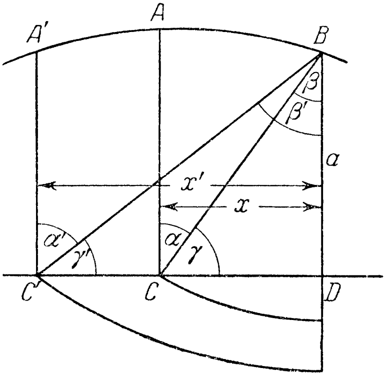

Рис. 16.

не зависит от другого катета; в евклидовой геометрии оно равно единице. Это абсолютное соотношение и служит для Больаи точкой отправления. Если через x и x' обозначим переменные катеты, то теорема синусов (1), которая в прямоугольном треугольнике вытекает из уравнений (8a) и (8b), в применении к треугольникам CBD и $C'BD$ дает:

$$\left.\begin{aligned} \bigcirc x : \bigcirc a &= \sin\beta : \sin\gamma, \\ \bigcirc x' : \bigcirc a &= \sin\beta' : \sin\gamma'. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Уравнения (19) и (20) дают:

$$\bigcirc x : \bigcirc x' = \operatorname{ctg}\gamma : \operatorname{ctg}\gamma'.$$

Это соотношение остается в силе при любом значении a. Если мы станем a неограниченно увеличивать, оставляя x и x' без изменения, то углы γ и γ' будут стремиться к $\Pi(x)$ и $\Pi(x')$. Предыдущее соотношение можно, таким образом, представить в виде

$$\frac{\bigcirc x}{\operatorname{ctg}\Pi(x)} = \frac{\bigcirc x'}{\operatorname{ctg}\Pi(x')}. \tag{21}$$

Это показывает, что отношение $\bigcirc x : \operatorname{ctg}\Pi(x)$ есть величина постоянная $2C$, т. е.

$$\bigcirc x = 2C\operatorname{ctg}\Pi(x). \tag{22}$$

К вопросу о значении постоянной C мы возвратимся ниже.

Подставляя соответствующие выражения вместо $\bigcirc a$, $\bigcirc b$ и $\bigcirc c$ в уравнения (8a) и (8b), приведем их к виду

$$\operatorname{ctg}\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\sin A, \tag{23a}$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(b) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\sin B. \tag{23b}$$

Вместе с уравнением (18b) они составляют систему независимых уравнений, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника; они содержат только одну неизвестную функцию $\Pi(x)$, которую еще предстоит определить.

§ 12. Преобразование уравнений Лобачевского

В чистом виде, как они здесь приведены, мы находим уравнения (18b) и (23) только у Лобачевского; Больаи дает их в эквивалентной форме, но в других, более сложных обозначениях. Лобачевский приходит к этим обозначениям, пользуясь, с одной стороны, евклидовыми уравнениями, имеющими место на предельной поверхности, а с другой, — своими латентными уравнениями (4) и (5).

Однако для выполнения этого ему нужны еще две вспомогательные функции; первую из них мы находим и в «Аппендиксе». Оба геометра приходят к ней следующим образом.

Предельные линии называются параллельными, если они имеют общие оси. Если AB и CD суть дуги двух параллельных предельных линий (рис. 17), содержащиеся между теми же двумя осями, то отношение их длин $AB : CD$ зависит только от расстояния между ними x, отсчитываемого по оси. Функцию от x, выражающую это отношение, Больаи обозначает через X. Лобачевский не вводит для нее особого обозначения; все же для отчетливости будем ее обозначать через $\psi(x)$, так что

$$AB : CD = X = \psi(x). \quad (24)$$

При обозначениях, указанных на рис. 17,

$$AB : CD = \psi(x),$$

$$CD : EF = \psi(y),$$

$$AB : EF = \psi(x+y),$$

а потому

$$\psi(x+y) = \psi(x) \cdot \psi(y). \quad (25)$$

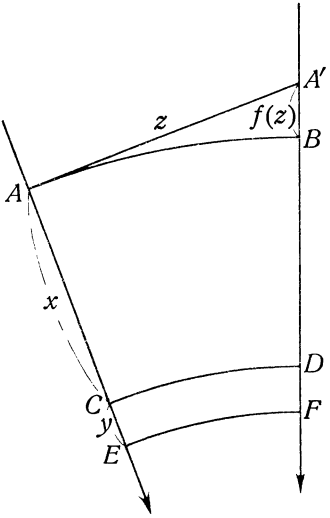

Рис. 17.

Этим функциональным уравнением $\psi(x)$ определяется с точностью до некоторой постоянной, именно

$$\psi(x) = a^x = e^{\frac{x}{l}}, \quad (26)$$

где a (или l) — некоторая постоянная; по геометрическому определению функции $\psi(x)$ (считаем $AB > CD$) постоянная l имеет положительное значение.

Все эти соображения как бы сами собой напрашиваются; и вполне естественно, что Лобачевский и Больаи устанавливают эту функцию совершенно одинаково. Разница заключается разве только в том, что Больаи обозначает постоянную l, фигурирующую в равенстве (26), через i, Лобачевский же поступает иначе. Он замечает, что при надлежащем выборе единицы длины постоянную l можно свести к единице и, таким образом, привести уравнение (26) к виду

$$\psi(x) = e^x. \tag{26a}$$

Лобачевский всегда пользуется этим сокращенным обозначением. Фиксированная таким образом единица длины определяется чисто геометрически; в гиперболической геометрии существует, следовательно, единица длины, имеющая особенное преимущественное значение; об этой именно «определенной, хотя нам и не известной единице длины» упоминает Гаусс в письме к Тауринусу. Мы здесь сохраним более общее обозначение, принятое в уравнении (26).

Лобачевский вводит, однако, в рассмотрение еще одну функцию. Если $AA' = z$ (на том же рис. 17) есть отрезок касательной к предельной линии AB в точке A и если через точку A' мы проведем ось $A'B$ той же предельной линии до встречи с нею в точке B, то расстояние $A'B$, очевидно, представляет собой функцию от z; эту функцию Лобачевский обозначает через $f(z)$. В евклидовой геометрии $f(z) = 0$ при всяком z, так как предельная линия AB совпадает с прямой AA'. Лобачевский обнаруживает, что при помощи этой функции соотношение между катетами a, b и гипотенузой c прямоугольного треугольника может быть выражено в такой простой форме:

$$f(c) = f(a) + f(b). \tag{27}$$

Это уравнение выведено с таким искусством, что мы считаем нужным этот вывод привести, тем более что он уяснит читателю, для чего эти функции $f(x)$ и $\psi(x)$ Лобачевскому понадобились.

Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C (рис. 18) поместим для наглядности в горизонтальной плоскости, и из вершины A восставим перпендикуляр AA' к этой плоскости, через две другие вершины B и C проведем лучи BB' и CC', параллельные AA'. Далее, представим себе предельную поверхность, проходящую через точку A и имеющую лучи AA', BB' и CC' своими осями. Оси BB' и CC' встретят предельную поверхность в точках B'' и C''; плоскости, определяемые тремя параллелями, вырежут на поверхности предельный треугольник $AB''C''$, стороны которого, следуя Лобачевскому, обозначим через p, q и r, как указано на рис. 18; аналогичное построение мы уже делали выше (стр. 244, рис. 12). Теперь

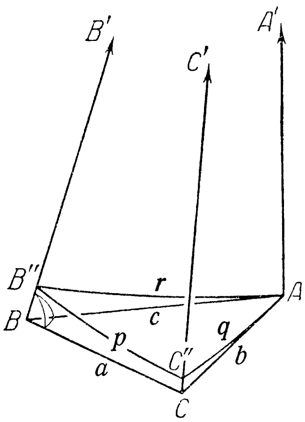

Рис. 18.

триэдр, образованный тремя параллелями и их плоскостями, со всеми линиями, лежащими в его гранях, развернем на плоскость $B'BAA'$. Эту развертку выполним следующим образом. Грань $C'CAA'$ поворачиваем вокруг оси AA' до тех пор, пока она не упадет в плоскость $B'BAA'$, а затем поворотом грани $C'CBB'$ вокруг нового положения CC' приведем ее в ту же плоскость (рис. 19). Предельные дуги p, q, r развернутся в одну предельную дугу $B''AC''B''$, окаймленную с обеих сторон осью BB', по которой при развертывании произведен разрез. Отрезок BB'' повторяется, таким образом, два раза; из его расположения в нижней части рис. 19 видим, что он равен $f(c)$. Через точку C Лобачевский проводит еще предельную дугу $CD\,(t)$, параллельную $C''B''\,(p)$. Отрезок BB'' в верхней части чертежа теперь разбивается на два отрезка BD и DB'', из которых первый BD равен $f(a)$, а второй $DB'' = CC'' = f(b)$. Отсюда и вытекает равенство (27). Отношение дуг $t:p$ явно равно $\psi(CC'')$; следовательно, согласно формуле (26a)

$$t = p\, e^{CC''} = p\, e^{f(b)}. \tag{28}$$

Вместе с тем выясняется, зачем Лобачевскому понадобились функции $\psi(x)$ и $f(x)$.

Дальше рассуждения Лобачевского развиваются следующим образом. Уравнения (4) и (5) (стр. 238) содержат пять величин (a, b, c, a', b'). Если удастся исключить две из них, то получится соотношение между тремя элементами треугольника, если же из них удастся исключить три величины, то получится соотношение между двумя элементами прямоугольного треугольника (например, между двумя катетами), которое неизбежно должно представлять собой тождество. Комбинируя латентные уравнения (4) и (5) с соотношениями, связывающими стороны и углы треугольника $AB''C''$ на предельной поверхности, Лобачевский с успехом выполняет исключение в том и другом виде [1]). Исключение катета b и гипотенузы c приводит к соотношению

$$\cos \Pi(a') = \sin \Pi(b') e^{f(a)}, \quad (29)$$

исключение же острых углов, определяемых отрезками a' и b', приводит к соотношению

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) e^{f(a)}. \quad (30)$$

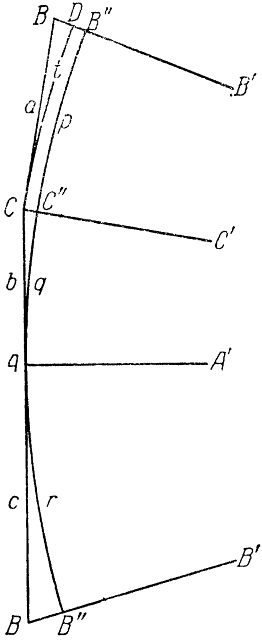

Рис. 19.

Это — уравнения, связывающие три элемента прямоугольного треугольника, однако все еще в латентном виде.

[1]) Ход вычислений подробно разъяснен в примечаниях к предложению 35 «Геометрических исследований» (Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. I, М.—Л., 1946, стр. 149—152). Впрочем, в различных работах Лобачевский это исключение выполняет существенно различными способами.

Умножая обе части уравнения (30) на $e^{f(b)}$ и принимая во внимание соотношение (27), получаем:

$$\sin \Pi(b) e^{f(b)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)}. \tag{31a}$$

И так как это соотношение, естественно, сопровождается аналогичным соотношением

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)}, \tag{31b}$$

то Лобачевский приходит к двум равенствам:

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(b) e^{f(b)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)},$$

неизбежно представляющим собой тождества. Значит, произведение $\sin \Pi(x) e^{f(x)}$ не зависит от значения x, т. е. имеет постоянное значение. Принимая же во внимание, что при $x = 0$ $\Pi(x) = \Pi(0) = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = f(0) = 0$, мы это постоянное значение находим:

$$\sin \Pi(x) e^{f(x)} = 1, \quad e^{f(x)} = \frac{1}{\sin \Pi(x)}. \tag{32}$$

Вместе с тем, уравнения (29) и (3) (стр. 238) дают:

$$\cos A \sin \Pi(a) = \sin B; \tag{33a}$$

этому, очевидно, сопутствует соотношение

$$\cos B \sin \Pi(b) = \sin A. \tag{33b}$$

Уравнение же (30) принимает вид

$$\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c), \tag{34}$$

т. е. возвращает нас к уравнению Больаи (18b), к которому, таким образом, еще раньше пришел Лобачевский.

Уравнения (33) и (34) суть три независимых уравнения, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника. В этом виде они особенно интересны в том отношении, что определяют стороны прямоугольного треугольника по его углам. То обстоятельство, что стороны треугольника в неевклидовой плоскости вполне определяются его углами, доказывается, впрочем, очень просто, без помощи тригонометрических вычислений. Перемножая уравнения (33a) и (33b) и учитывая уравнение (34), получим соотношение

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = \sin \Pi(c), \tag{35}$$

непосредственно определяющее гипотенузу по острым углам; оно требует, чтобы произведение $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B$ было меньше единицы, т. е. чтобы сумма $A + B$ была меньше $\frac{\pi}{2}$.

Из этих уравнений алгебраическим путем посредством исключения можно составить полную систему уравнений прямоугольного треугольника, т. е. 10 уравнений, из которых по любым двум элементам прямоугольного треугольника можно вычислить любой третий элемент. Больаи в своих «Замечаниях» к «Геометрическим исследованиям»[1]) подробно поясняет, почему этих уравнений должно быть 10 (по числу сочетаний из 5 элементов по 3); Лобачевский вполне справедливо считает это тривиальным и непосредственно выводит эти 10 уравнений.

Исключая из уравнений (33a) и (33b), переписанного в виде $\cos B = \frac{\sin A}{\sin \Pi(b)}$, угол B, получаем:

$$\sin^2 \Pi(b) = \cos^2 A \sin^2 \Pi(a) \sin^2 \Pi(b) + \sin^2 A.$$

Заменяя же $\sin^2 \Pi(a) \sin^2 \Pi(b)$ через $\sin^2 \Pi(c)$, а затем выражая квадраты синусов через квадраты косинусов, получим:

$$\cos^2 \Pi(b) = \cos^2 \Pi(c) \cos^2 A$$

и поэтому

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos A. \tag{36a}$$

Таким же образом получим:

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos B. \tag{36b}$$

Каждое из этих уравнений определяет катет по гипотенузе и прилежащему острому углу. Выражаемое ими соотношение в настоящее время часто называют *теоремой косинусов*.

---

[1]) См. очерк «Янош Больаи», стр. 188 этой книги.

Умножая обе части уравнения (33b) на $\sin \Pi(a)$, получим:

$$\sin \Pi(a) \sin A = \cos B \sin \Pi(c).$$

Разделив же уравнение (36b) почленно на это последнее уравнение, получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin A \tag{37a}$$

и таким же образом

$$\operatorname{ctg} \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin B. \tag{37b}$$

Таким путем Лобачевский пришел к уравнениям (23). Из них получается для прямоугольного треугольника так называемая теорема синусов:

$$\frac{\operatorname{ctg} \Pi(a)}{\sin A} = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(b)}{\sin B}, \tag{38}$$

которая, как видим из равенства (21) (стр. 250) по существу не отличается от уравнения (1) (стр. 220). Наконец, из этого уравнения получаем:

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \sin A \left(\frac{\sin \Pi(a)}{\sin B}\right).$$

Но отношение, стоящее в скобках, согласно формуле (33a) равно $\frac{1}{\cos A}$, а потому

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \operatorname{tg} A \tag{39a}$$

и таким же образом

$$\cos \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(a) \operatorname{tg} B. \tag{39b}$$

Это — последняя пара уравнений, дополняющая прежние до полной системы уравнений прямоугольного треугольника.

Располагая уравнениями прямоугольного треугольника, Лобачевский при их помощи хочет установить уравнения косоугольного (точнее — всякого) прямолинейного треугольника. Выполняя это, как обычно, путем разбиения треугольника ABC (рис. 20) на два прямоугольных, по формулам (37) имеем:

$$\operatorname{ctg} \Pi(h) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \sin A, \quad \operatorname{ctg} \Pi(h) = \operatorname{ctg} \Pi(a) \sin B$$

и отсюда

$$\frac{\operatorname{ctg} \Pi(a)}{\sin A} = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(b)}{\sin B}. \tag{40a}$$

Уравнение (38), ранее установленное для прямоугольных треугольников, теперь распространено на всякие треуголь-

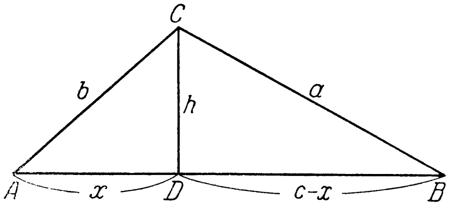

Рис. 20.

ники. Уравнению (40a), очевидно, сопутствует также аналогичное уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} \Pi(b)}{\sin B} = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(c)}{\sin C}. \tag{40b}$$

Чтобы получить третье уравнение, естественно воспользоваться уравнениями (36): если отрезок AD (рис. 20) обозначим через x, то отрезок BD равен $c - x$; уравнения (36) дадут:

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(b) \cos A, \quad \cos \Pi(c - x) = \cos \Pi(a) \cos B. \tag{41}$$

Чтобы получить третье уравнение, связывающее стороны и углы треугольника, нужно из уравнений (41) исключить x; на пути этого стояло отсутствие формулы, выражающей функцию $\Pi(c - x)$ через $\Pi(x)$ и $\Pi(c)$, не было еще теоремы сложения. Повидимому, это обстоятельство и привело Лобачевского к сознанию необходимости эту теорему разыскать.

Однако, прежде чем к этому обратиться, укажем еще, что Лобачевский при помощи найденных уравнений прямоугольного прямолинейного треугольника с необычайной простотой выводит соотношения, связывающие в неевклидовой геометрии (в гиперболическом пространстве) стороны и углы сферического треугольника. Мы приведем этот вывод.

При точке Q на ребре QP прямого двугранного угла (рис. 21) построим в его гранях произвольные острые углы $PQM = a$ и $PQN = b$. Если из их общей вершины Q,

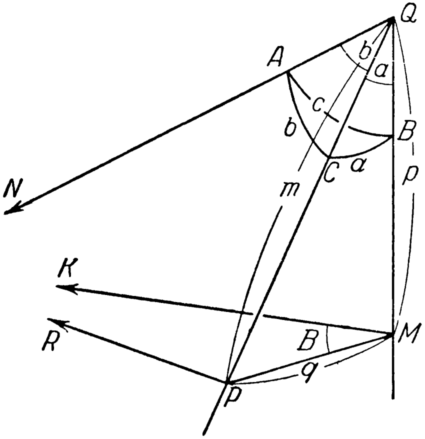

Рис. 21.

как из центра, радиусом, равным единице длины, опишем сферу, то грани трехгранного угла, образовавшегося при вершине Q, вырежут на ней прямоугольный сферический треугольник ABC с гипотенузой c, катетами a, b и противолежащими им углами A и B.

Теперь из точки Q на луче QP отложим отрезок QP, которому соответствует угол параллельности $NQP = b$, так что $\Pi(QP) = \angle PQN = b$. Если поэтому из точки P в полуплоскости PQN проведем луч PR, перпендикулярный к QP, то он будет параллелен лучу QN.

Наконец, из точки P опустим перпендикуляр PM на прямую QM. Плоскость RPM в пересечении с NQM

дает луч MK, параллельный лучам QN и PR. Если стороны прямоугольного треугольника PMQ обозначим через p, m, q, то

$$\Pi(m) = b, \ \Pi(p) = c, \ \Pi(q) = \angle KMP = B. \qquad (42)$$

Из прямоугольного треугольника PMQ по формулам (36), (37) и (39) соответственно имеем:

$$\cos \Pi(p) = \cos \Pi(m) \cos a,$$
$$\operatorname{ctg} \Pi(q) = \operatorname{ctg} \Pi(m) \sin a,$$
$$\cos \Pi(q) = \operatorname{ctg} \Pi(p) \operatorname{tg} a.$$

Ввиду же соотношений (42) эти равенства принимают вид

$$\cos c = \cos a \cos b, \ \operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B, \ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos B. \quad (43)$$

Это — обычные уравнения сферической геометрии в евклидовом пространстве. Уравнения сферической тригонометрии, имеющие место в евклидовом пространстве, остаются, таким образом, в силе и в гиперболическом пространстве. Этот факт большой важности ускользнул от Гаусса и Больаи. Последний узнал его из «Геометрических исследований» Лобачевского и в своих замечаниях к ним называет этот вывод гениальным. Таким образом, уравнения, связывающие стороны и углы прямолинейного треугольника, как Лобачевский, так и Больаи выводят стереометрическими средствами. Между тем, эти соотношения — планиметрические; совершенно естественно стараться вывести их планиметрическими приемами. Это и было выполнено позже[1]).

§ 13. Определение угла параллельности

Полная система уравнений прямоугольного треугольника (34)—(40) (Лобачевский), как и заключающиеся в них уравнения (18) и (23a, b) (Больаи), всё еще содержит одну неизвестную функцию $\Pi(x)$ — угол параллельности,

[1]) Эти выводы и соответствующие литературные указания можно найти в моей книге: В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. I — Геометрия Лобачевского и ее предистория, М. — Л., 1949.

соответствующий отрезку x. Разыскание этой функции, как уже упомянуто выше, составляет основную задачу в деле установления метрики гиперболического пространства. Лобачевский этого достигает при помощи своих латентных уравнений (4) и (5). Путем исключения острых углов (отрезков a' и b') были получены уравнения (31), попарно содержащие только две переменные. Теперь Лобачевский вновь производит исключение из тех же уравнений других величин. Из первого уравнения (4) и первого же уравнения (5) почленным сложением и вычитанием получаем:

$$2\Pi(a) = \Pi(c-a') + \Pi(c+a'),$$

$$2\Pi(b') = \Pi(c-a') - \Pi(c+a').$$

Отсюда, переходя к тригонометрическим функциям, получим:

$$\frac{\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b')} = \frac{\cos\frac{1}{2}[\Pi(c-a') + \Pi(c+a')]}{\cos\frac{1}{2}[\Pi(c-a') - \Pi(c+a')]}.$$

Так как, однако, угол $\Pi(b')$ есть B, то левая часть этого равенства вследствие уравнения (36b), есть $\cos\Pi(c)$. И предыдущее равенство принимает вид

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\frac{1}{2}[\Pi(c-a') + \Pi(c+a')]}{\cos\frac{1}{2}[\Pi(c-a') - \Pi(c+a')]}. \tag{44}$$

Так как переменные c и a' друг от друга не зависят, то это есть тождество, и мы можем давать c и a' произвольные, друг от друга не зависящие значения.

Из равенства (44), составляя производную пропорцию, легко получаем:

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-a')\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+a'). \tag{45}$$

Так как это есть тождество, то мы можем положить $a' = c$; тогда получим, что при любом c

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(2c). \tag{46}$$

Если теперь, возвращаясь к равенству (45), положим в нем:

$$c + a' = x, \quad c - a' = y,$$

то оно примет вид

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(y).$$

Но в силу соотношения (46)

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x+y),$$

а потому предыдущее уравнение можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x+y) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(y). \tag{47}$$

Иначе говоря, функция $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)$ определяется тем же функциональным уравнением (25), что и функция $\psi(x)$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}, \tag{48}$$

где k—некоторая положительная постоянная $\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) < 1\right)$.

Лобачевский, однако, и здесь, как и при определении функции $\psi(x)$, замечает, что при надлежащем выборе единицы длины величина k обращается в единицу, т. е. уравнение (48) можно представить в виде

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{x}. \tag{48a}$$

Это, конечно, совершенно справедливо, но можно ли выбрать единицу длины так, чтобы равенства (26а) и (48а) существовали совместно? Можно ли выразить $\psi(x)$ и

$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)$ одной и той же показательной функцией? Этот вопрос эквивалентен тому, имеют ли постоянные k и l в. уравнениях (26) и (48) одно и то же или различные значения. Этот вопрос в «Геометрических исследованиях» не выяснен. Лобачевский молчаливо принимает $k=l$, т. е. пользуется для функций $\psi(x)$ и $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)$ общими выражениями (26а) и (48а). Это обусловливается главным образом тем, что Лобачевский, установив функцию $\Pi(x)$, уже не возвращается к функции $\psi(x)$. Между тем, Больаи в своих «Замечаниях» с большой резкостью говорит об этой «грубой ошибке». В состоянии острого возбуждения, в котором Больаи в ту пору находился, он высказывает убеждение, что Лобачевский заимствовал это тождество из «Аппендикса» и этот пункт для него «остается темным как в логическом, так и в моральном отношении». Между тем, Штекель уже указал, что здесь ошибки нет, а есть только недомолвка, потому что как в мемуаре о «Началах геометрии», появившемся в свет до «Аппендикса», так и в «Пангеометрии» это положение строго доказано. Мы ниже это доказательство Лобачевского приведем; здесь же укажем, как к равенству $k=l$ приводят рассуждения Больаи.

Этому служит устанавливаемое Больаи предложение, которое можно рассматривать как распространение соотношения (6), относящегося к эквидистанте, на предельные линии. Именно, соотношение (6) остается в силе, если эквидистанту AB и ее проекцию ab на базу заменить параллельными предельными дугами AB и ab, проходящими между осями Aa и Bb (рис. 22). Именно, если опустим перпендикуляры BE $(=p)$ и af $(=q)$ на соответствующие оси предельных линий, то по формулам (8)

$$\bigcirc p=\bigcirc c\sin\alpha, \quad \bigcirc q=\bigcirc c\sin\beta,$$

так что равенство (11) примет вид

$$\bigcirc p:\bigcirc q=\sin\alpha:\sin\beta.$$

Но радиусами окружностей $\bigcirc p$ и $\bigcirc q$ на предельных поверхностях служат дуги AB и ab; поэтому

$$AB : ab = \bigcirc p : \bigcirc q = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Но согласно нашим обозначениям (24)

$$AB : ab = \psi(x),$$

где x есть расстояние между предельными дугами. Следовательно,

$$\psi(x) = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Это соотношение носит абсолютный характер; в евклидовой геометрии углы α и β равны, но каждый из них, а вместе с тем и их сумма $2\alpha = 2\beta$ меняются при сближении и удалении параллелей.

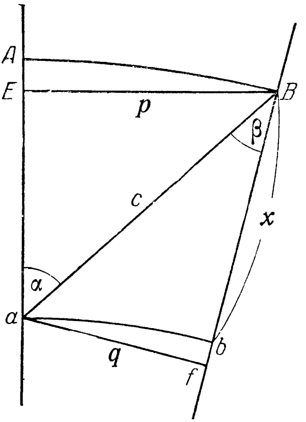

Рис. 22.

Четырехугольник $ABba$ в евклидовой плоскости есть прямоугольник; когда он обращается в квадрат [а это в евклидовой плоскости имеет место, когда $\beta = \frac{\pi}{4}$, т. е. когда $\beta = \frac{1}{2}\Pi(x)$], сумма $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Больаи обнаруживает, что это последнее свойство также имеет абсолютный характер. Иными словами, как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, когда $\beta = \frac{1}{2}\Pi(x)$. Взяв такое именно расстояние между параллелями, получим при этом значении x

$$\psi(x) = \cos\frac{1}{2}\Pi(x) : \sin\frac{1}{2}\Pi(x), \qquad e^{\frac{x}{k}} = e^{\frac{x}{l}}, \quad k = l. \qquad (49)$$

Вывод этот не отличается простотой, но он в полной мере отражает метод Больаи: он проникнут идеями его «абсолютной геометрии».

§ 14. Метрические соотношения неевклидовой геометрии в бесконечно малом и постоянная гиперболического пространства

Основной результат (48), выражающий угол $\Pi(x)$ через x, следует теперь написать так:

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{\frac{x}{k}}. \tag{50}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\Pi(x)&=\frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{2}=\operatorname{sh}\left(\frac{x}{k}\right),\\
\sin\Pi(x)&=\frac{2}{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}=\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)},\\
\cos\Pi(x)&=\frac{e^{\frac{x}{k}}-e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}=\operatorname{th}\left(\frac{x}{k}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Уравнения прямолинейной тригонометрии (32)—(39) могут быть поэтому выражены при помощи гиперболических функций. Например, три независимых уравнения (37a, b) и (34) могут быть записаны так:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)&=\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)\sin A,\\
\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)&=\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)\sin B,\\
\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)&=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Если гиперболические функции развернуть в ряды по степеням $\frac{a}{k}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{k}$ и сохранить только члены порядка ниже третьего, то эти уравнения примут вид:

$$a=c\sin A,\quad b=c\sin B,\quad c^2=a^2+b^2, \tag{53}$$

т. е. перейдут в уравнения евклидовой тригонометрии. Этот факт был хорошо известен как Лобачевскому, так и Гауссу и Больаи. Лобачевский в «Пангеометрии» пользуется им для вычисления длины окружности по ее радиусу обычным приемом, по существу ведущим начало еще от Архимеда. Он вычисляет периметр вписанного в окружность многоугольника и находит предел, к которому этот периметр стремится, когда число сторон многоугольника неограниченно возрастает. Если сторону такого n-угольника обозначим через $2a_n$, то треугольник с гипотенузой r (радиусом окружности), катетом a_n и противолежащим ему острым углом $\frac{\pi}{n}$ дает (37а):

$$\operatorname{ctg} \Pi (a_n) = \operatorname{ctg} \Pi (r) \sin \frac{\pi}{n}.$$

Отсюда, обозначая периметр многоугольника через p_n $(= 2na_n)$, получим:

$$p_n \frac{\operatorname{ctg} \Pi (a_n)}{a_n} = 2 \operatorname{ctg} \Pi (r)\, n \sin \frac{\pi}{n}.$$

Когда n неограниченно возрастает, p_n стремится к $\bigcirc r$, отношение $\frac{(\operatorname{ctg} \Pi\, a_n)}{a_n}$ стремится к $\frac{1}{k}$, а $n \sin \frac{\pi}{n}$ стремится к π. Лобачевский получает, таким образом, выражение для длины окружности C ($\bigcirc r$ по Больаи) по ее радиусу:

$$C (= \bigcirc r) = 2\pi k \operatorname{ctg} \Pi (r). \tag{54}$$

Эта формула содержится также в письме Гаусса к Шумахеру от 12 июля 1836 г. Однако о том, каким образом он к ней пришел, мы не имеем никаких сведений.

Заметим еще, что формула (54) допускает своеобразное истолкование. Пусть AB (рис. 23) будет предельная дуга, AA' и BB' — ее оси. Перпендикуляр BC, опущенный из одного конца предельной дуги на ось, проходящую через другой ее конец, называют *высотой предельной дуги* (h). При вращении вокруг оси AA' предельная линия AB опишет предельную поверхность. Точка B опишет окружность, радиус которой на этой поверхности равен длине s дуги AB; поэтому ее длина равна $2\pi s$. С другой стороны, по формуле (54) она равна $2\pi k \operatorname{ctg} \Pi(h)$. Следовательно,

$$s = k \operatorname{ctg} \Pi(h). \tag{54a}$$

Так выражается длина предельной дуги через ее высоту.

Как мы видели (49), константы k и l, которые у Больаи и Лобачевского выплыли в их вычислениях, имеют общее значение; это значение теперь обычно обозначают через k и называют *постоянной гиперболического пространства*. То же значение имеет постоянная C в формуле (22).

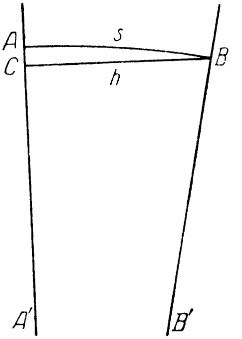

Рис. 23.

Какое же численное значение имеет эта постоянная? Лобачевский в первой же работе «О началах Геометрии» говорит, что это может быть установлено только экспериментально. Геометрия пространства, таким образом, не может быть установлена априорно, не может быть рассматриваема как достояние нашего ума; в тесной связи с этим стоит строго эмпирическое, материалистическое мировоззрение Лобачевского, его категорическое отрицание взглядов Канта, которые в ту пору господствовали почти безраздельно. Всякое знание приобретается опытом — «врожденным не должно верить», говорит Лобачевский. И, может быть, именно потому, что эти геометрические идеи были присущи и Гауссу, он также стоит на той же эмпирической точке зрения [1]). Известно, что Лобачевский шел в этом направлении так далеко, что самое значение постоянной k он пытался установить экспериментально, при помощи вычислений, основанных на астрономических наблюдениях. Но к ощутительным результатам эти его вычисления не привели. Он, однако, тогда же высказал

[1]) C. F. Gauss, Werke, т. VIII, Grundlagen der Geometrie. Göttingen-Leipzig, 1900, стр. 201.

предположение, что это может обусловливаться незначительностью расстояний, доступных нашим измерениям, по сравнению с постоянной k. Наконец, отметим, что при мнимом значении постоянной k ($k=ri$) уравнения (52) совпадают с уравнениями сферической тригонометрии (43). Этот факт, предусмотренный, правда в неотчетливой еще форме, Ламбертом [1]), был хорошо известен как Лобачевскому, так и Гауссу и Больаи. Лобачевский видел в нем подтверждение логической правильности неевклидовой геометрии; к этому мы еще возвратимся.

§ 15. Исходные начала аналитической и дифференциальной геометрии

Установлением уравнений, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника, Больаи, по существу, заканчивает «Аппендикс». К этому он присоединяет некоторые изящно выполненные геометрические построения, а также простейшие дифференциальные соображения, о которых скажем ниже.

Но не будет преувеличением сказать, что эти элементы у Лобачевского составляют только введение к его работам по неевклидовой геометрии. Он широко развертывает аналитическую и дифференциальную геометрию в плоскости и в пространстве, преследуя при этом троякую цель: во-первых — убедить читателя в том, что неевклидова геометрия допускает такое же далеко идущее развитие, как и обыкновенная, «употребительная» геометрия, во-вторых — дать приложения созданной им новой геометрии, наконец, в-третьих — дать средства для установления логической правильности новой неевклидовой геометрии. Излагать здесь эти исследования Лобачевского сколько-нибудь подробно нет ни возможности, ни нужды. Мы постараемся только дать о них некоторое представление, сопоставляя их с соображениями Больаи.

---

[1]) См. очерк «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров», стр. 163 этой книги. [*Ред.*]

Положение точки на плоскости Лобачевский определяет абсциссой $x\,(ON)$, отсчитываемой по произвольно выбранной оси OX (рис. 24), и ее расстоянием $y\,(MN)$ от этой оси, взятым (как и x) с надлежащим знаком. Этим, на первый взгляд, определяются декартовы координаты на плоскости совершенно так же, как и в евклидовой геометрии; но здесь есть существенная разница. Если возьмем ось OY, перпендикулярную к OX, и спроектируем на нее радиус-вектор r точки M, то длина y' проекции ON' не равна y и длина x' проектирующего перпендикуляра MN' не равна x. Положение точки M может быть также определено заданием чисел x' и y', но это уже другие координаты, отличные от x, y; это обстоятельство играет в вычислениях Лобачевского существенную роль.

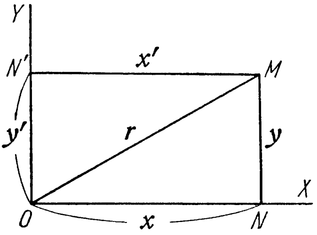

Рис. 24.

Установив координацию, Лобачевский, естественно, развертывает аналитическую геометрию обычным путем. Вследствие соотношения (34), связывающего катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника, уравнение окружности, имеющей центр в начале координат, явно будет:

$$\sin \Pi(x) \sin \Pi(y) = \sin \Pi(r). \qquad (55)$$

Здесь мы выведем еще только уравнение прямой. Положим, что прямая KL задана ее расстоянием $OP\,(=p)$ от начала координат и углом ω, который вектор OP образует с осью абсцисс OX (рис. 25). Обозначая через r длину радиуса-вектора произвольной точки M на прямой, через x, y — ее декартовы координаты, из прямоугольного треугольника ONM в силу уравнений (37) и (34) имеем:

$$\operatorname{ctg} \Pi(y) = \operatorname{ctg} \Pi(r) \sin \alpha, \quad \sin \Pi(r) = \sin \Pi(x) \sin \Pi(y). \qquad (55а)$$

С другой стороны, по теореме косинусов (36)

$$\cos \Pi(p) = \cos \Pi(r) \cos \beta = \cos \Pi(r) \cos(\omega - \alpha) =$$
$$= \cos \Pi(r) \cos \alpha \cos \omega + \cos \Pi(r) \sin \alpha \sin \omega. \qquad (56)$$

Между тем, в силу той же теоремы косинусов

$$\cos \Pi(r) \cos \alpha = \cos \Pi(x),$$

а в силу соотношений (37) и (55а)

$$\cos \Pi(r) \sin \alpha = \cos \Pi(r) \operatorname{ctg} \Pi(y) \operatorname{tg} \Pi(r) =$$
$$= \operatorname{ctg} \Pi(y) \sin \Pi(r) = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x).$$

Уравнение (56) принимает вид

$$\cos \Pi(p) = \cos \Pi(x) \cos \omega + \cos \Pi(y) \sin \Pi(x) \sin \omega. \quad (57)$$

Это и есть уравнение прямой в декартовых координатах, которым Лобачевский постоянно пользуется. Как видим, —

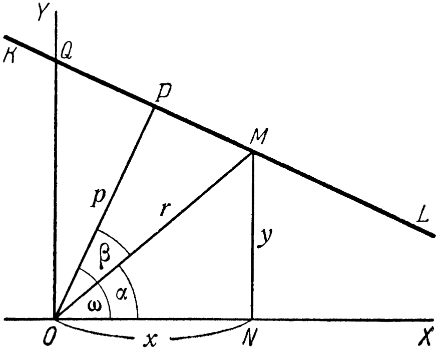

Рис. 25.

это довольно сложное трансцендентное уравнение. Однако было бы достаточно преобразовать координаты, полагая

$$X = \cos \Pi(x), \quad Y = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x) \text{ [1]},$$

чтобы уравнение прямой приняло простой линейный вид

$$X \cos \omega + Y \sin \omega = \cos \Pi(p). \quad (58)$$

[1]) Заметим, что

$$Y = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x) = \cos \Pi(y').$$

Однако в другом порядке идей это было замечено и выполнено Бельтрами [1]) только через 40 лет. Эти бельтрамиевы координаты (X, Y) в неевклидовой геометрии наиболее удачно заменяют декартовы координаты евклидовой плоскости и наиболее целесообразны. То, что Лобачевский, руководясь слишком упрощенной аналогией, пользовался исключительно координатами x, y, очень осложнило его вычисления, которых он производил много, но все же Лобачевский справлялся с ними, по выражению Либмана, «с гениальным искусством». Может быть, именно вследствие трудностей вычислений Больаи, тоже оставшийся при этих координатах, остановился на тригонометрических уравнениях и дальнейших вычислений в «Аппендиксе» не производил.

Обратим теперь внимание на тот случай, когда прямая KL параллельна оси абсцисс OX и пересекает ось OY

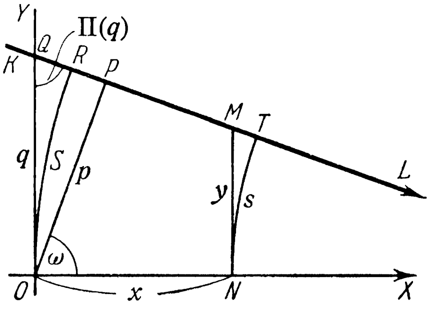

Рис. 26.

в точке Q (рис. 26). Теперь $\omega = \Pi(p)$, и уравнение (57) принимает вид

$$\operatorname{ctg} \Pi(p) \ [1 - \cos \Pi(x)] = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x),$$

откуда

$$\cos \Pi(y) = \operatorname{ctg} \Pi(p) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x). \tag{59}$$

[1]) E. Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea. Giorn. mat. **6**, 1868; Opere, т. I.

Если через точки O и N провести параллельные предельные дуги OR и NT с осями OX и KL, то отношение их длин $\psi(x)$ по формуле (26), полагая в ней $x = ON$, будет равно

$$S : s = e^{\frac{x}{l}}. \tag{60}$$

С другой стороны, так как p есть высота дуги S, то по формуле (54а)

$$S = k \operatorname{ctg} \Pi(p).$$

Если через q обозначить длину перпендикуляра QO, то из треугольника QOP по формулам (37) мы получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi(p) = \operatorname{ctg} \Pi(q) \sin \Pi(q) = \cos \Pi(q).$$

Следовательно,

$$S = k \cos \Pi(q),$$

$$\cos \Pi(y) = \cos \Pi(q) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x).$$

Ясно, что таким же образом

$$s = k \cos \Pi(y) = k \cos \Pi(q) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x).$$

Поэтому

$$S : s = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{\frac{x}{k}}.$$

Сопоставляя это со значением (60) того же отношения, получаем $k = l$. Так Лобачевский доказывает в «Пангеометрии» равенство постоянных k и l [1]).

Для дальнейшего развития метрики в неевклидовой (гиперболической) плоскости необходимо располагать выражением элемента длины. Это выражение мы находим и у Лобачевского и у Больаи, притом, по существу, в совершенно одинаковом виде. Пусть

$$M(x, y) \text{ и } M'(x' + dx, y' + dy)$$

---

[1]) Более элементарный вывод можно найти в книге автора: В. Ф. Каган, Основания геометрии, М.—Л., 1949.

— две бесконечно близкие точки кривой, N и N' — их проекции на ось абсцисс (рис. 27). Если на $N'M'$ отложим отрезок $N'M''=NM$, то бесконечно малый треугольник $MM''M'$ можно считать прямоугольным, отрезок же $M'M''=dy$. Если, далее, отрезок MM'' заменить бесконечно малой дугой эквидистанты, то это вызовет разницу только в бесконечно малых третьего порядка. В пределах же бесконечно малых второго порядка можно по формуле (16) положить:

$$MM''=\frac{NN'}{\sin\Pi(MN)}=\frac{dx}{\sin\Pi(y)}. \tag{61}$$

Принимая же во внимание, что в треугольнике $MM''M'$ остается в силе пифагорово соотношение между длинами катетов и гипотенузы, получим окончательно:

$$ds^2=dy^2+\frac{dx^2}{\sin^2\Pi(y)}. \tag{62}$$

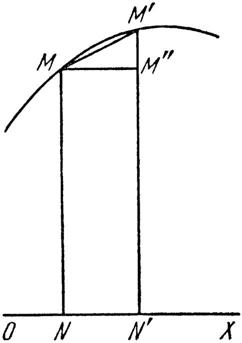

Рис. 27.

На это выражение можно смотреть как на основную метрическую форму неевклидовой (гиперболической) плоскости; вся внутренняя геометрия неевклидовой плоскости, естественно, должна развертываться из этой формулы. Лобачевский действительно строит на этой основе начала дифференциальной геометрии гиперболической плоскости. Составляя же по аналогии с этим и метрическую форму неевклидова (гиперболического) пространства, Лобачевский получает основу для инфинитезимальных вычислений в пространстве, которые он широко развертывает. О характере и цели этих вычислений сообщим ниже. Здесь же приведем еще выражение элемента площади в гиперболической плоскости.

При обозначениях, принятых на рис. 28, за элемент площади можно принять площадь $d\sigma$ бесконечно малого прямоугольника со сторонами $MM'' = \frac{dx}{\sin \Pi(y)}$ и $M'M'' = dy$; поэтому

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\sin \Pi(y)}. \tag{63}$$

Интегрированием этого дифференциала в надлежащих пре-

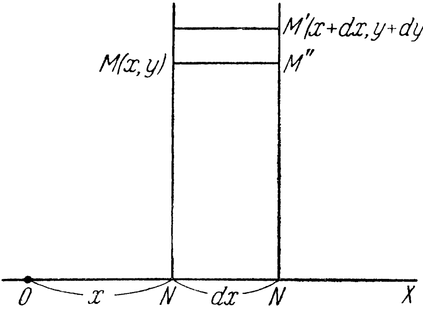

Рис. 28.

делах можно получить площадь любой ограниченной плоской фигуры.

§ 16. Вычисление площадей плоских фигур

Вычисление площадей плоских фигур можно производить и иначе: можно найти выражение для площади треугольника, и вычисление площади плоской фигуры производить разбиением ее на треугольники: непосредственно — в случае многоугольника, предельным переходом — в случае фигуры, ограниченной криволинейным контуром.

Наиболее простой вывод формулы, выражающей площадь треугольника, принадлежит Гауссу. Он изложен Гауссом в письме к Ф. Больаи от 14 февраля 1832 г. [1]), написанном по получении «Аппендикса». Гаусс имеет в виду дать Больаи представление о «других путях», приведущих его к тем же результатам, к которым пришел Янош. Два наброска этого вывода сохранились в бумагах

[1]) C. F. Gauss, Werke, т. VIII.

Гаусса и, таким образом, дополняют это письмо. Однако с точки зрения логической выдержанности вывод Гаусса, несомненно, дефектен, но замысел и ход его рассуждений очень интересны.

Задача состоит в том, чтобы показать, что площадь треугольника пропорциональна его *угловому дефекту*, т. е. разности между двумя прямыми и суммой углов треугольника $(\pi - A - B - C)$. Гаусс начинает, так сказать, с треугольников с бесконечно большими сторонами и прежде всего — с треугольника, в котором все три вершины находятся на бесконечности. Именно, Гаусс рассматривает фигуру, ограниченную тремя прямыми, попарно параллельными линиями (рис. 29), и утверждает, что часть плоскости, содержащаяся «между» ними, имеет определенную конечную площадь, которую он обозначает через t. Этого утверждения Гаусс не доказывает; и в этом заключается слабая сторона его рассуждения, но он сам оговаривает, что при исчерпывающей обработке оно нуждается в доказательстве. Все углы такого треугольника равны нулю, а его угловой дефект равен π. Если из какой-либо точки O проведем две параллели OA' и OB' к прямой AB, то получим треугольник (рис. 30) с двумя бесконечно удаленными вершинами, площадь которого зависит только от угла ω при вершине O,

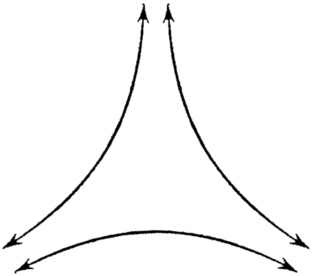
Рис. 29.

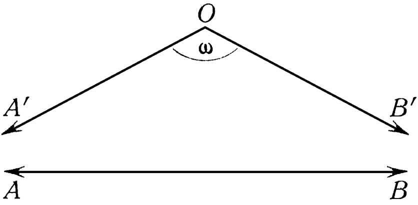

Рис. 30.

или, что то же, от углового дефекта $\delta = \pi - \omega$; Гаусс обозначает эту площадь через $\varphi(\delta)$. Если из какой-либо точки на стороне треугольника первого типа (рис. 31) провести луч, параллельный двум другим сторонам, то он разобьется на два треугольника второго типа с углами ω и ω' при общей вершине и угловыми дефектами δ и δ'; при этом $\delta + \delta' = \pi$. Следовательно, при $\delta + \delta' = \pi$

$$\varphi(\delta) + \varphi(\delta') = t. \tag{64}$$

Если же теперь из внутренней точки O треугольника (рис. 32) первого типа провести лучи, параллельные его

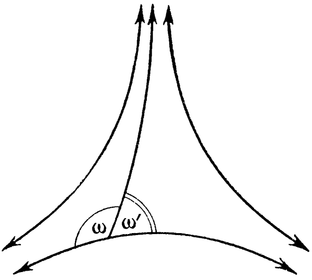

Рис. 31.

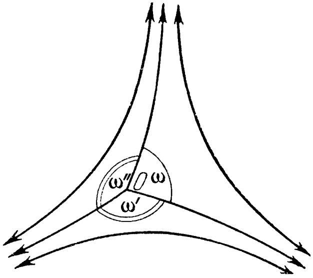

Рис. 32.

сторонам, то он разобьется на три треугольника второго типа с углами ω, ω', ω'' при вершине O и с угловыми дефектами δ, δ', δ'', для которых

$$\delta + \delta' + \delta'' = \pi.$$

Теперь ясно, что

$$\varphi(\delta) + \varphi(\delta') + \varphi(\delta'') = t,$$

или

$$\varphi(\delta) + \varphi(\delta') + \varphi(\pi - \delta - \delta') = t. \tag{65}$$

Ввиду же соотношения (64)

$$\varphi(\pi - \delta - \delta') + \varphi(\delta + \delta') = t,$$

а потому

$$\varphi(\delta) + \varphi(\delta') = \varphi(\delta + \delta').$$

Так как δ и δ' здесь имеют совершенно произвольные значения, то функция φ этим функциональным уравнением определяется; именно

$$\varphi(\delta) = q\delta,$$

где q — постоянная. Теперь уравнение (65) дает:

$$t = q(\delta + \delta' + \delta'') = q\pi. \tag{66}$$

Пусть ABC будет произвольный треугольник. Продолжив его стороны, как показано на рис. 33, и проведя параллели попарно лучам CA' и CC', AA' и AB', BB' и

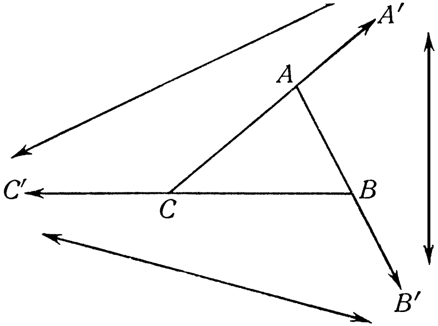

Рис. 33.

BC', получим треугольник первого типа, разбитый на четыре части: треугольник ABC с площадью Δ и три треугольника второго типа с угловыми дефектами A, B и C. Следовательно,

$$\Delta + \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) = t,$$

или

$$\Delta + qA + qB + qC = q\pi, \quad \Delta = q(\pi - A - B - C). \tag{67}$$

Коэффициенты q, очевидно, зависят от выбора единицы площади.

Лобачевский подходит к решению той же задачи иначе. Он находит площадь прямоугольного треугольника интегрированием дифференциала площади (63). Принимая направления катетов за оси координат и располагая уравнением гипотенузы, он знает пределы, в которых выражение (63) нужно проинтегрировать, чтобы найти площадь треугольника. Так как, однако, уравнение это трансцендентное, интегрирование не отличается простотой. Но Лобачевский преодолевает трудности, стоящие на пути этого интегрирования, и приходит, конечно, к тому же результату. Располагая выражением площади прямоугольного треугольника, уже нетрудно вычислить площадь любого треугольника.

В других своих работах Лобачевский дает различные способы установления основной формулы, выражающей площадь треугольника по его углам. В «Пангеометрии» его рассуждения приближаются к методу Гаусса; но основное положение, которое Гаусс принимает на веру, Лобачевский строго доказывает опять рассмотрением интеграла выражения (63), совершенно избегая, таким образом, дефекта, который допустил Гаусс.

Больаи приходит к тому же результату (67) более элементарным путем, который приближается к методам Евклида.

Он доказывает сначала, что треугольники, имеющие равные угловые дефекты (или, что то же,—одинаковые суммы углов), равновелики. Он достигает этого путем разбиения таких треугольников на соответственно конгруентные части. После этого Больаи переходит к доказательству общей теоремы, что площади двух треугольников всегда относятся друг к другу, как их угловые дефекты; он начинает с того случая, когда рассматриваемые треугольники получаются разбиением одного и того же треугольника трансверсалью, проходящей через одну из его вершин; после этого он переходит к общему случаю. Когда общая теорема доказана, вопрос уже исчерпан.

Элементарные начала неевклидовой геометрии, таким образом, построены, и возникает вопрос о логической правильности всей системы.

§ 17. Вопрос о логической правильности неевклидовой геометрии

Когда неевклидова геометрия была развернута, по крайней мере, в элементарных своих частях, перед ее творцами стал вопрос о логической ее правильности, о ее «непротиворечивости», как теперь говорят. Вопрос состоял в том, существует ли полная уверенность, что никакое дальнейшее ее развитие не может привести к противоречию. Не подлежит никакому сомнению, что и Лобачевский и Больаи много об этом размышляли и искали в пользу этого такие доводы, которые не могли бы вызвать никаких возражений. В записях, сохранившихся после смерти Больаи, Штекель обнаружил утверждение, что он нашел точное доказательство логической правильности построенной им геометрии и что он намерен это доказательство изложить. Однако никаких следов такого доказательства, хотя бы руководящей его идеи, в наследии Больаи не сохранилось. Нужно сказать, что самая заметка эта относится к последним годам жизни Больаи, когда он уже утратил ясность и точность мысли. Вряд ли может подлежать сомнению, что вера в найденное им доказательство была иллюзией.

Лобачевский размышлял над этим вопросом всю жизнь, и в каждой из своих работ приводит соображения, которые объективно убеждают его в безупречной правильности «воображаемой» геометрии. Мемуар «О началах геометрии» заканчивается следующим образом:

> «После того, как мы нашли уравнения (17) [1]), которые представляют зависимость углов и боков

---

[1]) Уравнения (17) Лобачевского следующие:

$$\operatorname{tg}\Pi(a)\sin A = \operatorname{tg}\Pi(b)\sin B,$$

$$\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} - 1 = 0,$$

$$\operatorname{ctg} A\sin B\sin\Pi(c) + \cos B - \frac{\cos\Pi(c)}{\cos\Pi(a)} = 0,$$

$$\cos C + \cos A\cos B - \frac{\sin A\sin B}{\cos\Pi(c)} = 0.$$

треугольника, когда, наконец, дали мы общие выражения для элементов линий, площадей и объема тел, всё прочее в Геометрии будет уже аналитикой, где исчисления необходимо должны быть согласны между собою и ничего не в состоянии открыть нам нового, чего бы не заключалось в тех первых уравнениях, откуда должны быть взяты все отношения геометрических величин друг к другу. Итак, если надобно предполагать теперь, что какое-нибудь противоречие принудит впоследствии опровергнуть начала, принятые нами в этой новой Геометрии, то это противоречие может только скрываться в самих уравнениях (17). Заметим, однакож, что эти уравнения переменяются в (20) сферической Тригонометрии, как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; но в обыкновенной Геометрии и сферической Тригонометрии везде входят одни содержания линий: следовательно, обыкновенная Геометрия, Тригонометрия и эта новая Геометрия всегда будут согласны между собой».

Что установленные Лобачевским уравнения, связывающие стороны и углы прямолинейного треугольника, сами по себе алгебраически непротиворечивы и независимы — это никаких сомнений вызывать не может. Но допускают ли они ту геометрическую интерпретацию, которая с ними связана в неевклидовой геометрии, не приводят ли они к противоречию геометрическому, — в то время это оставалось далеко не ясным. Сам Лобачевский этим соображениям полной доказательной силы не присваивал. Именно поэтому он возвращается к этому вопросу, можно сказать, во всех своих работах и хочет пролить на него свет с разных сторон. Он ищет подтверждения своей вере в правильность созданной им геометрии, главным образом в ее приложениях к нахождению значений определенных интегралов.

Замысел здесь заключается в следующем. Подинтегральное выражение, входящее под знак определенного интеграла, рассматривается как элемент длины, площади, объема или массы в неевклидовой геометрии. Самый же интеграл, таким образом, выражает определенную длину, площадь, объем или массу. Это значение интеграла Лобачевскому часто удается разыскать средствами «воображаемой» геометрии. Значение определенного интеграла, таким образом, найдено при помощи неевклидовой геометрии. Когда это значение найдено, Лобачевскому обыкновенно удается его разыскать аналитически. В совпадении обоих результатов он видит подтверждение правильности «воображаемой» геометрии.

Мы уже видели, что выражение длины окружности через радиус было найдено элементарными геометрическими средствами, но оно, конечно, может быть найдено также интегрированием дифференциала [выражения (62)] с учетом уравнения окружности. Точно так же и площадь круга может быть вычислена тем и другим путем. Мы уже знаем, что Лобачевский нашел выражение для площади треугольника интегрированием дифференциала (63); оно может быть получено чисто геометрическими средствами. Но это только простейшие совпадения; Лобачевский их чрезвычайно углубляет и расширяет.

Лобачевскому действительно удалось этим путем разыскать значение многих определенных интегралов, главным образом таких, в которых фигурируют гиперболические функции. Справочники, содержащие значения определенных интегралов с указаниями авторов, разыскавших эти значения, пестрят именем Лобачевского [1]). Иногда Лобачевскому не удается найти значение интеграла, но преобразованием переменных, которое диктуется переходом от одних координат в неевклидовом пространстве к другим, он очень удачно приводит одни определенные интегралы к другим, более простым. Мы уже упоминали, что Либман называет гениальными эти многообразные интегральные

[1]) См., например, статьи Б. Л. Лаптева и Г. Л. Лунца «Интегралы Лобачевского в таблицах Биеренс де Хаана» (Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. III, М. — Л., 1951, стр. 413 и т. V, М. — Л., 1951, стр. 256). [*Ред.*]

вычисления. При всем том строгой доказательной силы в вопросе о непротиворечивости «воображаемой геометрии» эти результаты не имели. У тех, кто эти трудные вычисления производил, они, несомненно, порождают субъективную уверенность в том, что геометрия, которая к ним привела, не может быть противоречива. Но объективной уверенности в строгой логической правильности гиперболической геометрии они, конечно, не дают. Каждое такое вычисление может быть рассматриваемо как частичная проверка этого факта, но проверка общего утверждения на ряде частных случаев не дает его доказательства. Такого доказательства и Лобачевский не дает. Найти его было предоставлено следующим поколениям.

§ 18. Посмертный фрагмент Гаусса

В экземпляре «Geometrische Untersuchungen» Лобачевского, принадлежавшем Гауссу, после его смерти была найдена заметка, написанная на четырех страницах такого же формата, как и брошюра Лобачевского (малая октава). Штекель полагает, что эта заметка была составлена в 1840—1846 гг. В то время как другие наброски Гаусса по неевклидовой геометрии расшифровываются очень легко, Штекелю [1]) стоило большого труда выяснить рассуждение, заключающееся в этом фрагменте; содержание его довольно сложно, а изложен он чрезвычайно сжато.

Гаусс, как и Лобачевский и Больаи, конечно, хорошо знал, что в неевклидовом пространстве геометрия бесконечно малых совпадает с геометрией Евклида; в частности, отсюда следует, что элемент длины в неевклидовой (точнее, гиперболической) плоскости выражается формулой (62). Этой основной квадратичной формой плоскости ее геометрия, по крайней мере локально, вполне определяется. Гаусс, конечно, лучше, чем кто-либо другой в ту пору, это понимал. В применении к поверхности, погру-

---

[1]) P. Stäckel und F. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss; ein Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nichteuklidischen Geometrie, Leipzig, 1895, стр. 255—264.

женной в трехмерное евклидово пространство, эта идея проведена в его знаменитом мемуаре «Disquisitiones generales circa superficies curvas» (1827). Естественно поэтому, что Гаусс поставил себе вопрос, в какой мере неевклидова геометрия определяется тем, что соотношения между элементами бесконечно малого треугольника совпадают с уравнениями евклидовой тригонометрии. В упомянутом фрагменте Гаусс дает решение этого вопроса; это, повидимому, — наиболее ценный материал из всего наследия Гаусса, относящегося к неевклидовой геометрии. И при всем том в рассуждениях Гаусса содержится тонкая, но существенная ошибка. Выясним здесь мысль Гаусса и допущенную им ошибку.

Ближайшим образом задача поставлена Гауссом так: определить метрику пространства, зная, что в бесконечно малых треугольниках имеет место тригонометрия Евклида. Решение изложено в сжатой форме, как заметка для памяти, но все же с такой отчетливостью, что восстановление недостающих построений и вычислений оказалось вполне осуществимым. Как уже сказано, это было выполнено Штекелем в примечаниях к тексту Гаусса.

Как и Лобачевский и Больаи, Гаусс вводит для своего исследования вспомогательные функции, именно две, одну из которых он обозначает через $f(x)$, а другую через $g(x)$. Первая из них, по существу, не отличается от функций Больаи $\bigcirc x$ (длина окружности, радиус которой равен x), именно

$$f(x) = \frac{\bigcirc x}{2\pi}. \tag{68}$$

Таким образом, длина окружности радиуса x выражается формулой $2\pi f(x)$. Впрочем, Гаусс выражает это иначе (и это имеет существенное значение): длина дуги, соответствующей центральному углу $d\omega$, имеет значение $f(x)\,d\omega$.

Другая функция, которую Гаусс обозначает через $g(x)$, имеет следующее значение. Если возьмем так называемый «четырехугольник Саккери» $AabB$ (рис. 34) с бесконечно малым нижним основанием ab и прямыми углами при нем, верхним основанием AB и высотой $x = Aa = Bb$, то отношение $AB : ab$ в пределе (т. е. при $ab \to 0$) представляет собой функцию от x, которую Гаусс и обозначает через $g(x)$; это — та же функция (7), которой пользовался преимущественно Больаи (стр. 243). Мы знаем, что в гиперболической геометрии $g(x)$ имеет значение (16).

Но Гауссу нужно эту функцию разыскать, исходя из только что сделанного допущения. С этой целью он прежде

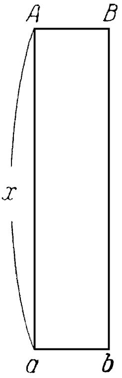

Рис. 34.

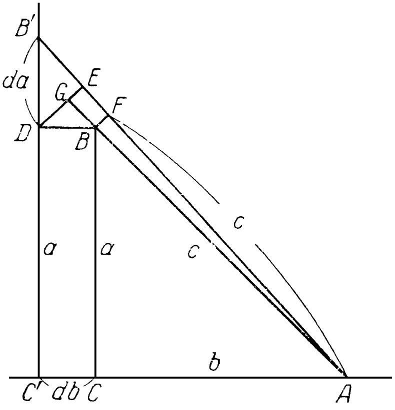

Рис. 35.

всего устанавливает соотношения, имеющие место в прямоугольном треугольнике. Пусть ABC будет прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C (рис. 35). Перейдем от этого треугольника к прямоугольному же треугольнику $AB'C'$, причем катеты a и b получают весьма малые приращения $CC' = db$ и $DB' = da$. Отрезок DB проектируем на AB' и на AC' и откладываем $AF = AB = c$; тогда приращение гипотенузы

$$dc = B'F = B'E + EF.$$

Углы $DB'E$ и EDB бесконечно мало отличаются от угла B, а в бесконечно малом прямоугольнике $BGEF$ имеем $EF = BG$; поэтому с точностью до бесконечно малых первого порядка

$$B'E = da \cos B,$$

$$EF = BG = DB \sin B = CC' g(a) \sin B = db\, g(a) \sin B.$$

Вследствие этого

$$B'F = dc = da \cos B + db\, g(a) \sin B. \tag{69a}$$

Совершенно ясно, что таким же образом мы можем получить:

$$dc = db \cos A + da\, g(b) \sin A. \tag{69b}$$

Это — дифференциальные соотношения прямоугольного треугольника в том смысле, что они связывают бесконечно малые приращения его элементов [1]).

Из этих дифференциальных соотношений Гаусс при помощи очень простых соображений получает общие уравнения, связывающие элементы прямоугольного треугольника. Именно, исключая dc из уравнений (69a) и (69b), получаем:

$$da\,[\cos B - g(b) \sin A] = db\,[\cos A - g(a) \sin B].$$

А так как приращения da и db могут иметь совершенно произвольные значения, то

$$\cos B = g(b) \sin A, \tag{70a}$$

$$\cos A = g(a) \sin B. \tag{70b}$$

Так Гаусс с совершенно неожиданной простотой получает два общих уравнения, связывающих элементы прямоуголь-

---

[1]) Может быть, полезно посмотреть, как выглядят эти соотношения в евклидовой геометрии. Дифференцируя соотношение

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

получаем:

$$c \cdot dc = a \cdot da + b \cdot db,$$

откуда

$$dc = da \cos B + db \sin B.$$

Это совпадает с уравнением (69a), так как в евклидовом пространстве $g(a) = 1$. Последнее соотношение в евклидовой геометрии можно также написать в виде

$$dc = da \sin A + db \cos A.$$

ного треугольника во всякой геометрии, которая в бесконечно малом совпадает с геометрией Евклида. В евклидовой плоскости $g(b) = g(a) = 1$, и уравнения (70) сводятся к тому, что $A + B = 90°$.

В качестве третьего уравнения Гаусс выводит еще одно соотношение при помощи следующих соображений.

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 36) дадим катету b бесконечно малое приращение $CC' = db$ и, со-

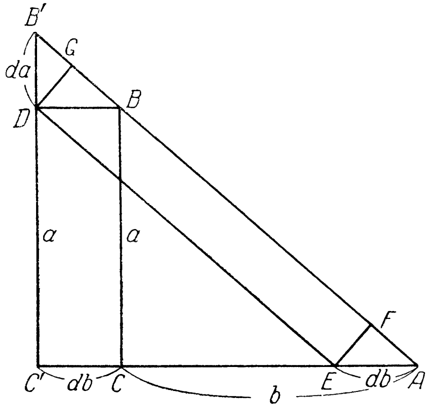

Рис. 36.

храняя угол A, составим прямоугольный треугольник $AB'C'$; пусть $C'D = CB = a$, так что $DB' = da$. Если сделаем $C'E = CA = b$, то треугольники $DC'E$ и BCA будут равны, $DE = c$, $EA = db$. Проектируя отрезок DE на гипотенузу AB', получаем бесконечно малые прямоугольные треугольники: $\triangle DB'G$ с углом B', бесконечно мало отличающимся от B, затем $\triangle GDB$, в котором от B бесконечно мало отличается угол GDB, и, наконец, $\triangle EFA$, в котором угол при E бесконечно мало отличается от $90° - A$. Вследствие этого угол DEF можно считать прямым, и из четырехугольника $DGFE$ следует, что

$$DG = EF\, g(DE) = EF\, g(c) = db \sin A\, g(c).$$

С другой стороны, из треугольника DGB

$$DG = DB \cos B = CC' g(BC) \cos B = db\, g(a) \cos B.$$

Сопоставляя эти два результата, получаем:

$$g(a) \cos B = g(c) \sin A \tag{71a}$$

и совершенно аналогично

$$g(b) \cos A = g(c) \sin B. \tag{71b}$$

Ввиду соотношений (70a) и (70b) каждое из равенств (71a) и (71b) дает:

$$g(c) = g(a)\, g(b). \tag{72}$$

Это уравнение совпадает с уравнением Больаи (18a).

Тригонометрия прямоугольного треугольника в пространстве, удовлетворяющем поставленным требованиям, таким образом, по существу установлена. Гаусс выводит еще одно уравнение; их можно вывести все десять.

В настоящее время, когда мы знаем функцию $g(x)$ (16), мы легко убедимся, что три уравнения Гаусса (70a), (70b) и (72) совпадают с уравнениями (33a), (33b) и (34). Однако у Гаусса эти уравнения еще латентные в том же смысле, как и уравнения Лобачевского: в уравнения Лобачевского входит неизвестная функция $\Pi(x)$, в уравнения Гаусса — неизвестная функция $g(x)$. Для завершения исследования Гауссу необходимо, следовательно, разыскать эту функцию. В процессе этого вычисления играет вспомогательную, но все же существенную роль вторая вспомогательная функция $f(x)$. С этой именно целью Гаусс ее ввел и прежде всего устанавливает два дифференциальных уравнения первого порядка, связывающих функции $f(x)$ и $g(x)$. Рассуждения, приводящие к первому из этих уравнений, также очень просты. Они сводятся к следующему.

Дуга окружности радиуса r, которой соответствует центральный угол ω, имеет длину $\frac{\omega \cdot \bigcirc r}{2\pi} = \omega f(r)$. Если на стороне весьма малого угла $AOB = \omega$ (рис. 37) отложим от вершины отрезки $dx = OC$ и $x = CA$ и из точек C и A опустим перпендикуляры CD и AB на вторую сторону угла OB, то они по длине отличаются от дуг радиусов OC и OA на бесконечно малые высших порядков, так что мы можем положить:

$$CD = \omega f(dx),$$
$$AB = \omega f(x + dx) = [f(x) + d f(x)]\, \omega.$$

Если теперь из точки C восставим перпендикуляр CE к CD и примем во внимание, что в бесконечно малом треугольнике COD угол при вершине C равен $90° - \omega$, то найдем, что угол $ACE = \omega$.

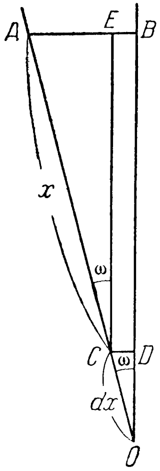

Рис. 37.

Поэтому

$$AE = \omega f(x),$$
$$EB = CD\, g(x) = \omega f(dx)\, g(x).$$

Следовательно,

$$\omega f(x) + \omega f(dx)\, g(x) = \omega [f(x) + d f(x)],$$
$$d f(x) = g(x) f(dx).$$

Но $f(0) = 0$; поэтому в пределах бесконечно малых первого порядка $f(dx) = c\, dx$, где $c = f'(0)$ есть постоянная; вместе с тем

$$\frac{df(x)}{dx} = c\, g(x)\,^{1)}. \qquad (73)$$

Это и есть первое дифференциальное уравнение, связывающее функции $f(x)$ и $g(x)$.

Вывод второго дифференциального уравнения значительно сложнее. Мы лишены возможности его здесь изложить и ограничимся только тем, что приведем его в окончательном виде [2])

$$g'(x) = -c\, \frac{1 - g^2(x)}{f(x)}. \qquad (74)$$

---

[1]) Отметим, что постоянная $c = 1$.

[2]) Этот вывод приведен в моей книге: В. Ф. Каган, Основания геометрии, т. I, М.—Л., 1949, стр. 354—355.

Первое уравнение определяет $g(x)$, если известна функция $f(x)$, второе, наоборот, определяет $f(x)$, если известна функция $g(x)$.

Для разыскания этих функций исключим $f(x)$ из уравнений (73) и (74).

Последнее уравнение дает:

$$f(x) = -c\,\frac{1-g^2(x)}{g'(x)},$$

$$f'(x) = c\,\frac{[1-g^2(x)]\,g''(x)+2g'^2(x)\,g(x)}{g'^2(x)}.$$

Сопоставляя этот результат с уравнением (73), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка, которому должна удовлетворять функция $g(x)$:

$$(1-g^2)\,g''+g'^2g=0. \tag{75}$$

Этому дифференциальному уравнению прежде всего удовлетворяет $g(x)=C$, где C — постоянная. Но так как во всяком случае $g(x)$ стремится к единице, когда x стремится к нулю, то эта постоянная не может быть отличной от единицы. Мы получаем, таким образом, прежде всего интеграл

$$g(x)=1,$$

которому соответствует евклидова геометрия.

Оставляя этот случай в стороне, рассмотрим случаи

$$g^2(x)>1 \quad \text{и} \quad g^2(x)<1.$$

В первом случае уравнение (75) выражает, что функция

$$\frac{g'}{\sqrt{g^2-1}}$$

сохраняет постоянное значение; это постоянное значение должно быть отлично от нуля, потому что случай $g'=0$ уже исчерпан; обозначим ее поэтому через $\frac{1}{k}$. Тогда

$$\frac{dg}{\sqrt{g^2-1}}=\frac{dx}{k}, \tag{76}$$

откуда интегрированием получаем:

$$\ln(g+\sqrt{g^2-1})=\frac{x}{k}+C_1.$$

Но при $x=0$ $g=1$, поэтому $C_1=0$, $g+\sqrt{g^2-1}=e^{\frac{x}{k}}$,

$$g=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right)=\operatorname{ch}\frac{x}{k}. \tag{77}$$

Это дает гиперболическую геометрию; в символике Лобачевского соотношение (77) можно написать в виде

$$g=\frac{1}{\sin\Pi(x)},$$

как это в гиперболической геометрии действительно имеет место (16).

Если же в уравнении (75) будем считать, что $g^2(x)<1$, то оно выражает, что

$$\frac{g'}{\sqrt{1-g^2}}=\frac{1}{k},$$

где k — постоянная, отличная от нуля. Интегрирование при учете того же предельного условия дает:

$$g=\cos\frac{x}{k},$$

как это имеет место в сферической геометрии.

Итак, если примем в качестве исходного допущения, что в бесконечно малом имеет место геометрия Евклида, то приходим к трем системам геометрии. При $g(x)=1$ мы получаем евклидову геометрию, при $g(x)>1$ получаем гиперболическую геометрию (геометрию Лобачевского), при $g(x)<1$ получаем сферическую геометрию (которая в пространстве трех измерений называется геометрией Римана в узком значении этого слова).

Изложенному рассуждению Гаусса нельзя, конечно, отказать в остроумии и, более того, в глубине геометрического исследования. И все же при точном понимании утверждения Гаусса его вывод, несомненно, неправилен.

Этот вывод, как мы видели, заключается в том, что геометрия, в которой в бесконечно малом (в треугольнике с бесконечно малыми сторонами) имеют место соотношения геометрии Евклида, неизбежно совпадает с одной из указанных выше систем. Между тем, мы в настоящее время очень хорошо знаем, что в римановой геометрии в широком смысле этого слова[1]) в бесконечно малом всегда имеют место метрические соотношения классической геометрии Евклида. Вывод Гаусса, таким образом, несправедлив.

В чем же заключается источник этого расхождения, нужно сказать прямо — этой ошибки? Он коренится в том, что положения, из которых Гаусс исходит, существенно шире тех, которые он формулирует в начале своего исследования. Гаусс принимает, что длина окружности в рассматриваемой плоскости представляет собой функцию от радиуса. Он не высказывает этого допущения явно, но оно содержится в определении функции $f(x)$.

Между тем, на поверхности, скажем, трехосного эллипсоида длина геодезической окружности данного радиуса не имеет на всей поверхности постоянной длины, а зависит от положения центра. Конечно, на такой поверхности, на которой существуют транзитивные движения, так что каждый круг может быть на ней передвинут таким образом, чтобы его центр совпал с любой другой точкой поверхности, указанное утверждение справедливо. Гаусс молчаливо принимает существование таких движений. Более того, в точном выражении Гаусса исходное его допущение предполагает также, что длина дуги окружности, соответствующая данному центральному углу ω, вполне этим углом определяется; это имеет место, если на поверхности возможно вращение вокруг любой ее точки.

Гаусс фактически допускает, что на поверхности (плоскости), которую он исследует, имеет место движение с тремя степенями свободы. Таким образом, то, что доказано Гауссом, можно было бы формулировать так: *Если*

[1]) В. Ф. Каган, Геометрические идеи Римана и их современное развитие. М.—Л., 1933.

на плоскости возможны движения с тремя степенями свободы и в бесконечно малых треугольниках имеют место соотношения Евклида, то это либо плоскость Евклида, либо плоскость Лобачевского, либо плоскость Римана (сфера). Однако Софус Ли показал, что двумерная геометрия, в которой возможны движения с тремя степенями свободы указанного свойства (т. е. в которой возможны движение, приводящее каждую точку в любую другую точку, и вращения вокруг любой точки), есть одна из трех геометрий, о которых говорит Гаусс. Основное допущение Гаусса, что в бесконечно малом имеют место соотношения евклидовой геометрии, является, таким образом, излишним. Исследование Гаусса не имеет поэтому того значения, которое он ему был склонен приписать. Ему, однако, никак нельзя отказать в тонком остроумии.

Заключение

В продолжительном процессе поисков доказательства постулата о параллельных линиях прежде всего сложилось убеждение, что ни одно из многочисленных предложенных доказательств не имеет подлинной доказательной силы. Эта точка зрения отчетливо проглядывает уже в XVII в. у Валлиса; твердыми поборниками ее в XVIII в. являются Кестнер и его ученик Клюгель. Исследования Лежандра завершают эту эпоху. Янош Больаи об этих исследованиях писал:

> «Великий Лежандр, наряду со старым доказательством, настолько скверным, что нельзя достаточно надивиться, как оно могло возникнуть в такой глубокомысленной голове, дает весьма изящное доказательство предложения; однако при доказательстве того, что ..., его корабль потерпел крушение».

Многоточие означает нечеткое место в письме, но ясно, что недостаточность этого доказательства не оставляла у Яноша Больаи никаких сомнений.

Со своей стороны, Лобачевский писал:

«Старания Лежандра не прибавили к этой теории ничего, так как он был вынужден оставить единственно строгий ход [исследования], стать на побочный путь и прибегнуть к вспомогательным предположениям, которые он без основания старается изобразить, как необходимые аксиомы» [1]).

И именно после Лежандра, уже после первых опубликованных им исследований по этому вопросу возникает сознание, что вся задача должна получить другое решение, что правильный ответ на вопрос о возможности доказательства постулата о параллельных линиях коренится в построении новой своеобразной «неевклидовой», «воображаемой» геометрии. Некоторые предпосылки этой идеи можно усмотреть уже в работах Саккери, Ламберта, Швейкарта и Тауринуса.

Но опубликована была новая геометрия впервые Н. И. Лобачевским в 1829 г., а доложена им Физико-математическому факультету Казанского университета еще в 1826 г. Н. И. Лобачевскому, таким образом, бесспорно принадлежит приоритет в открытии неевклидовой геометрии. Замысел новой геометрии был ясен и Гауссу. Гаусс, однако, не только не дал этому замыслу достаточного развития, не только не опубликовал своих взглядов на основы геометрии, он не позволил опубликовать их тем, кому они случайно были от него известны. Между тем, Лобачевский уже в первой своей работе «О началах геометрии» дал настолько развернутую систему построенной им геометрии, что по существу ее содержания его последователям оставалось сделать уже немногое. Через три года после Лобачевского Янош Больаи опубликовал свой знаменитый «Аппендикс», содержавший точное изложение элементарных начал той же геометрии.

В самом строении новой геометрии Лобачевского и Больаи, несомненно, есть общие черты, главной из которых является восстановление евклидовой геометрии в недрах

---

[1]) Н. И. Лобачевский, Геометрические исследования по теории параллельных линий. Полное собрание сочинений, т. I, стр. 79.

новой геометрии. Но не только в деталях, а и в самой постановке задачи в творениях обоих геометров есть глубокое различие, — это мы и старались выявить в настоящей статье. Лобачевскому совершенно чуждо было свойственное Больаи стремление создать «абсолютно истинную геометрию, не зависящую от истинности и ложности XI аксиомы Евклида». Внимание и силы Лобачевского сосредоточены были на развитии новой, созданной им «воображаемой» геометрии, на изыскании методов ее приложения, на доказательстве ее непротиворечивости. Его последователям оставалось только установить незыблемую правильность его построения; этим в истории геометрии была положена новая эпоха.

I. ВАЖНЕЙШИЕ ДАТЫ ЖИЗНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Все даты указаны по первоисточникам по новому стилю

1792 г. 1 декабря родился.

1802 г. 17 ноября поступил в Казанскую гимназию.

1807 г. 26 февраля переведен в студенты университета.

1811 г. 15 августа получил степень магистра физико-математических наук.

1814 г. 18 марта утвержден адъюнктом физико-математических наук и с ближайшего учебного года приступил к чтению различных разделов чистой и прикладной математики (физики в 1819—1820 и 1823—1826 гг., астрономии в 1819—1822 и 1823—1825 гг., статики и динамики в 1825—1827 гг., гидростатики, гидравлики и учения о газах в 1827—1828 гг.).

1816 г. 19 июля утвержден экстраординарным профессором.

1819 г. в апреле, за выездом проф. Симонова в кругосветное плавание, принимает на себя преподавание астрономии и заведывание астрономической обсерваторией.

1819 г. 28 декабря назначается членом комитета (в котором вскоре и остается в единственном числе) по приведению в порядок библиотеки университета.

1821 г. Выполняет поручение попечителя по покупке в С.-Петербурге для университета астрономических и физических инструментов и книг по математике.

1822 г. Назначается членом (а с 1825 г. и председателем) университетского строительного комитета.

1822 г. 9 марта избран ординарным профессором (утвержден 5 июня).

1820 г. С 1 декабря по июнь 1821 г. и с 12 июня 1823 г. по август 1825 г. нес, по избранию, должность декана физико-математического факультета.

1825 г. 20 октября избирается исполняющим обязанности библиотекаря университета; 3 марта 1826 г. утвержден в этой должности и нес ее, даже совмещая с обязанностями ректора, до 3 апреля 1835 г.

1826 г. 23 февраля сделал в заседании физико-математического факультета доклад, содержавший изложение основных начал открытой им неевклидовой геометрии.

1827 г. 11 августа утвержден ректором университета; 6 сентября вступил в эту должность и непрерывно нес ее до 26 августа 1846 г. (т. е. до назначения помощником попечителя Казанского учебного округа).

1829—1830 гг. Опубликовал в журнале «Казанский вестник» мемуар «О началах геометрии», в котором в первый раз появилось в печати изложение неевклидовой геометрии.

1845 г. 30 апреля вступил в управление округом по случаю перемещения попечителя Мусина-Пушкина в С.-Петербург.

1846 г. 26 августа назначен помощником попечителя Казанского учебного округа.

1855 г. Опубликовал последнюю свою работу «Пангеометрия».

1855 г. 24 ноября уволен от службы по болезни с причислением к министерству.

1856 г. 24 февраля скончался в Казани.

II. КРАТКИЕ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Собрания сочинений Н. И. Лобачевского

1. Полное собрание сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского (обозначается в дальнейшем ПССГ). Т. I. Сочинения на русском языке. Казань, 1883. Т. II. Сочинения на иностранных языках. Казань, 1886.

2. Полное собрание сочинений Н. И. Лобачевского (обозначается в дальнейшем ПСС). Главный редактор В. Ф. Каган. Вышло 5 томов, последний 6-й том готовится к печати. Сочинения по геометрии помещены в первых трех томах: т. I («Геометрические исследования по теории параллельных линий», «О началах геометрии»), М. — Л., 1946; т. II («Геометрия», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»), М.—Л., 1948; т. III («Воображаемая геометрия», «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», «Пангеометрия»), М. — Л., 1951.

2. Сочинения Н. И. Лобачевского по геометрии

1. Геометрия. При жизни Лобачевского напечатано не было. Сохранилась рукопись, представленная Н. И. Лобачевским к напечатанию в 1823 г. Отд. изд. Казань, 1909, предисловие А. В. Васильева. ПСС, т. II, 43—107. Вводные статьи и комментарии В. Ф. Кагана.

2. О началах геометрии. «Казанский вестник», 1829 и 1830. ПССГ, т. I, 1—67. Отд. изд. (неполный текст), СПБ, 1908, примечания А. И. Желтухина. ПСС, т. I, 185—261. Вводная статья и комментарии А. П. Котельникова.

3. Воображаемая геометрия. Ученые записки Казанского университета, 1835, кн. 1, 3—88. ПССГ, т. I, 71—120. ПСС, т. III, 16—70, вводные статьи и комментарии А. П. Нордена и А. Н. Хованского. Франц. текст, переработанный Лобачевским: Géométrie imaginaire, Journ. für die reine und angew.

Math., Berlin, 1837, **17**, 4, 105—320. ПССГ, т. II, 581—613. Перев. на русск. язык: ПСС, т. III, 139—170 (перев. А. Н. Хованского).
4. Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам. Ученые записки Казанского университета, 1836, кн. 1, 3—166. ПССГ, т. I, 121—218. ПСС, т. III, 181—294, вводная статья и комментарии Б. Л. Лаптева.
5. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. Ученые записки Казанского университета, 1835—1838. ПССГ, т. I, 219—486. Отд. изд., Харьков, Харьковская математическая библиотека, 1912, с приложением биографического очерка автора и с примечаниями, написанными Д. М. Синцовым. ПСС, т. II, 147—454, вводная статья и комментарии Б. Л. Лаптева, А. П. Нордена и А. Н. Хованского.
6. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Отд. изд., Berlin, Fincke, 1840. ПССГ, т. II, 553—578. Русские переводы: «Геометрические изыскания по теории параллельных линий», перев. А. В. Л[етнико]ва, «Математический сборник», 1868, **3**, 78—120; «Геометрические исследования по теории параллельных линий», ПСС, т. I, 79—127, вводные статьи и комментарии В. Ф. Кагана; отд. изд., М. — Л., 1945.
7. Пангеометрия. Ученые записки Казанского университета, 1855, кн. 1, 1—76. ПССГ, т. I, 489—550. ПСС, т. III, 435—524, вводная статья и комментарии В. Ф. Кагана. Перев. на франц. язык, сделанный Лобачевским: Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, Казань, 277—340. ПССГ, т. II, 617—680.

3. Важнейшие сочинения, содержащие жизнеописание Н. И. Лобачевского

1. Э. П. Янишевский, Историческая записка о жизни и деятельности Николая Ивановича Лобачевского. Казань, 1868.
2. F. Engel, N. I. Lobatschefskij, 1898. Приложение к немецкому переводу двух сочинений Н. И. Лобачевского: «О началах геометрии» и «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».
3. А. В. Васильев, Николай Иванович Лобачевский. «Русский биографический словарь», т. X, СПБ, 1914.
4. Д. М. Синцов, Николай Иванович Лобачевский. Харьков, 1941.
5. В. Ф. Каган, Лобачевский. М. — Л., 1944, 2-е изд., 1948.
6. Б. Г. Кузнецов, Жизнь Н. И. Лобачевского. «Советская наука», 1940, № 6.
7. Л. Б. Модзалевский, (ред.). Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М. — Л., 1948.
8. В. Ф. Каган и Г. Ф. Рыбкин, Лобачевский. «Большая советская энциклопедия», 2-е изд., т. 25.

4. Сочинения, содержащие доступные изложения неевклидовой геометрии

(расположены в хронологическом порядке их издания)

1. В. Ф. Каган, Очерк геометрической системы Лобачевского. Одесса, 1900.

2. С. Лукьянченко, Пространство Лобачевского — Больаи. Ч. I, Харьков, 1914; ч. II, Харьков, 1914—1915, 2-е изд. первой части под названием «Элементы неевклидовой геометрии Лобачевского — Больаи», М. — Л., 1933. (Сочинение не лишено недостатков, но содержит доступное изложение геометрии Лобачевского.)

3. Р. Бальдус, Неевклидова геометрия. Перев. с немецкого Н. В. Ефимова под ред. Г. Б. Гуревича, М. — Л., 1933. (Сочинение обладает большими достоинствами, однако оно излагает гиперболическую геометрию не в стиле Лобачевского. Сочинение значительно менее доступное, чем предыдущее.)

4. П. С. Александров, Что такое неевклидова геометрия. Сборник «Николай Иванович Лобачевский», М. — Л., 1943.

5. П. А. Широков, Краткий очерк геометрии Лобачевского, М.—Л., 1955. (См. стр. 8 этой книги.)

6. И. М. Гуль, Геометрия Лобачевского. М., 1947. (Эта небольшая книжка содержит очень элементарное, но четкое изложение начал неевклидовой геометрии.)

7. В. Ф. Каган, Основания геометрии. Ч. I. Геометрия Лобачевского и ее предистория. М. — Л., 1949. (Обстоятельное изложение.)

8. А. П. Норден, Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М. — Л., 1953.

9. Б. Н. Делоне, Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. М. — Л., 1953. (Содержит проективную интерпретацию геометрии Лобачевского на плоскости.)

(Две последние книги не предполагают у читателя никаких специальных знаний, но требуют от него хорошего математического развития.)

ПРИМЕЧАНИЯ

Вступление «Речь на торжественном заседании»

Речь была произнесена В. Ф. Каганом 25 февраля 1926 г. в Казани на торжественном заседании Правления Казанского государственного университета и Совета Казанского физико-математического общества, посвященном столетию со дня открытия геометрической системы Лобачевского. В протоколе заседания имеется следующая запись:

> «С интересной речью выступает проф. В. Ф. Каган как представитель Московского научно-исследовательского института, I Московского университета, Госиздата и Комиссии по изданию полного собрания сочинений Лобачевского» [1]).

Речь напечатана в сборнике, посвященном празднованию в Казани столетия открытия геометрии Лобачевского (см. [1]), стр. 59—66). Здесь речь воспроизводится с небольшими изменениями. Эти изменения были в основном намечены самим В. Ф. Каганом в его личном экземпляре; вероятно, он подготовлял речь для нового издания. Речь В. Ф. Кагана имеет почти 30-летнюю давность; следует иметь в виду, что образная форма речи делает порой высказанные в ней мысли несколько рискованными; однако, как видно из дальнейших очерков, автор никогда их не отстаивал.

1. «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии»

Очерк воспроизводит почти полностью текст вводной статьи В. Ф. Кагана к «Геометрическим исследованиям по теории параллельных линий» Н. И. Лобачевского, помещенной в I томе Полного собрания его сочинений (1946, стр. 31—67). Эта вводная

---

[1]) Сборник «Празднование Казанским университетом столетия открытия неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским», Изд. Физ.-мат. о-ва при Каз. ун-те, 1927, стр. 15.

статья называется «Учение о параллельных линиях и открытие неевклидовой геометрии» и содержит, кроме напечатанного в настоящей книге текста, еще один заключительный раздел, посвященный Н. И. Лобачевскому (главным образом его жизнеописание). В настоящем сборнике этот раздел опущен, так как Н. И. Лобачевскому посвящен специальный, следующий очерк. Соответственно изменено и название. Такое сокращение и изменение названия не нарушает цельности очерка и не противоречит замыслу автора. В. Ф. Каган написал для Полного собрания сочинений Лобачевского сначала две вводные статьи к «Геометрическим исследованиям»: одну — «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии» и другую — «Открытие неевклидовой геометрии». Первая из этих статей и составляет публикуемый здесь очерк. Позже было решено обе статьи соединить в одну.

Классические «доказательства» теоремы о параллельных линиях и классические же их опровержения другими учеными даны В. Ф. Каганом в этом очерке не в собственной передаче, а в подлинном тексте их авторов. Этот замысел автор считал особенно удачным и почти полностью воспроизвел его в своей книге «Основания геометрии» (В. Ф. Каган, Основания геометрии, Учение об основании геометрии в ходе его исторического развития. Часть I: Геометрия Лобачевского и ее предыстория, М. — Л., 1949, стр. 114—143).

II. «Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке»

Очерк вышел отдельной книгой в 1943 г. с тем же названием (М. — Л., изд. АН СССР, 55 стр.). В 1948 г. вышло ее второе переработанное издание (М. — Л., Гостехиздат, 84 стр.), с которого воспроизведен текст в настоящем сборнике. Незначительные редакционные дополнения, главным образом библиографического характера, сделаны в подстрочных примечаниях. В книге были приложены составленные В. Ф. Каганом «Важнейшие даты жизни Лобачевского» и «Краткие библиографические сведения»; в несколько дополненном виде они приложены к настоящему сборнику.

III. «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров»

Очерк помещен в качестве приложения к сочинению Н. И. Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий» в I томе его Полного собрания сочинений (М. — Л., 1946, стр. 160—171).

IV. «Янош Больаи»

Биографический очерк «Янош Больаи» помещен в русском переводе сочинений Я. Больаи «Аппендикс» (Янош Больаи, Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную... Перев. с латинского, вступительные статьи и примечания В. Ф. Кагана, М. — Л., 1950, стр. 9—35).

V. «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи»

Очерк напечатан в 1948 г. в «Трудах института истории естествознания Академии наук СССР» (т. II, М. — Л., стр. 323—389), а затем в 1950 г. включен в первый выпуск серии «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей» вместе с очерком П. А. Широкова (П. А. Широков и В. Ф. Каган, Строение неевклидовой геометрии. Серия «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей» под общей редакцией В. Ф. Кагана, вып. I, М. — Л., 1950, стр. 79—178. *Содержание*: П. А. Широков, Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, В. Ф. Каган, Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи).

В настоящем сборнике в этом очерке произведены сокращения — исключены места, почти дословно повторяемые в других очерках сборника (например, письмо Гаусса Тауринусу от 8/XI 1824, отрывки из высказываний Яноша Больаи, доказательства Лежандра теоремы о том, что сумма углов треугольника не может превышать двух прямых и т. д.). В частности, исключен целый большой параграф (предпоследний) «Замечания Яноша Больаи к „Геометрическим исследованиям“ Лобачевского», так как его содержание почти целиком вошло в очерк «Янош Больаи».

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

Вступление. Речь на торжественном заседании, посвященном столетию открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии 11

I. Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии 21

II. Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке 70

III. Элементы неевклидовой геометрии у других геометров 149

IV. Янош Больаи 165

V. Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больаи 193

Приложения:

I. Важнейшие даты жизни Н. И. Лобачевского 295

II. Краткие библиографические сведения 297

Примечания 300

Каган Вениамин Федорович.
Лобачевский и его геометрия.
Редактор *А. П. Разумовская.*
Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *И. С. Цветкова.*

Сдано в набор 9/IV 1955 г. Подписано к печати 2/VIII 1955 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 9,5+1 вклейка. Условн. печ. л. 15,6. Уч.-изд. л. 14,80. Тираж 15000 экз. Т-06803. Цена книги 6 р. 45 к.
Заказ № 343.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.