АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

ПЕРЕВОД, КОММЕНТАРИИ
ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ
И ПРИМЕЧАНИЯ
ПРОФЕССОРА

В. Ф. КАГАНА

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · 1945 ЛЕНИНГРАД

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ

I. СОЧИНЕНИЯ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО, ПРЕДШЕСТВОВАВШИЕ „ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ИССЛЕДОВАНИЯМ“

Выпускаемое в настоящем издании небольшое сочинение Лобачевского „Геометрические исследования по теории параллельных линий“ принадлежит к числу последних его геометрических работ.[1] Чтобы читатель мог вполне оценить это произведение, являющееся одним из наиболее блестящих перлов математической литературы, нужно выяснить то место, которое оно занимает среди творений великого геометра. Этому и посвящены две статьи, которые мы предпосылаем тексту Лобачевского.

В 1814 г. Н. И. Лобачевский получил звание магистра математических наук. В ту пору звание магистра получали молодые люди, которые, в виду успехов, оказанных при прохождении университетского курса, оставлялись для подготовки к научной и профессорской деятельности; в настоящее время таких молодых людей называют аспирантами. Магистры служили также помощниками профессоров; они вели подсобную преподавательскую работу. Лобачевский читал лекции по элементарной математике студентам, а также слушателям специальных курсов для лиц, поступавших на государственную службу. В 1816 г. Лобачевский был уже избран экстраординарным, а в 1818 г. ординарным профессором университета. Его преподавательская деятельность расширилась, но некоторое время он еще не оставлял своих лекций по элементарной математике для чиновников и для студентов. Эти последние курсы имели, очевидно, целью расширить и углубить познания студентов в области элементарной математики; это была, как теперь часто говорят, „элементарная математика с высшей точки зрения“. Размышления над таким курсом геометрии, повидимому, натолкнули Лобачевского на те идеи, которые привели его к открытию неевклидовой геометрии.

В 1819 г. М. Л. Магницкому было поручено произвести ревизию Казанского университета. Магницкий запросил профессоров о работах, предназначенных для опубликования. В отчете о ревизии имеется запись, из которой видно, что у Лобачевского была готова к печати рукопись, названная им „Основания геометрии“. Было бы неправильным считать, что это сочинение Лобачевского, первое,

---

[1] Позже „Геометрических исследований“ появилось еще только одно геометрическое сочинение Лобачевского — его „Пангеометрия“, — которое вышло в свет за год до его смерти (1855).

о котором мы имеем сведения, было посвящено вопросу об обосновании геометрии: в этом значении термин „основания геометрии" появляется только в конце XIX в. (Пеано, Паш, Гильберт), в начале же этого столетия под названиями „основания арифметики", „основания геометрии" и т. п. разумели начальные руководства по соответствующему предмету (Гурьев, Осиповский и др.). Нужно думать, что работа, указанная Лобачевским, была учебной книгой по геометрии того или иного типа; вероятнее всего, это был первый вариант сочинения, которое он под названием „Геометрия" представил в 1823 г. для напечатания на казенный счет. Магницкий состоял тогда попечителем Казанского учебного округа и без его разрешения никакое сочинение от имени университета не могло быть напечатано. Директор университета Г. Б. Никольский препроводил поэтому рукопись Магницкому. Магницкий, в свою очередь, послал рукопись Лобачевского на отзыв академику Н. И. Фуссу. Отзыв, присланный Фуссом, был очень неблагоприятен.

„Сочинение сие не есть геометрия или полное и систематическое изложение всей науки; и если сочинитель думает, что оно может служить учебною книгою, то он сим доказывает, что он не имеет точного понятия о потребностях учебной книги, т. е. о полноте геометрических истин, всю систему начального курса науки составляющих, о способе математическом, о необходимости точных и ясных определений всех понятий, о логическом порядке и методическом расположении предметов, о надлежащей постепенности геометрических истин, о неупустительной и по возможности чисто геометрической строгости их доказательств и пр. О всех этих необходимых качествах и следу нет в рассмотренной мною геометрии".

Фусс вменяет Лобачевскому в вину также то, что он вводит метрическую систему мер, в том числе центезимальное деление прямого угла. „Известно, — пишет он, — что сие разделение выдумано было во время французской революции, когда бешенство нации уничтожить все прежде бывшее распространилось даже до календаря и деления круга".

Магницкий через директора университета сообщил Лобачевскому, что он не может при таком отзыве дать разрешение на напечатание этого сочинения и предлагает ему либо исправить указанные Фуссом недостатки, либо „дать на замечание Фусса изъяснение". Лобачевский не сделал ни того, ни другого, не взял даже обратно своей рукописи. Долгое время она считалась утерянною; но в феврале 1898 г. профессор Н. П. Загоскин, занятый в то время составлением истории Казанского университета, обнаружил в архиве канцелярии попечителя дело № 12 за 1825 г., содержавшее всю переписку по вопросу об издании этой книги и собственноручную рукопись Лобачевского. Очень любопытно, что после этого потребовалось целых одиннадцать лет на то, чтобы это сочинение появилось в свет. Оно было издано Казанским физико-математическим обществом только в 1909 г. В предисловии к нему покойный профессор А. В. Васильев замечает, что Лобачевский позже, когда состоял ректором Казанского университета, „мог напечатать свои учебник и если не сделал этого, то вероятно потому, что сознавал сам в этом отношении его недостатки. Но как „исторический документ“ издаваемая рукопись представляет большой интерес“.

Таким образом, и А. В. Васильев в некоторой мере присоединяется к отзыву Фусса, хотя и не в такой резкой форме. Это обнаруживает, что даже первое произведение Лобачевского не было достаточно понято не только Фуссом в 1823 г., но и в Казани Васильевым через 75 лет. В чем же заключаются особенности этого сочинения, вызывавшие такое к нему отношение? Можно было не понять своеобразных и новых идей Лобачевского в области неевклидовой геометрии, но чем объяснить, что и Фусс и Васильев относятся отрицательно к книге Лобачевского, которая содержала только обычный элементарный материал и ничего несообразного содержать не могла?

В книге „Лобачевский“, принадлежащей автору этих строк, подробно изложено содержание „Геометрии“ и освещены те влияния, под которыми Лобачевский ее составлял, те соображения, которые им руководили. Здесь мы вынуждены ограничиться только необходимыми краткими указаниями. В 1757 г. в VII томе знаменитой французской „Энциклопедии“ появилась статья Даламбера „Éléments des sciences“ (Начала наук), в которой главное место было уделено началам геометрии. Даламбер излагает в этой статье довольно обстоятельный план, по которому, по его мнению, должны строиться начала геометрии; статья была пересыпана ссылками на другие статьи, совокупностью которых этот план собственно и определялся. План Даламбера служил предметом многочисленных дискуссий и внимательно читался всеми, составлявшими сочинения по началам геометрии. Мы отметим только важнейшие черты этого плана.

Прежде всего Даламбер относится крайне сдержанно к „Началам“ Евклида, которые в полном или сокращенном виде еще господствовали в школе. Далее, Даламбер стоит на строго метрической точке зрения при изложении начал геометрии: измерение длин, площадей и обьемов должно составлять не только главное, но, можно сказать, все содержание геометрии. В этом смысле он понимает термины „лонгиметрия“, „планиметрия“, „штереометрия“. Движение (наложение), которым Евклид пользуется очень ограниченно (два раза на протяжении всего сочинения), должно служить главным средством построения начал геометрии. Метрика должна строиться на базе пропорциональности. Учение об отношениях и пропорциях должно быть арифметизировано; своеобразное и точное, но исключительно тяжеловесное изложение этого отдела у Евклида должно быть совершенно оставлено.

Но, можно сказать, основным моментом в плане Даламбера является вопрос о степени точности, с которой учебное руководство по геометрии должно составляться. Отметив, что точность изложения не только не находится в противоречии с его удобопонятностью, а даже содействует ей, Даламбер стоит на том, что степень точности должна определяться главным образом тем, кого собственно книга имеет в виду: учащихся начальной школы или школы повышенного типа (в наше время сказали бы „средней школы"), или, наконец, тех, кто хочет углубленно изучать геометрию. Но для кого бы учебная книга по геометрии ни была предназначена, она должна быть, по его выражению, чужда „химерической точиости", т. е. запутанных рассуждений, которые при внимательном анализе вовсе не уточняют рассуждения. Эти стрелы были направлены главным образом против комментаторов Евклида, рассуждения которых обыкновенно были очень громоздки, делали ясное непонятным. На этом Даламбер особенно настаивает и идет в этом направлении столь далеко, что руководство по геометрии, по его мнению, вовсе не должно начинаться с аксиом, не должно создавать иллюзии, будто геометрия действительно на этих аксиомах строится; эта своеобразная точка зрения объясняется тем, что аксиоматика Евклида несомненно представляет самую слабую сторону в его книге. Комментаторы же его, заменяя одни аксиомы другими, нагромождая новые аксиомы, отнюдь не достигали цели, не приближали геометрию к строго дедуктивной дисциплине. В заключение Даламбер останавливается на вопросе о том, как надо при изложении теории пропорций и других вопросов метрической геометрии обращаться с пропорциональными величинами. Даламбер находит, что доказательства, относящиеся к иррациональным величинам, всегда должны проводиться методом от противного.

Взгляды Даламбера несомненно были проявлением наиболее прогрессивных в то время устремлений научной мысли, и Лобачевский им следовал.

Другим обстоятельством, игравшим не менее важную роль при составлении „Геометрии", являлись складывавшиеся уже тогда собственные взгляды Лобачевского на основания геометрии, в частности, на учение о параллельных линиях. Уже с этого времени и до конца своих дней Лобачевский ставил себе двоякую задачу: во-первых, дать четкое обоснование начал, на которых строится геометрия, и, во-вторых, пролить полный свет на пробел в теории параллельных линий, заключающийся во введении новой аксиомы (V постулата Евклида). В первом печатном своем сочинении „О началах геометрии" Лобачевский пишет:

„Кто не согласится, что никакая математическая наука не должна была бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию; и что нигде в математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий".

Вторую из этих задач он успешно выполнил; это составляет главную его заслугу, это создало славу его имени. Но первой задачи он не разрешил, в то время это еще было невозможно; усвоение и развитие его идей именно и послужило руслом, по которому развернулось учение об обосновании геометрии в нынешней его постановке. Но обе эти тенденции ясно запечатлены на этом первом его сочинении; весь Лобачевский в некоторой мере виден уже в его „Геометрии".

„Геометрия" начинается кратким введением, в котором устанавливаются основные понятия геометрии. Их выбор и определения сохраняют недостатки Евклида, но два понятия четко выделены. Эти понятия — тело и прикосновение. В дальнейших сочинениях Лобачевский рассматривает их как основные и даже пытается действительно построить на них всю геометрию (см. ниже „Новые начала геометрии"). Как и многие понятия, которые вводились в различное время главным образом комментаторами Евклида, они не играют той роли, которую Лобачевский был склонен им присвоить. Но нельзя не отметить, что это понятия топологические. Конечно, Лобачевский очень далек от четкого сознания того, в чем особенность вводимых им основных понятий заключается; но чутье геометра ему подсказывает, что они существенно и целесообразно отличаются от тех основных понятий геометрии, которыми пользовались до него. И не случайно у него почти на первых страницах появляется теорема Эйлера о зависимости между числом граней, ребер и вершин многогранников — предложение, не нуждающееся ни в каких соображениях метрического свойства. В дальнейшем (в „Новых началах") Лобачевский, как увидим, шире пользуется соображениями топологического свойства.

Следуя Даламберу, Лобачевский никаких аксиом в „Геометрии" не вводит. Это он выдерживает и во всех своих сочинениях. Даже в „Новых началах", одну из главных задач которых составляет систематическое построение всей геометрии, нет аксиом, по крайней мере в явном виде они не выражены.

Следуя опять-таки Даламберу, Лобачевский занимается исключительно метрикой. Первая глава посвящена измерению линий, вторая — измерению углов, третья — перпендикулярам, притом не только к прямой, но и к плоскости; четвертая — измерению телесных углов. Только в пятой главе Лобачевский рассматривает условия равенства треугольников. Два обстоятельства здесь нужно отметить.

Во-первых, всюду за предложениями планиметрическими следуют аналогичные предложения стереометрические; вслед за измерением прямолинейных углов дается измерение двугранных и многогранных углов, за перпендикулярными прямыми следует учение о перпендикулярных плоскостях, о прямой, перпендикулярной к плоскости. Непосредственно после общих свойств правильных многоугольников рассматриваются свойства правильных многогранников. Этот „фузионизм", как в настоящее время называют совместное изложение планиметрии и стереометрии, вызывал наибольшее удивление, но он у Лобачевского имел совершенно особый смысл, о котором скажем ниже.

Вторая основная особенность всего построения — позднее появление учения о параллельных линиях. Лобачевский обращается к нему только там, где оно становится для его метрических задач совершенно необходимым, именно в главе VI „Об измерении прямоугольников". Она начинается следующими словами:

„Измерение плоскостей[1] основывается на том, что две линии сходятся, когда они стоят на третьей по одну сторону и когда одна перпендикул, а другая наклонена под острым углом, обращенным к перпендикулу. Линии AB и CD должны сходиться по достаточном продолжении, если одна из них AB перпендикулярна к BC, а другая CD наклонена к BC под острым углом C, обращенным к перпендикулу AB. Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать; какие были даны, могут называться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами".

Из этих строк ясно видно, что Лобачевский в это время уже отдавал себе ясный отчет в том, что ни одно из предложенных доказательств постулата о параллельных линиях не выдерживает критики. Он уже считал необходимым четко отделить весь геометрический материал, как планиметрический, так и стереометрический, который от постулата о параллельных не зависит. Это было выполнено Лобачевским впервые. Этим и объясняется тот фузионизм, который привел в такое недоумение критиков — совершенное непонимание задачи, которую Лобачевский себе ставил.

Таким образом, первые пять глав „Геометрии" объединяют материал, относящийся к так называемой „абсолютной геометрии", т. е. той части геометрии, которая не зависит от постулата о параллельных линиях. [2]

Вместе с тем Лобачевский выделяет и те измерения, которые выполняются только последовательным делением (алгорифм Евклида) и не нуждаются ни в чем, кроме отложения одного отрезка на другом, одного угла на другом, т. е. выполняются только движением, как этого требует Даламбер. За этим следует измерение площадей и объемов, которое тоже обосновывается алгорифмом Евклида, но опирается также и на учение о подобии.

После этого Лобачевский обращается к тем измерениям, которые выполняются только при помощи понятий о пределе. Эти измерения Лобачевский вновь разбивает на две категории: одни, которые он выполняет методом исчерпывания по Архимеду, — измерение длины окружности, площади круга и такие, которые он производит прямым интегрированием, правда, в элементарной форме. Для ясности приведем вычисление объема шара, как оно сделано Лобачевским. В полушаре разделим радиус, перпендикулярный к большому кругу, ограничивающему это полушарие снизу, на n равных частей и через точки деления проведем плоскости, секущие шар по кругам. На этих кругах строим входящие и выходящие цилиндры. Если через r обозначим радиус шара,

---

[1] Т. е. площадей.

[2] А. Н. Колмогоров в брошюре „Николай Иванович Лобачевский" (ОГИЗ, 1943) указывает, что этот термин неудачен. Вполне разделяю эту точку зрения, хотя Болиай, который этот термин ввел, придает ему более широкое значение, чем позднейшие авторы. Об этом см. ниже, примечание [15], стр. 86.

через $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ — радиусы последовательных сечений, то сумма объемов выходящих цилиндров равна

$$\frac{\pi r}{n}(r^2 + r_1{}^2 + \ldots + r^2{}_{n-1}),$$

а сумма объемов входящих цилиндров

$$\frac{\pi r}{n}(r_1{}^2 + r_2{}^2 + \ldots + r^2{}_{n-1}).$$

Разность между обеими суммами равна $\frac{\pi r^3}{n}$; она стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает. Так как, однако,

$$r_1{}^2 = r^2 - \frac{r^2}{n^2}, \quad r_2{}^2 = r^2\left(1 - \frac{2^2}{n^2}\right), \quad r_3{}^2 = r^2\left(1 - \frac{3^2}{n^2}\right), \quad \ldots,$$
$$r^2{}_{n-1} = r^2\left(1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right),$$

то первая сумма равна

$$\pi r^3\left\{1 - \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right\};$$

но сумма квадратов первых $(n-1)$ натуральных чисел равна

$$\frac{(2n^2 - 3n + 1)n}{6}.$$

Подставляя это значение в предыдущую формулу, получим для суммы входящих цилиндров выражение

$$\pi r^3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right).$$

„Итак, — заключает отсюда Лобачевский, — объем шара тем ближе подходит к

$$2\pi r^3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right),$$

чем число n более; а так как здесь та часть, где n знаменателем, тем ближе подходит к нулю, чем n более, следовательно истинная величина объема шара $\frac{4}{3}\pi r^3$“.

Ясно, что Лобачевский элементарными средствами вычисляет значение определенного интеграла

$$\int_0^r \pi(r^2 - x^2)\,dx.$$

Итак, выделение той части геометрии, которая не зависит от постулата о параллельных линиях, составляет основную задачу „Геометрии“. Вторая основная задача заключается в правильном разбиении метрических задач. В первой части (охватывающей главы I — V) излагается метрика, не зависящая от постулата о параллельных, метрика абсолютной геометрии. Далее следует метрика собственно евклидовой геометрии, и она четко разбита на три части: первую часть составляют измерения, опирающиеся только на учение о подобии; во вторую часть входят измерения, проводимые методом исчерпывания (по Архимеду и отчасти по Евклиду); наконец, третью часть образуют те измерения, которые Лобачевский выполняет прямым интегрированием.

Таков четкий план, таково построение этой книги. Почему же она вызвала такой резкий отзыв Фусса? По двум причинам. Во-первых, Фусс был совершенно далек от подразделения геометрии, как мы теперь говорим, на абсолютную и собственно евклидову, которое составляло главную цель Лобачевского. Этого своеобразного деления он не усмотрел и не понял. Во-вторых, Магницкий скрыл от Фусса, что автор сочинения — профессор Лобачевский: „Один из наставников Казанского округа, — писал он, препровождая Фуссу на отзыв «Геометрию», — написал курс геометрии, представил его ко мне и просит позволения напечатать оный на казенный счет, как учебную книгу". Фусс из этого мог естественно заключить, что книга предназначена для преподавания в школе; если бы это было так, то отзыв Фусса в значительной мере был бы справедлив. Но автор отнюдь не ставил себе такой цели; книга представляла собой краткое изложение лекций, которые Лобачевский читал студентам, уже прошедшим курс геометрии; Фусс заметил бы это, если бы внимательно читал рукопись: в главе VII, изложив вкратце учение о преобразовании многоугольников в равновеликий треугольник, Лобачевский прибавляет: „Все это должно быть моим слушателям давно известно, почему я оставляю дальнейшие подробности".

„Геометрия" напечатана не была; изложив в первый раз свои еще не вполне сложившиеся взгляды на построение геометрии, Лобачевский получил за них первый щелчок.

11 (23) февраля 1826 г. Лобачевский сделал в заседании физико-математического факультета Казанского университета доклад об основах геометрии. Этот доклад он в то же время представил в письменном виде на французском языке под заглавием „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles" (Сжатое изложение основ геометрии с точным доказательством теоремы о параллельных). В препроводительной бумаге он ходатайствовал о напечатании этого мемуара в „Ученых записках университета", издание которых предполагалось начать в ближайшее время. Трем членам факультета, профессорам А. Н. Купферу, И. М. Симонову и доценту Д. И. Брашману, было поручено ознакомиться с работой Лобачевского и дать о ней отзыв. Купфер — физик, Симонов — астроном; от вопросов, относящихся к основаниям геометрии, они стояли очень далеко; но и Брашман,[1] способный математик, был

[1] Впоследствии профессор Московского университета.

человеком прикладного уклона, и проблемы, интересовавшие Лобачевского, были ему совершенно чужды; к тому же он был тогда еще очень молод, влияние его по разным причинам было очень ограничено. Товарищи не поняли, не одобрили работы Лобачевского; но они его „пощадили": повидимому, не желая дать неблагоприятный отзыв, они не возвратили рукописи в факультет, она совершенно утрачена. Во второй раз Лобачевский потерпел неудачу. Но по свойственной ему энергии это его не обескуражило.

В 1829—1830 гг. ему все же удалось опубликовать в журнале „Казанский Вестник" обширный мемуар под названием „О началах геометрии". Как автор сам сообщает, первая часть мемуара представляет собой извлечение из „Exposition succincte"; он даже указывает, какая часть содержалась уже в его докладе и что здесь является новым дополнением.

Если „Геометрия" обнаруживает только, что интересы Лобачевского уже тогда (1823) были сосредоточены на вопросах, связанных с теорией параллельных линий, то в мемуаре „О началах геометрии" новые идеи, его новые взгляды на геометрию изложены уже с такой полнотой, что дальнейшие его работы в сущности составляют только развитие и разработку того материала, который содержится в этом первом мемуаре. Самый мемуар естественно разбивается на три части.

Первая часть содержит краткое изложение того, как, по мнению автора, должна строиться геометрия. К топологическим понятиям „тело" и „соприкосновение" присоединяются новые топологические же понятия о делении тела „поступательными", „обращательными" и „главными" сечениями. За этим следуют понятия метрические и чрезвычайно краткие указания относительно того, как на этой базе должна строиться геометрия.

Вторая часть заключает уже изложение основ созданной им неевклидовой геометрии; оно здесь доведено до уравнений, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника в его „воображаемой геометрии". Именно эта часть, повидимому, почти совпадала с „Exposition succincte"; она содержит тот же материал, который в более доступной форме изложен в книжке „Геометрические исследования", воспроизводимой в настоящем издании.

Третья часть содержит начала аналитической и дифференциальной геометрии в „неевклидовом пространстве" и приложение новой геометрии к анализу, главным образом к вычислению определенных интегралов. Замысел этих приложений заключается в следующем. Берутся определенные интегралы, каждый из которых может быть рассматриваем как значение некоторой длины, площади или объема в неевклидовой геометрии. Это обстоятельство часто дает Лобачевскому возможность непосредственно вычислить значение интеграла средствами „воображаемой геометрии". Часто он преобразует интеграл удачным переходом к другим координатам, иногда своеобразным, присущим неевклидовой геометрии, и таким образом приводит одни интегралы к другим. Нередко, разыскав значение интеграла, он уже находит пути к чисто аналитическому его вычислению. Это имеет для Лобачевского двойное значение. Во-первых, он видит в этом полезное применение „воображаемой геометрии"; во-вторых, совпадение результатов, полученных, с одной стороны, аналитически, а, с другой, при помощи воображаемой геометрии дает ему уверенность в логической правильности последней.

Мемуар „О началах геометрии" очень богат содержанием. Нельзя, однако, не подивиться той краткости, с которой он написан. Математические работы обычно излагаются сжато: читателю предоставляется самому подумать и довести до конца рассуждения, конспективно изложенные. Но во всей математической литературе вряд ли можно найти мемуар, изложенный с такой исключительной сжатостью. Мало сказать, что понять этот мемуар было трудно: профессор П. А. Котельников совершенно прав, утверждая, что без предварительного ознакомления с идеями новой геометрии совершенно невозможно его усвоить. Гаусс, изучавший русский язык, чтобы ознакомиться со всеми работами Лобачевского, писал, что работы эти представляют собой лес, через который невозможно пробраться, не ознакомившись в отдельности с тропинками, ведущими от одного дерева к другому. Между тем Гауссу эти идеи отнюдь не были чужды. Нет ничего удивительного в том, что русские ученые работу Лобачевского вовсе не понимали. „Многие из первоклассных наших математиков читали ее, думали и ничего не понимали", сказано в отзыве, помещенном в журнале „Сын отечества".[1] Этот пасквиль написан с отвратительной грубостью; много тяжелых переживаний причинил он Лобачевскому. Сдержанный, но также отрицательный отзыв об этой работе дан Остроградским; несправедливо утверждение Остроградского, что значение одного из интегралов, вычисленных Лобачевским средствами воображаемой геометрии, неправильно. Но мемуар действительно был написан так, что понять его было почти невозможно.

В 1834 г. Лобачевскому, состоявшему уже с 1827 г. ректором университета, удалось осуществить издание „Ученых записок" университета. В 1835 г. в первой книжке этого журнала появился мемуар „Воображаемая геометрия", а в следующем году — второй мемуар „Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам". Оба мемуара в несколько сокращенном виде появились также на французском языке в известном журнале Крелля. Они содержали углубленную разработку того материала, который был Лобачевским изложен в мемуаре „О началах геометрии", но со специальной целью — доказать логическую правильность созданной им геометрии. Даже практические ее применения — вычисление с ее помощью значений определенных интегралов — играло

[1] „Сын отечества" и „Северный архив", № 41 за 1834 г.

второстепенную роль. Главная задача Лобачевского, как он сам говорит, заключалась в том, чтобы доказать „достаточность новых начал“ для построения геометрии. Интегральные вычисления, выполняемые средствами неевклидовой геометрии, интересуют его не столько сами по себе, сколько потому, что он видит в них доказательство логической правильности созданной им геометрии. Профессор Либман (H. Liebmann) издал перевод „Воображаемой геометрии“ на немецкий язык и снабдил его обстоятельным комментарием. В своем предисловии он пишет:

„Искусство, с которым Лобачевский развертывает преобразование своих интегралов, вызывает изумление; и совершенно понятно, что он сам проявляет при этом наивную радость, и в каждом совпадении результатов, полученных различными геометрическими методами, я сказал бы — завоеванном вычислениями, он с гордостью усматривает новое подтверждение правильности своей геометрии, добытой с таким настойчивым трудом“.

И при всем том, делу уяснения и признания идей Лобачевского эти мемуары не послужили: вряд ли они могли быть поняты кем-либо, кто сам не владел основами неевклидовой геометрии; а для ознакомления с ними они безусловно не были пригодны.

С 1835 по 1838 г. Лобачевский печатает в „Ученых записках Казанского университета“ самое обширное свое сочинение — „Новые начала геометрии с полной теорией параллельных“. Оно имеет целью полностью развернуть всю геометрию — „воображаемую“ и, как частный ее случай, „употребительную“ геометрию. Вступление к этому сочинению начинается словами:

„Всем известно, что в геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времен Евклида в продолжение двух тысяч лет заставило меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую поверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения. В справедливости моей догадки будучи наконец убежден и почитая затруднительный вопрос решенным вполне, писал об этом я рассуждение в 1826 году... Если б открытие мое не принесло другой пользы, кроме пополнения недостатка в начальном учении, то по крайней мере внимание, какое постоянно заслуживал этот предмет, обязывает меня к изложению подробному“.

Лобачевский подробно останавливается главным образом на рассуждениях Лежандра, которые нашли себе место в различных изданиях его „Начал геометрии“ и незадолго перед тем, в год смерти Лежандра (1833), были им объединены в обстоятельном мемуаре, опубликованном в „Мемуарах Парижской Академии наук“ (см. ниже, стр. 26). Лобачевский выясняет несостоятельность всех рассуждений Лежандра; он останавливается также и на известном доказательстве V постулата о параллельных линиях, предложенном Л. Бертраном, которое в некоторой модификации также давал Лежандр, и столь же убедительно обнаруживает его несостоятельность. Но не в одной только теории параллельных линий Лобачевский видит слабые стороны Евклида. Они скрываются в первых понятиях, „которые, — говорит Лобачевский, — намерен я здесь показать и, сколько могу, исправить".

Итак, в этом обширном сочинении Лобачевский ставит себе целью дать полное решение тех двух проблем, которые его занимали всю жизнь, которые намечены уже в его „Геометрии": дать общее построение всей элементарной геометрии, не страдающее теми недостатками, которые присущи „Началам" Евклида, и разрешить вопрос о параллельных линиях.

„Новые начала" состоят из тринадцати глав. Первые шесть из них посвящены систематическому построению абсолютной геометрии. По своей структуре они не отличаются от первых пяти глав „Геометрии", но изложение предмета здесь более обстоятельно. Начав опять с двух основных понятий „тела" и „прикосновения", Лобачевский присоединяет к этому еще топологические понятия — три типа сечения тела: поступательные сечения, при которых части через одну не имеют общих точек [рисунок Лобачевского изображает тело, разделенное на части параллельными плоскостями], обращательные сечения, каждое из которых увеличивает число частей на два [Лобачевский иллюстрирует это рисунком, изображающим круглый цилиндр, разделенный на части плоскостями, проходящими через ось], и главные сечения, слагающиеся из поступательных и обращательных таким образом, что каждое из них делит пространство на восемь частей (подобно тому, как это делают в пространстве декартовы плоскости координат). Мы не будем приводить определений, которые Лобачевский дает этим понятиям, и развития, которое они получают; это очень трудно сделать. После этих топологических элементов Лобачевский вводит метрические понятия и прежде всего „расстояние" между двумя точками. Затем он определяет плоскость как геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек (как геометрическое место пересечений равных сфер, имеющих центры в двух постоянных точках). На этой основе Лобачевский пытается построить геометрию. Нужно сказать, что этот своеобразный подход, в особенности своеобразное определение плоскости, приводит к удачным, даже к очень оригинальным выводам.[1] Но считать, что система Лобачевского в этой схеме разрешает вопрос о построении геометрии, что она имеет существенные преимущества перед системой Евклида и Лежандра, конечно, нельзя. Как уже сказано выше, проблема общего обоснования геометрии Лобачевским разрешена не была. Существенно только то, что в этих главах отобран и более тщательно, чем в „Геометрии", изложен материал собственно евклидовой геометрии.

Вторая часть „Новых начал" (главы VII-XI) содержит более подробную разработку неевклидовой геометрии Лобачевского,

[1] Автор настоящей статьи воспользовался определением плоскости, которое дано Лобачевским, в сочинении „Основания геометрии", ч. I, „Опыт обоснования евклидовой геометрии".

чем та, которая нашла себе место в мемуаре „О началах геометрии“. Достаточно сказать, что материал, который в первом мемуаре дается на семи страницах, здесь развернут почти на семидесяти. Это было первое сравнительно доступное изложение элементарной геометрии Лобачевского. Человек с математическим образованием, который подошел бы к этому мемуару без предвзятого недоверия, внимательно бы его прочел, приложил бы некоторый труд к его усвоению, несомненно мог бы его понять.

Третья часть сочинения (главы XII и XIII) посвящена специальной задаче: решению треугольников, прямолинейных и сферических в обыкновенной (употребительной) геометрии. Исследование здесь имеет вполне определенную цель — установить степень точности, которую дают логарифмические вычисления при решении треугольников, и вероятную ошибку, если исходные данные получены при многократных измерениях. Эта часть с геометрией почти не связана, она скорее относится к теории вероятностей; в несколько ином виде она была позже опубликована Лобачевским отдельно.

Таково содержание этого обширного сочинения. В первом издании оно занимает свыше четырехсот страниц. Как уже сказано, неевклидова геометрия изложена здесь более обстоятельно и понятно, чем в предыдущих работах. Но для того чтобы дойти до главы VII, где изложение ее начинается, нужно было затратить утомительный труд на прочтение первых шести глав, достоинства которых спорны и которые существенно новых идей не приносят. Читателей не нашлось. Нужно сказать, что рядовой читатель, конечно, не усвоил бы второй части (т. е. неевклидовой геометрии), а Остроградский и окружавшие его математики были предубеждены против всего, что выходило из-под пера Лобачевского. Но слишком глубока была вера Лобачевского в правильность и высокое значение своих идей, слишком сильна была его натура, чтобы признать положение безнадежным. Лобачевский решил сделать еще одну попытку привлечь внимание к своим исследованиям: он выпустил небольшую книгу „Геометрические исследования по теории параллельных линий“ на немецком языке, и тогда нашелся читатель, один во всем мире, который ее прочел и оценил. Это был Гаусс.

II. ОБЗОР СОЧИНЕНИЯ „ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ“

„Геометрические исследования по теории параллельных линий“ представляют собою небольшое сочинение, содержащее элементарное изложение начал неевклидовой геометрии, созданной Лобачевским. Оно было опубликовано Лобачевским в 1840 г. на немецком языке под названием „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der

Parallellinien“ и выпущено в свет в Берлине небольшой издательской фирмой Финке (G. Fincke). Брошюра напечатана в формате малой октавы и содержит 61 страницу.

Естественно возникает вопрос, каким образом эта брошюра попала в издательство Финке. Как случилось, что эта небольшая фирма приняла к изданию сочинение, содержание которого, если она с ним познакомилась, ни в каком случае не могло обещать значительного сбыта. Этим вопросом тщательно занимался профессор Лейпцигского университета Ф Энгель, выпустивший перевод работ Лобачевского „О началах геометрии“ и „Новые начала геометрии“ на немецком языке.[1] Однако концепция Энгеля мало убедительна. Он считает, что рукопись была передана издательству Финке профессором Казанского университета Эрнестом Кнорром, который с 1832 по 1846 г. занимал в нем кафедру физики и в 1840 г. был командирован за границу для приобретения физических приборов. Это предположение основано на письме Гаусса к известному астроному Энке, которое мы здесь воспроизводим в переводе, так как оно и помимо этого представляет интерес.

„Я начинаю читать по-русски довольно успешно и нахожу в этом большое удовольствие. Г-н Кнорре прислал мне небольшой мемуар Лобачевского (в Казани), написанный по-русски, и как этот мемуар, так и небольшая книжка о параллельных линиях на немецком языке (о ней появилась совершенно нелепая заметка в „Реперториуме“ Герсдорфа) возбудили во мне желание узнать больше об этом остроумном (geistreich) математике Как мне сказал Кнорре, в выходящих на русском языке «Записках Казанского университета» имеется много его работ“.

Концепция Энгеля заключается в том, что Гаусс спутал астронома Кнорре, жившего в Николаеве при отделении Пулковской обсерватории, с Казанским профессором Кнорром, который именно в 1840 г. был в Западной Европе. Не входя в подробности, заметим, что все это объяснение не заслуживает доверия. Очень мало вероятно, чтобы точный и аккуратный Гаусс в письме к астроному Энке спутал астронома же Кнорре с казанским физиком Кнорром. Мне кажется более вероятной следующая версия. Внимательно рассматривая известную книгу Загоскина,[2] я обнаружил, что в Казанском университете некоторое время состоял профессором по кафедре права И. А Финке. Правда, он умер гораздо раньше (1814), но семья его, в том числе сын и дочь, оставались в Казани; дочь вышла замуж за профессора Эйхвальда, следов которого мне, к сожалению, не удалось разыскать. Фамилия Финке не принадлежит к числу распространенных в Германии. Наиболее вероятно, что семья Финке связала Лобачев-

---

[1] F. Engel. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewskij. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem russischen übersetzt mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers. Leipzig, 1898.

[2] Н. П. Загоскин. История Казанского университета, т. I, Казань, 1902.

ского с издательством. Об этом см. также книгу: В. Ф. Каган. „Лобачевский“. Изд. АН СССР. М.—Л. 1944.

Существенно то, что по этой книге Гаусс познакомился с идеями Лобачевского и заинтересовался его работами. В библиотеке Гаусса после его смерти оказалось два экземпляра этой брошюры; второй, вероятно, был прислан самим Лобачевским. Между тем в том же 1840 г. в распространенном библиографическом издании, в так называемом „Репертгориуме Герсдорфа“,[1] появилась рецензия, текст которой приводим полностью.

„По утверждению автора, можно принять, не впадая в противоречие, что через данную точку к данной прямой можно провести две несовпадающие параллельные прямые и между этими двумя параллелями через ту же точку могут проходить прямые, которые не встречают данной прямой, не будучи ей параллельны, хотя и лежат с нею в одной плоскости. На таком основании автор желает построить свою собственную науку, которую он называет „воображаемой геометрией“. Основы этой науки изложены в настоящей брошюре; однако этот принцип и вытекающее из него предложение (стр. 21): «чем дальше продолжаем параллельные линии в сторону их параллелизма, тем более они приближаются одна к другой», достаточно характеризуют это небольшое сочинение и освобождают референта от необходимости дальнейшей его оценки“.

Рецензия подписана цифрой 140. Было бы весьма желательно выяснить, кто скрывается за этим своеобразным псевдонимом. Профессор Энгель сообщает, что все его попытки вскрыть этот псевдоним к цели не привели.

На замечание Гаусса в приведенном выше письме относительно этой рецензии читатель, вероятно, уже обратил внимание; неудивительно, что кроме него книжку Лобачевского в то время никто не прочитал. Но Гаусс оценил ее настолько высоко, что провел Лобачевского в члены „Гёттингенского ученого общества“, которое тогда (как и теперь) носило характер академии. Однако, верный принятому решению ничего в своих взглядах на основания геометрии не оглашать, Гаусс не обмолвился в печати ни единым словом ни о книге Лобачевского, ни о его идеях: человек критического ума, он хорошо понимал, что эти глубоко революционные взгляды вызовут целую бурю. Внимание Гаусса было, конечно, Лобачевскому большой поддержкой; но в отношении своих идей он все же оставался совершенно одиноким.

В 1866 г., вскоре после опубликования известной переписки Гаусса, обратившей внимание математического мира на сочинения Лобачевского. французский геометр Гуэль (G. J. Hoüel) перевел „Geometrische Untersuchungen“ на французский язык и опубликовал перевод в „Известиях Общества физических и естественных наук г. Бордо“, а затем известное издательство Gauthier—Villars в Париже выпустило его в свет отдельным изданием под на-

[1] Repertorium der gesammten deutschen Literatur. Herausgegeben von E. Gersdorf. Leipzig, 1840.

*

званием „Études géométriques sur la théorie des parallèles“.[1] В приложениях даны выдержки из переписки Гаусса с Шумахером. В 1895 г. этот французский перевод был переиздан той же фирмой.

В 1887 г. „Geometrische Untersuchungen“ были переизданы в Германии автотипическим способом.

В 1891 г. американский профессор Гальстед (G. B. Halsted), занимавший кафедру математики в Техасском университете, перевел „Geometrische Untersuchungen“ на английский язык, а Техасский университет выпустил этот перевод в свет под названием „Geometrical researches on the theory of parallels“ (Austin, 1891). В том же 1891 г. Техасским университетом было выпущено второе издание этого перевода, а в 1892 г. им были выпущены еще два издания, третье и четвертое, из которых последнее было целиком отослано в Японию. В 1914 г. этот перевод был переиздан в Чикаго (Open Court).

В 1868 г. в III т. журнала „Математический сборник“ появилась статья „О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского“. Автор, А. Л. Летников, подписавшийся А. Л-ов, в нескольких словах говорит о попытках доказательства евклидова постулата и о выявившемся после опубликования писем Гаусса значении трудов Лобачевского. Эта небольшая статья представляет несомненный интерес как первое, очень осторожное признание работ Лобачевского в России. За собственным текстом автора следует „Извлечение из переписки Гаусса с Шумахером“ и перевод „Geometrische Untersuchungen“ под заглавием „Геометрические изыскания о теории параллельных линий“. Перевод выполнен тщательно, в настоящее время несколько устарел; повидимому, он сделан не с оригинала, а с французского перевода Гуэля. Вся статья помещена во втором отделе журнала, в котором печаталась различного рода научная хроника; автор предназначает ее главным образом для преподавателей математики, которым она, конечно, не могла быть доступной. На всем тексте автора лежит печать сугубой осторожности в оценке трудов Лобачевского. Все это привело к тому, что статья осталась совершенно незамеченной; она не указана ни в одном из библиографических справочников по неевклидовой геометрии.

В 1886 г. Казанским университетом издан второй том „Полного собрания сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского“. Этот том содержит сочинения, опубликованные Лобачевским на иностранных языках. Он начинается сочинением „Geometrische Untersuchungen“. Сочинение напечатано готическим немецким

---

[1] N. I. Lobatschewsky. Études géométriques sur la théorie des parallèles suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Traduit par G. J. Hoüel „Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux“, 4, Bordeaux, 1866. Отдельное издание этого сочинения, Paris, Gauthier — Villars, 1866, 2-е изд. 1895.

шрифтом; оно содержит значительное число опечаток и мелких отступлений от оригинала.

Выходящий в настоящее время первый том „Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского“ содержит русский перевод сочинения, выполненный профессором В. Ф. Каганом и снабженный обстоятельным примечанием. Этот же перевод содержится в настоящем издании.

Обращаясь к содержанию „Геометрических исследований“, мы вновь начинаем со слов Гаусса.

„После того как я имел возможность рассмотреть это маленькое сочинение, — пишет Гаусс к Герлингу в письме, которое мы цитировали выше, — я должен высказать о нем весьма благоприятное суждение. В нем гораздо больше ясности и точности, чем в более крупных сочинениях Лобачевского“. И действительно, элементы неевклидовой геометрии изложены в этом небольшом сочинении с удивительным искусством. За сто лет, истекших со времени опубликования „Геометрических исследований“, идеи Лобачевского многообразно перекристаллизовались в умах многочисленных геометров, размышлявших над этими вопросами. Многие выводы в настоящее время упрощены, некоторые концепции иначе оформлены; часто иначе строится тригонометрия,[1] но синтетическое изложение начал неевклидовой геометрии этого типа и по настоящее время сохранило общую схему „Геометрических исследований“, подобно тому как построение начал обыкновенной геометрии и по сие время носит на себе отпечаток схемы Евклида. „Геометрические исследования“ представляют собой перл геометрического творчества и навсегда останутся образцом изложения своеобразных новых идей в элементарной форме. По „Геометрическим исследованиям“ с неевклидовой геометрией впервые познакомились математики конца шестидесятых и начала семидесятых годов прошлого столетия. Более того, математический мир фактически узнал о неевклидовой геометрии из опубликованного в 1865 г. после смерти Гаусса его письма к Шумахеру, в котором он обращает внимание последнего на „Геометрические исследования“ Лобачевского. Вот, в переводе, текст этого письма, относящийся к неевклидовой геометрии:

„В последнее время я имел случай вновь прочитать небольшое сочинение Лобачевского — «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Это сочинение содержит основания геометрии, которая должна бы существовать и строгое последовательное развитие которой должно было бы иметь место, если бы евклидова геометрия не была истинной. Некто Швейкарт назвал такую геометрию «звездной» (Astralgeometrie). Лобачевский называет ее «воображаемой геометрией».

Вы знаете, что я уже пятьдесят четыре года (с 1792 г.) имею те же убеждения (с некоторым позднейшим развитием их, на котором я здесь не хочу останавливаться); материально я, таким образом, не нашел для себя в сочинении Лобачевского ничего нового; но развитие предмета

[1] См. приложение: „Построение гиперболической геометрии после Лобачевского“.

следует другому пути, отличному от того, которым шел я, и выполнено Лобачевским мастерски, в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить ваше внимание на эту книгу, которая наверное доставит вам совершенно исключительное наслаждение".

По содержанию „Геометрические исследования" можно разбить на четыре части.

Первую часть составляет краткое введение и предложения 1—15; они содержат перечень важнейших предложений, не зависящих от постулата о параллельных линиях; одни из этих предложений нужно рассматривать как постулаты, другие — как теоремы, устанавливаемые без пособия V постулата. Этот перечень, конечно, не охватывает всех предложений так называемой „абсолютной геометрии"; Лобачевский ограничивается теми, которые ему наиболее необходимы для дальнейшего своеобразного развития геометрии. Нужно, однако, отметить, что этот перечень не исчерпывает тех предложений, на которые автор фактически опирается в дальнейшем тексте сочинения.

Вторую часть составляют предложения 16—25. Они содержат изложение теории параллельных линий в новом определении этого основного понятия. Здесь устанавливаются две гипотезы, одна из которых ведет к евклидовой (по Лобачевскому, „употребительной") геометрии, другая — к „воображаемой". В связи с этим устанавливается понятие об угле параллельности (функция $\Pi(x)$) и о связанной с этим зависимости между суммой углов треугольника и постулатом о параллельных линиях.

Третью часть составляют предложения 26—34. После необходимых подготовительных предложений здесь устанавливаются понятия о предельной линии и предельной поверхности и доказывается основная теорема, что геометрия предельной поверхности формально совпадает с евклидовой планиметрией.

Четвертую часть составляют предложения 35—37; они содержат неевклидову тригонометрию и вывод основного соотношения:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-x/k}.$$

Из этого краткого обзора мы видим, что „Геометрические исследования" не охватывают всей элементарной геометрии так называемого гиперболического пространства. Мы не находим здесь даже развернутого учения о расположении прямых и плоскостей; нет вывода длины окружности, площади круга, нет даже учения о площадях прямолинейных фигур, отличающегося такой простотой. В заключительных абзацах Лобачевский отсылает для ознакомления с этими вопросами к другим своим сочинениям. Цель этого сочинения совершенно ясна: Лобачевский хочет дать такое введение в „воображаемую геометрию", которое сделало бы внимательному читателю доступным изучение остальных, более глубоких, труднее изложенных его сочинений. И эта цель Лобачевским вполне достигнута. Когда, благодаря посмертному указанию Гаусса, возник интерес к неевклидовой геометрии, ее долгое время изучали прежде всего по „Геометрическим исследованиям".

Совершенно несомненно, что и в настоящее время изучение сочинений Лобачевского в подлиннике наиболее целесообразно начинать с „Геометрических исследований": это — ключ к остальным его сочинениям.

При всей сравнительной элементарности изложения „Геометрических исследований" это сочинение все же сохраняет немало рассуждений, которые могут оказаться трудными для читателя, еще не усвоившего своеобразных идей неевклидовой геометрии. Чтобы облегчить усвоение идей и чтение сочинения, к нему даны примечания, помещенные частью в виде сносок под текстом, частью после текста. В сносках помещены пояснительные примечания, которые должны содействовать непосредственному уяснению замысла, определений и рассуждений автора. После текста помещены более обширные примечания, которые содержат сопоставление рассуждения Лобачевского с более поздними приемами развития этих идей, исторические и историко-критические справки. Чтобы сделать более легким усвоение этого сочинения, оно разбито на части с указанием содержания каждой из них. Читатель должен иметь в виду, что это разбиение принадлежит комментатору, а не автору; аналогичное же разбиение произведено комментаторами Лобачевского, издававшими его сочинения в переводах на другие языки.

III. ИССЛЕДОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Под чьим влиянием строил Лобачевский свою новую теорию параллельных линий, а вместе с тем и всю свою „воображаемую" геометрию? Неевклидова геометрия имела продолжительную предысторию,[1] но Лобачевский ее не знал. Работы Саккери, Ламберта, Швейкарта, Тауринуса, можно сказать, никому не были известны; их имена всплыли гораздо позже. Лобачевский был, конечно, знаком с попытками доказательства постулата, пользовавшимися известностью; но уже в 1823 г. он хорошо знал им цену. Был, однако, один геометр, который в течение многих лет размышлял над теорией параллельных линий, к рассуждениям которого внимательно прислушивались. Это был Лежандр. Его взгляды, доказательства, соображения были широко известны по двум причинам. Во-первых, это был один из величайших геометров своего времени; во-вторых, его взгляды, доказательства

[1] См. мою книгу „Лобачевский", гл. XXIV „Предистория неевклидовой геометрии". Изд. АН СССР. М.—Л. 1944.

и соображения в различных вариантах и разработках излагались в двенадцати изданиях его „Начал“ геометрии, вышедших при его жизни, получивших очень широкое распространение в Европе; это было первое учебное руководство, о котором можно было сказать, что оно действительно сменило в школе „Начала“ Евклида.[1] В конце жизни Лежандр составил мемуар, объединивший все его попытки доказать постулат о параллельных линиях, и опубликовал его уже в год своей смерти под заглавием „Размышления о различных способах доказать теорию параллельных линий или теорему о сумме углов треугольника“.[2]

„Начала“ Лежандра были выпущены в русском переводе в 1819 г., т. е. в те годы, когда Лобачевский уже усиленно размышлял над теорией параллельных линий; но он несомненно был знаком с этим сочинением в оригинале в различных его изданиях, так как оно было и в России широко распространено. Уже в своем мемуаре „Воображаемая геометрия“ (1835) Лобачевский ссылается на мемуар Лежандра от 1833 г., а во вступлении к „Новым началам геометрии“ (1836) он подробно останавливается на разборе рассуждений Лежандра; с упоминания о Лежандре начинаются и „Геометрические исследования“. Если к этому прибавить, что из других геометров, занимавшихся теорией параллельных линий, Лобачевский лишь один раз вскользь упоминает о женевском математике Л. Бертране, сопоставляя и его рассуждения с соображениями Лежандра, то становится ясным, что Лежандр был единственным геометром, оказавшим влияние на Лобачевского при построении его теории параллельных линий. И влияние это несомненно было велико: учение о сумме углов треугольника в ее связи с теорией параллельных линий в „Геометрических исследованиях“ явно несет на себе печать рассуждений Лежандра. Чтобы читатель мог проследить истоки „Геометрических исследований“, было бы весьма целесообразно поместить здесь перевод всего мемуара Лежандра, но он очень велик. Мы излагаем поэтому основное содержание мемуара, не уклоняясь от хода рассуждений самого Лежандра, передавая его в наиболее существенных частях с особенной точностью. Для оценки же его доказательств мы приводим соображения Лобачевского и Гаусса.

Постановка задачи

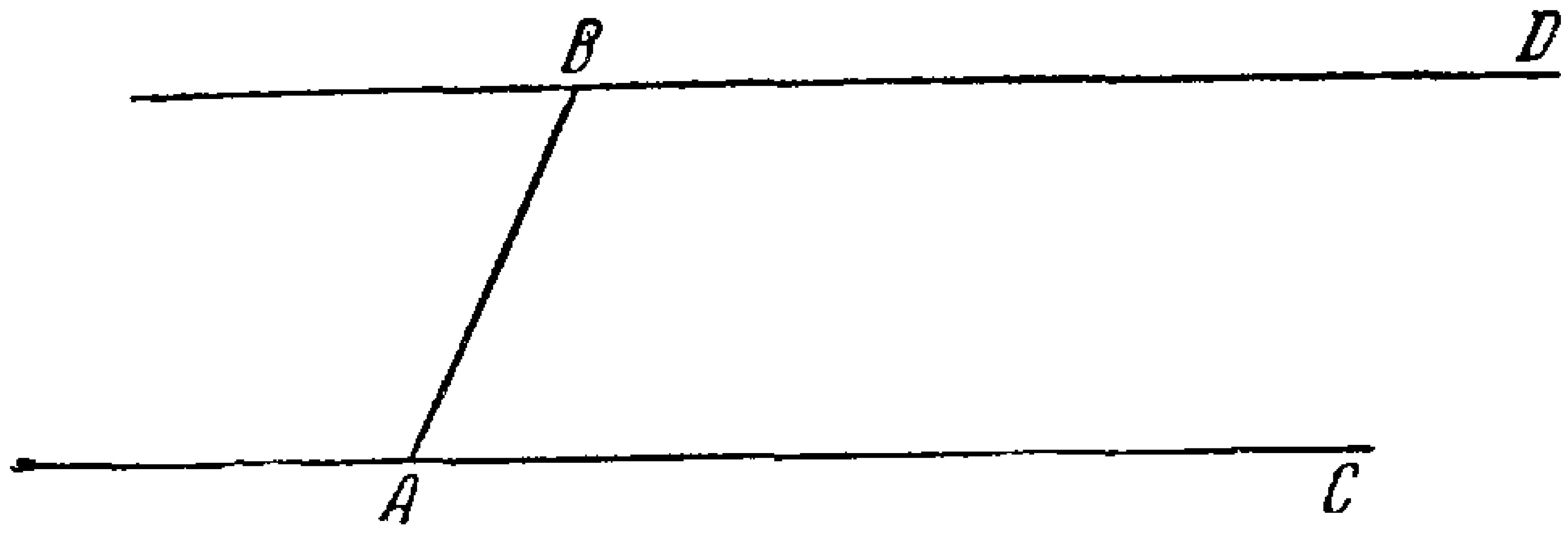
Лежандр начинает свой мемуар со следующих элементарных соображений.

---

[1] A. M. Legendre (1752—1833). Eléments de géométrie. Paris, 1794. 2-е изд. 1796; 3-е 1800; 4-е 1802; 5-е 1804; 6-е 1806; 7-е 1808; 8-е 1809; 9-е 1812; 10-е 1813; 11-е 1817; 12-е 1823. Немецкий перевод появился в 1822 г., английский — в 1824 г.

[2] A. M. Legendre. Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. — Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France. T. XII, 1833.

Если две прямые AC и BD (черт. 1), расположенные в одной плоскости, образуют с третьей прямой внутренние односторонние углы, сумма которых равна $2d$, то эти прямые не могут встретиться, сколь бы далеко мы их ни продолжали: доказать это очень легко. Но это дает лишь очень неполные сведения о свойствах параллельных линий, если не доказано обратное предложение, т. е. если не установлено, что всякий раз, когда двѐ прямые параллельны, они при пересечении третьей прямой неизбежно образуют внутренние односторонние углы, сумма которых равна $2d$; иными словами, если при такой конфигурации сумма углов $\angle CAB$ и $\angle ABD$ отлична от $2d$, то эти две прямые при достаточном продолжении в ту или другую сторону неизбежно пересекаются.[1] Вот это предложение с древних времен привлекало внимание геометров. Повидимому, еще до Евклида бесплодно искали удовлетворительного доказательства „доста-



Черт. 1.

точно простого“, — добавляет Лежандр, — чтобы его можно было поместить в «Началах геометрии». Евклид был вынужден допустить то, чего он не был в состоянии доказать. Это и составляет содержание знаменитого постулата или аксиомы о параллельных линиях; он выражен у Евклида следующим образом.

Если прямая пересекает две другие прямые таким образом, что сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$, то эти прямые при достаточном продолжении встречаются и именно с той стороны, с которой сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$.

Исходя из этого постулата, уже чрезвычайно просто построить учение о параллельных линиях и о сумме углов треугольника. Эти две теории настолько тесно между собой связаны, что доказательство предложений одной непосредственно влечет за собой доказательство другой. Но вопрос всегда заключается в том, чтобы вовсе избежать постулата, чтобы построить все учение

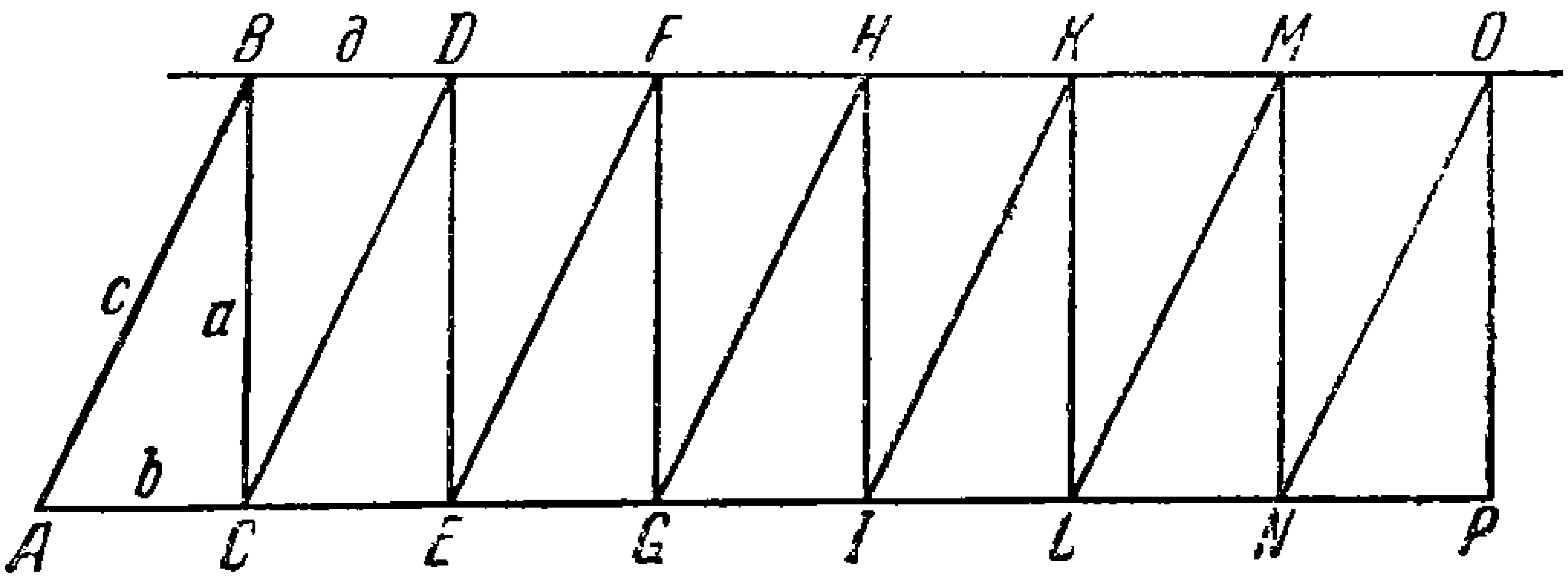
---

[1] Строго говоря, слова „при достаточном продолжении“ излишни, так как речь идет ведь не о прямолинейных отрезках, а о двух прямых, которые по самому определению прямой бесконечны. Однако это дополнение, идущее от Евклида и сохраненное Лежандром как некоторое напоминание, обычно повторяется и в современных сочинениях.

о параллельных линиях и о сумме углов треугольника, не прибегая ни к какому добавочному допущению. После продолжительных попыток непосредственно доказать теорему о сумме углов треугольника Лежандру удалось обнаружить, что сумма эта не может превышать $2d$. Доказательство этого предложения было им помещено в 3-м издании его „Начал“. Приводим это доказательство.

Первая теорема Лежандра

Теорема А. *Сумма двух углов треугольника не может превышать* $2d$. Доказательство ведется от противного. Допустим, что в треугольнике ABC (черт. 2) сумма внутренних углов превышает $2d$. На продолженной стороне AC отложим отрезок $CE = AC$, затем построим угол ECD, равный CAB, и на его



Черт. 2.

стороне CD отложим отрезок $CD = AB$; наконец, точку D соединим с E и B прямыми DE и DB. Треугольник CDE будет равен треугольнику ABC, потому что они имеют по равному углу, содержащемуся между соответственно равными сторонами; следовательно, $\angle CED = \angle ACB$, $\angle CDE = \angle ABC$, и третья сторона ED равна третьей стороне BC первого треугольника.

Так как ACE есть прямая линия, то сумма трех углов ACB, BCD и DCE равна $2d$. С другой стороны, мы предположили, что сумма углов треугольника ABC больше $2d$; следовательно,

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA > \angle ACB + \angle BCD + \angle DCE;$$

отбрасывая от обеих частей общий угол ACB и равные углы CAB и ECD, получим $\angle ABC > \angle BCD$; поскольку стороны AB, BC треугольника ABC равны сторонам CD, CB треугольника BCD, следует, что третья сторона AC больше третьей стороны BD.

Представим себе теперь, что прямая AE неограниченно продолжена и что на этом продолжении построены конгруэнтные треугольники CDE, EFG, GHI, ... Если соединим также соседние вершины прямыми BD, DF, FH, HK, то получим ряд промежуточных треугольников BCD, DEF, FGH, ..., которые также будут равны между собой, так как будут иметь попарно по две равные стороны и равные углы между ними. Следовательно, $BD = DF = FH = HK = \ldots$

Имея это в виду, обозначим, как обыкновенно, через a, b, c стороны треугольника ABC, через ∂ отрезок BD и через r разность $b - \partial$. Если примем, что от точки A до P помещено n треугольников, равных ABC, то ломаная $ABDFH\ldots\ MOP$ имеет длину $a + c + (n-1)\partial$; прямолинейный же отрезок $ACE\ldots P$ имеет длину nb. Поэтому

$$a + c + (n-1)\partial > nb, \quad \text{т. е.} \quad a + c - b > (n-1)r.$$

При увеличении n, которое мы можем взять сколь угодно большим, левая часть этого неравенства сохраняет постоянное значение, правая же неограниченно возрастает; при достаточно большом n, оно, таким образом, не может иметь места; сделанное допущение поэтому неправильно.

Очень любопытно, что к тому же доказательству этого предложения пришел и Гаусс. Оно в сжатом виде обнаружено в наследии Гаусса на обложке принадлежавшего ему экземпляра „Начал" Евклида с пометкой: „найдено 18/XI 1828 г."[1] Между тем оно уже было опубликовано Лежандром в 3-м издании его „Начал" в 1800 г. То же доказательство воспроизведено Лобачевским (1835) в „Новых началах геометрии" (ст. 90) с указанием, что оно принадлежит Лежандру.

Дальнейшие поиски

Установив это первое предложение, Лежандр старался доказать, что сумма углов треугольника не может также быть меньше $2d$.

„Мы должны, однако, сознаться, — говорит он, — что доказательство этого второго предложения представило нам затруднения, преодолеть которые мы не были в состоянии, хотя принцип доказательства был хорошо известен. Это побудило нас в 9-м издании возвратиться к системе Евклида; позже в 12-м издании мы дали доказательство другого рода. Как эти, так и многие другие соображения оставляли мало надежды найти такое доказательство теории параллельных линий или теоремы о сумме углов треугольника, которое могло бы найти себе место в элементарном учебнике геометрии.

Между тем не менее достоверно, что теорема о сумме трех углов треугольника должна быть рассматриваема как одна из тех фундаментальных истин, оспаривать которые невозможно и которые представляют пример неизменно пребывающей достоверности математических истин; эту достоверность мы постоянно обнаруживаем при наших изысканиях, и подобия такой точности нельзя найти ни в какой другой области человеческого знания. Не подлежит сомнению, что безуспешность всех попыток вывести эту теорему[2] из одних только наших сведений об условиях равенства треугольников, содержащихся в I книге Евклида, имеет свой источник в несовершенстве нашей повседневной речи и в трудности дать хорошее определение прямой линии".

---

[1] Gauss, Werke, т. VIII, стр. 190.
[2] О сумме углов треугольника.

Лобачевский отверг эти утверждения.

„К несовершенству в теории параллельных линий, — говорит он («Новые начала», вступление), — надобно было причислить определение самой параллельности. Однакож это несовершенство нисколько не зависело, как подозревал Лежандр, от недостатка в определении прямой линии, ни даже от тех недостатков, прибавлю, которые скрывались в первых понятиях, и которые намерен я здесь указать и попытаться, сколько могу сам, их исправить“.

Но дело и не в том, что теорема о сумме углов прямолинейного треугольника представляет собой незыблемую истину, как это утверждает Лежандр; эту именно истину Лобачевский полностью отрицает; это составляет основу построенной им новой геометрии. Самая мысль о том, что теорема о сумме углов треугольника (о том, что она равна двум прямым) может быть оспариваема, как мы видим из предыдущей цитаты, мелькала у Лежандра; но он ее категорически отверг как недопустимую. Вот что по этому поводу пишет Лобачевский в том же вступлении к „Новым началам“.

„Даже нахожу, что Лежандр несколько раз попадал на ту дорогу, которую выбрал я так удачно; но вероятно предубеждение в пользу принятого всеми положения заставило на каждом шагу спешить заключением или дополнять тем, чего бы нельзя было допускать еще в новом предположении“.

Принцип однородности

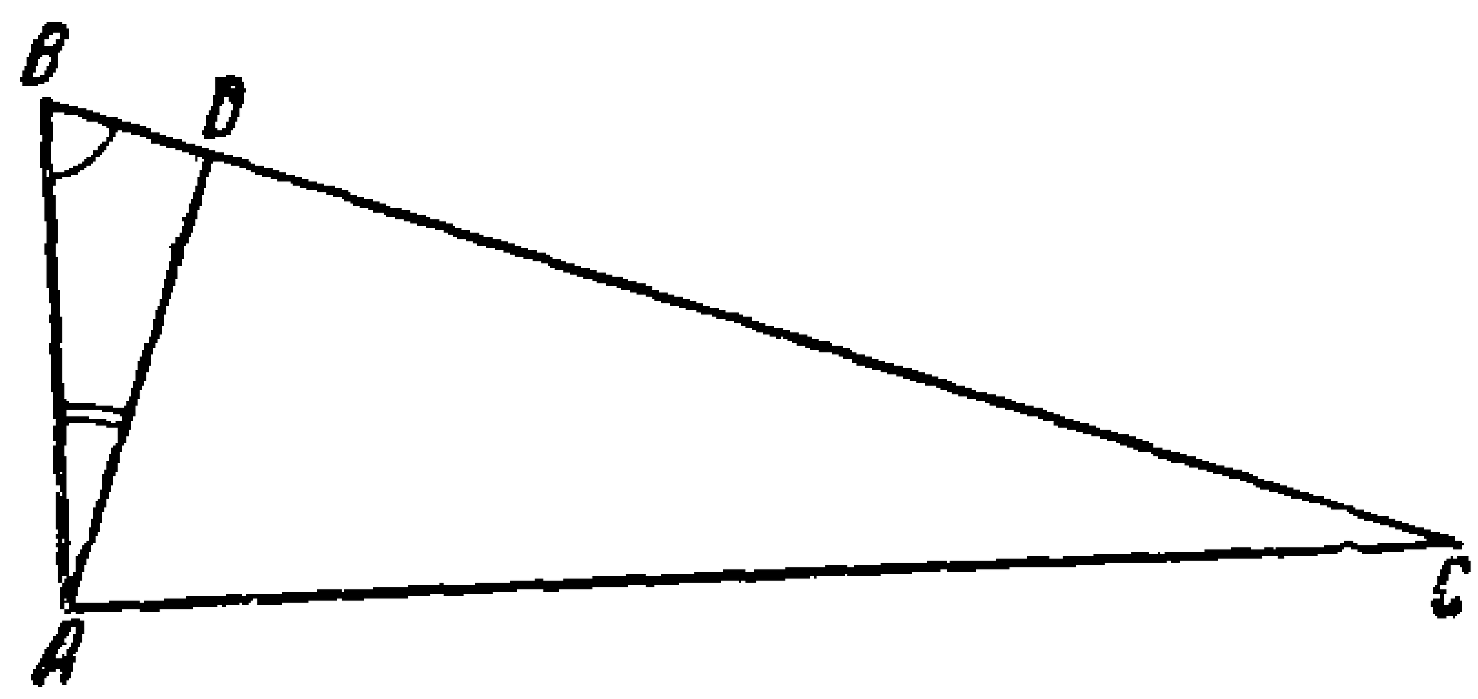
Лежандр переходит к доказательству теоремы о сумме углов треугольника, основанному на другом принципе. Вот в чем заключается это доказательство. Обозначим, как обыкновенно, через a, b, c — стороны, через A, B, C — углы треугольника. Тогда ясно, что угол C определяется двумя другими углами A и B и противолежащей стороной c, потому что элементами A, B и c определяется и самый треугольник. Следовательно, C представляет собой функцию A, B и c. Лежандр выражает это положением:

$$C=\varphi(A, B, c). \tag{1}$$

Лежандр утверждает теперь, что функция φ от переменной c вовсе не зависит. В самом деле, если бы функция φ зависела от c, то из предыдущего уравнения можно было бы определить c в функции от A, B и C

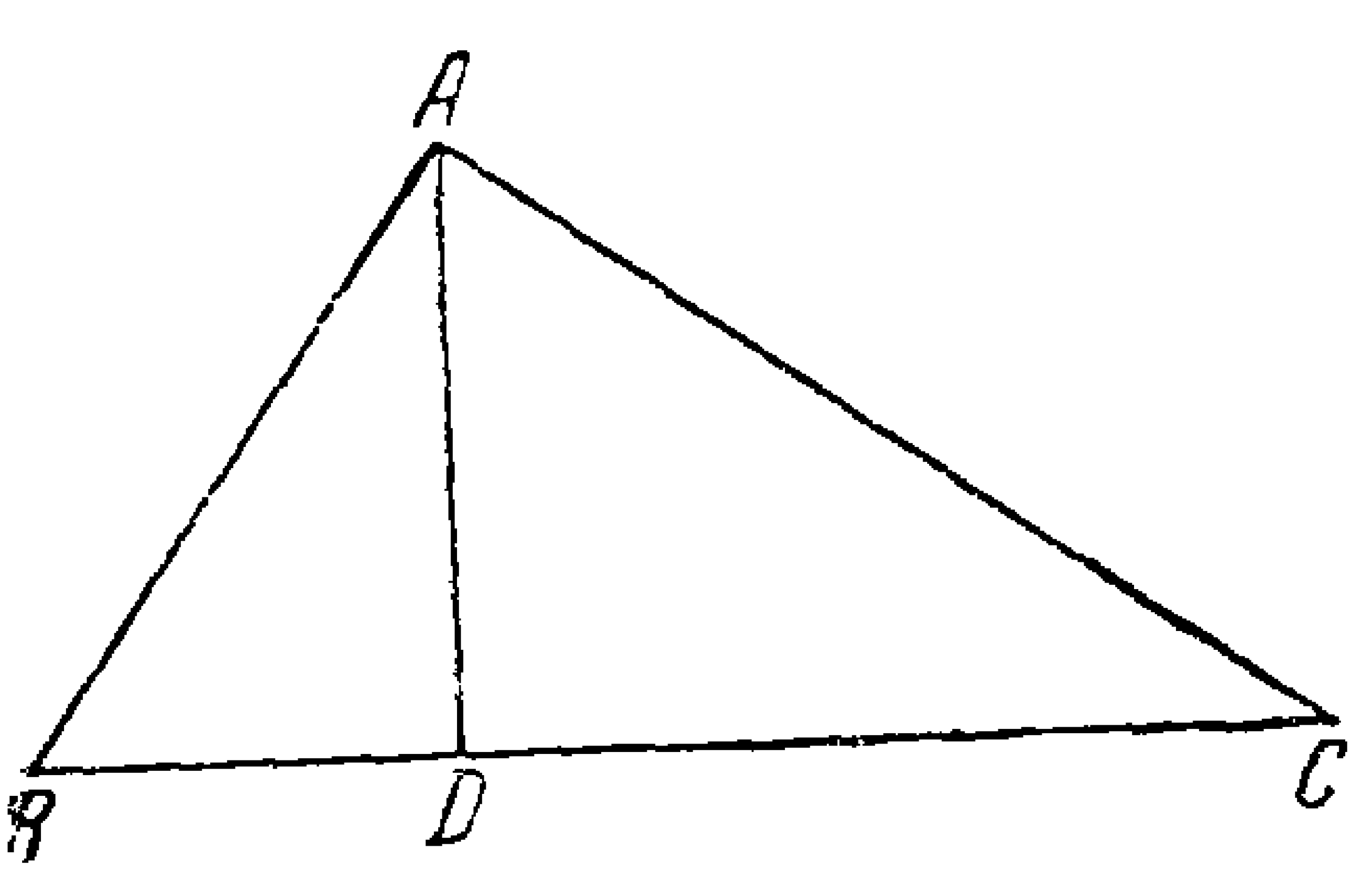
$$c=\psi(A, B, C), \tag{2}$$

т. е., замечает Лежандр, мы получили бы, что „c равно числу, что абсурдно“. Ниже он подробно выясняет, почему он считает такой результат абсурдным; по существу же дело сводится к следующему. Числа A, B, C, выражающие углы треугольника, зависят только от выбора единицы углов, а следовательно, правая часть равенства (2) численно определена, коль скоро выбрана единица для измерения углов, и совершенно не зависит от выбора единицы длины; левая же зависит только от выбора единицы длины. Равенство поэтому не может существовать, им нарушается „принцип однородности". Если, например, за единицу для измерения углов выбран прямой угол и числа A, B, C получают значения, при которых правая часть равенства (2) имеет, скажем, значение 12, то совершенно не ясно, равна ли сторона c 12 сантиметрам, километрам, ярдам и т. п.



Черт. 3.

Лежандр приходит таким образом к заключению, что равенство (1) принимает вид $C = \varphi(A, B)$, т. е. что два угла треугольника определяют третий. Однако на основе этого результата уже не трудно доказать, что сумма углов треугольника равна $2d$. В самом деле, предположим сначала, что наш треугольник прямоугольный, имеет прямой угол при вершине A (черт. 3). Из вершины прямого угла A опустим перпендикуляр AD на гипотенузу. Он разобьет треугольник на два прямоугольных треугольника ABD и ACD. Так как два угла треугольника определяют третий, то в прямоугольном треугольнике каждый из острых его углов определяет второй острый угол. Поэтому в прямоугольных треугольниках ABD и CBA, имеющих общий угол ABD, другие два острых угла BAD и BCA равны между собой; из таких же соображений вытекает, что угол CAD равен углу ABD. Вследствие этого сумма углов $B + C$ треугольника ABC равна углу BAC, т. е. составляет прямой угол; сумма же трех углов прямоугольного треугольника всегда равна $2d$.



Черт. 4.

Но в таком случае и во всяком треугольнике ABC сумма внутренних углов равна $2d$. В самом деле, пусть A (черт. 4) будет наибольший угол этого треугольника; опустив из вершины A перпендикуляр AD на основание BC, мы разобьем наш треугольник на два прямоугольных треугольника. В каждом из них сумма внутренних углов равна $2d$; следовательно, сумма внутренних углов обоих треугольников составляет $4d$; отбросив же углы при точке D, получим, что в исходном треугольнике ABC сумма внутренних углов равна $2d$.

Лежандр считает это доказательство безукоризненным; его смущает только, что его аналитический характер делает его непригодным для элементарного учебника. Иначе, однако, отнесся к этому Гаусс. На запрос Герлинга о пригодности этого доказательства Гаусс в письме от 11 IV 1816 г.[1] отвечает, что никакой доказательной силы он в рассуждении Лежандра не усматривает. Дело в том, что в уравнении (1) функция φ может зависеть еще от какого-либо постоянного отрезка m, который может входить таким образом, что уравнение (1) принимает вид

$$C=\varphi\left(A,\ B,\ \frac{c}{m}\right),$$

откуда

$$\frac{c}{m}=\psi(A,\ B,\ C), \tag{3}$$

и никакой несообразности не получается: левая часть, так же как и правая, не зависит от выбора единицы длины, однородность не нарушена. Так именно это имеет место в сферической геометрии; если a, b, c, A, B, C суть стороны и углы сферического треугольника, то здесь три угла определяют стороны треугольника; соотношение (1) имеет место, однако, в предположении, что a, b, c выражают стороны треугольника в угловой мере; если же под a, b, c разуметь длины сторон, то в уравнении (1) сферической геометрии нужно заменить c через $\frac{c}{r}$, где r — радиус круга, и уравнение принимает вид (3), как указывает Гаусс. Лобачевский в „Новых началах" также возражает против этого доказательства Лежандра. Он говорит во „Вступлении":

„В теории параллельных думали принять еще за основание, что в треугольниках углы должны зависеть от содержания сторон. С первого раза такое положение кажется столько же простым, сколько необходимым; но когда вникаем в наши понятия, откуда берет оно свое начало, то принуждены называть его также произвольным, как и все другие, к которым до сих пор прибегали".

При настойчивых своих утверждениях, что все предложенные им доказательства правильны, Лежандр несомненно полной уверенности в этом не имел. Он заменяет одни доказательства другими, сопровождает их вычислениями. Вот что об этом говорит Лобачевский в том же „Вступлении".

„Лежандр хотя назвал свое доказательство совершенно строгим, но сам, вероятно, думал иначе, прибавив оговорку, что затруднение, если б какое встретилось, всегда может быть отклонено. С этой целью прибегает он к вычислениям, основанным впрочем на первых известных уравнениях прямолинейной тригонометрии, которые следовало бы наперед еще поверить и которые в этом уже случае ни к чему не служат и ни к какому заключению не ведут".

Вторая теорема Лежандра

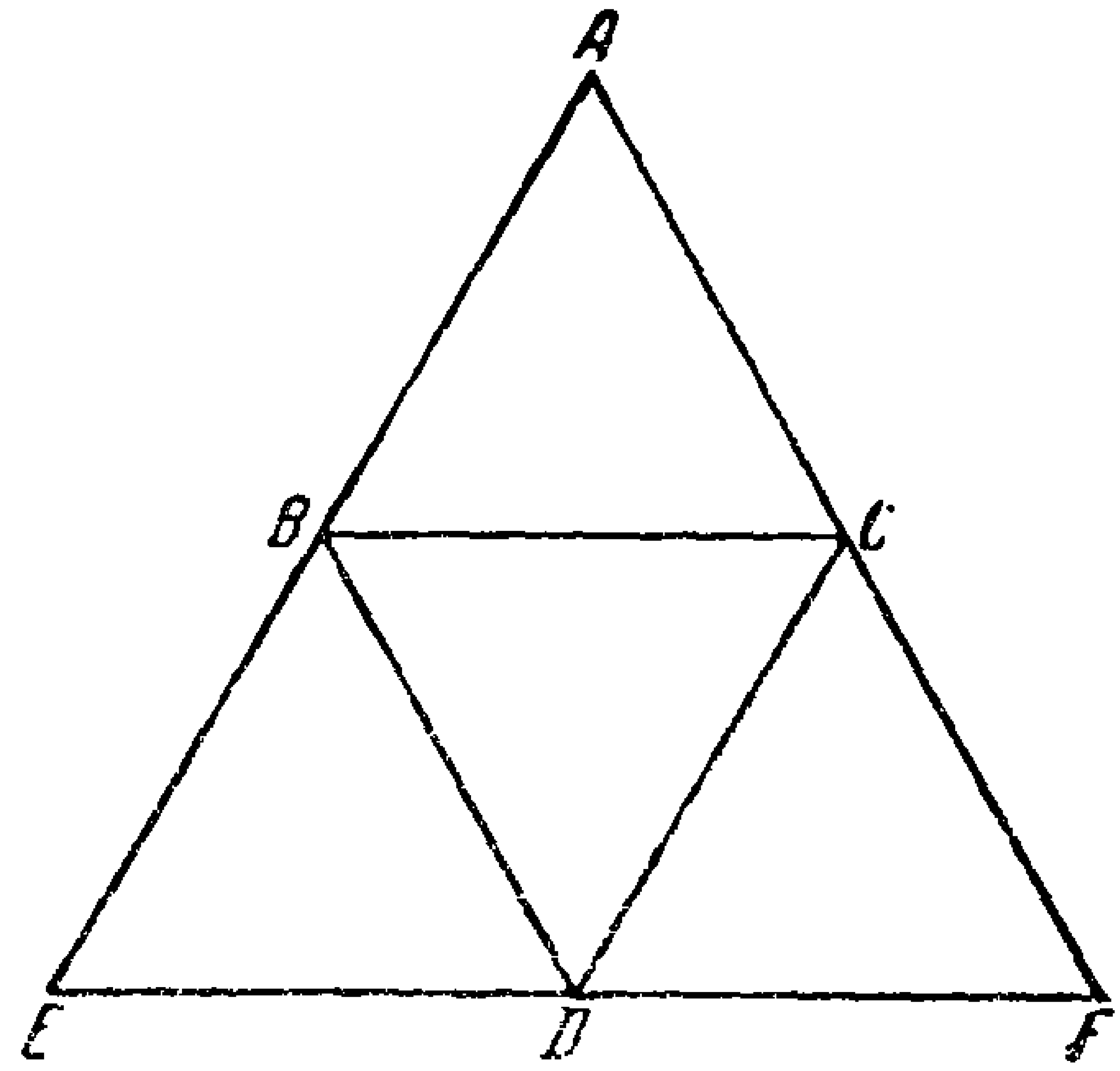
В процессе поисков Лежандр установил еще одну теорему, доказательство которой действительно не вызывает никаких сомнений.

---

[1] Gauss, Werke, т. VIII, стр. 167.

Теорема. *Если существует хотя бы один треугольник, в котором сумма внутренних углов равна двум прямым, то из этого надлежит заключить, что во всяком треугольнике сумма внутренних углов также равна двум прямым.*

Доказательство. Пусть ABC будет данный треугольник, в котором сумма трех углов равна двум прямым (черт. 5). Покажем, что можно построить треугольник с тем же углом A, но с удвоенными сторонами, его заключающими, в котором сумма внутренних углов также будет равна двум прямым. В самом деле, при стороне BC и вершине C построим угол BCD, равный углу CBA, отложим отрезок $CD = AB$ и соединим точки B и D. Получим треугольник BCD, равный треугольнику CBA, так как они имеют общий угол, содержащийся между соответственно равными сторонами. Следовательно, $\angle BDC = A$, $\angle CBD = \angle BCA$, а вместе с тем равны также стороны BD и AC. Теперь на продолжении сторон AB и AC отложим отрезки $BE = AB$ и $CF = AC$. Легко видеть, что отрезки DE и DF расположены на одной прямой. В самом деле, три угла ABC, CBD, DBE составляют вместе два прямых; а так как по условию три угла ABC, BAC, BCA также составляют два прямых угла, то



Черт. 5.

$$\angle ABC + \angle CBD + \angle DBE = \angle ABC + \angle BAC + \angle BCA.$$

Отбрасывая от обеих частей равенства общий угол ABC и равные углы CBD и BCA, получим $\angle DBE = \angle BAC$. Совершенно так же мы найдем, что при вершине C $\angle DCF = \angle BAC$.

Установив это, сравним треугольник BDE с треугольником ABC; они также содержат один и тот же угол, заключенный между равными сторонами, именно: $\angle DBE = \angle CAB$, $BD = AC$ и $BE = AB$. Треугольники равны и, следовательно, $\angle BDE = \angle ACB$.

Таким же образом докажем, что треугольник DCF равен треугольнику BAC и что поэтому $\angle CDF = \angle ABC$.

Отсюда вытекает, что сумма трех углов вокруг точки D, именно $\angle BDE + \angle BDC + \angle CDF$, равна сумме трех углов треугольника ABC и, следовательно, равна двум прямым. Поэтому EDF есть прямая линия, и она образует со сторонами AE и AF треугольник AEF. Теперь в треугольнике AEF $\angle E = \angle B$ треугольника ABC, таким же образом $\angle F = \angle C$ треугольника ABC.

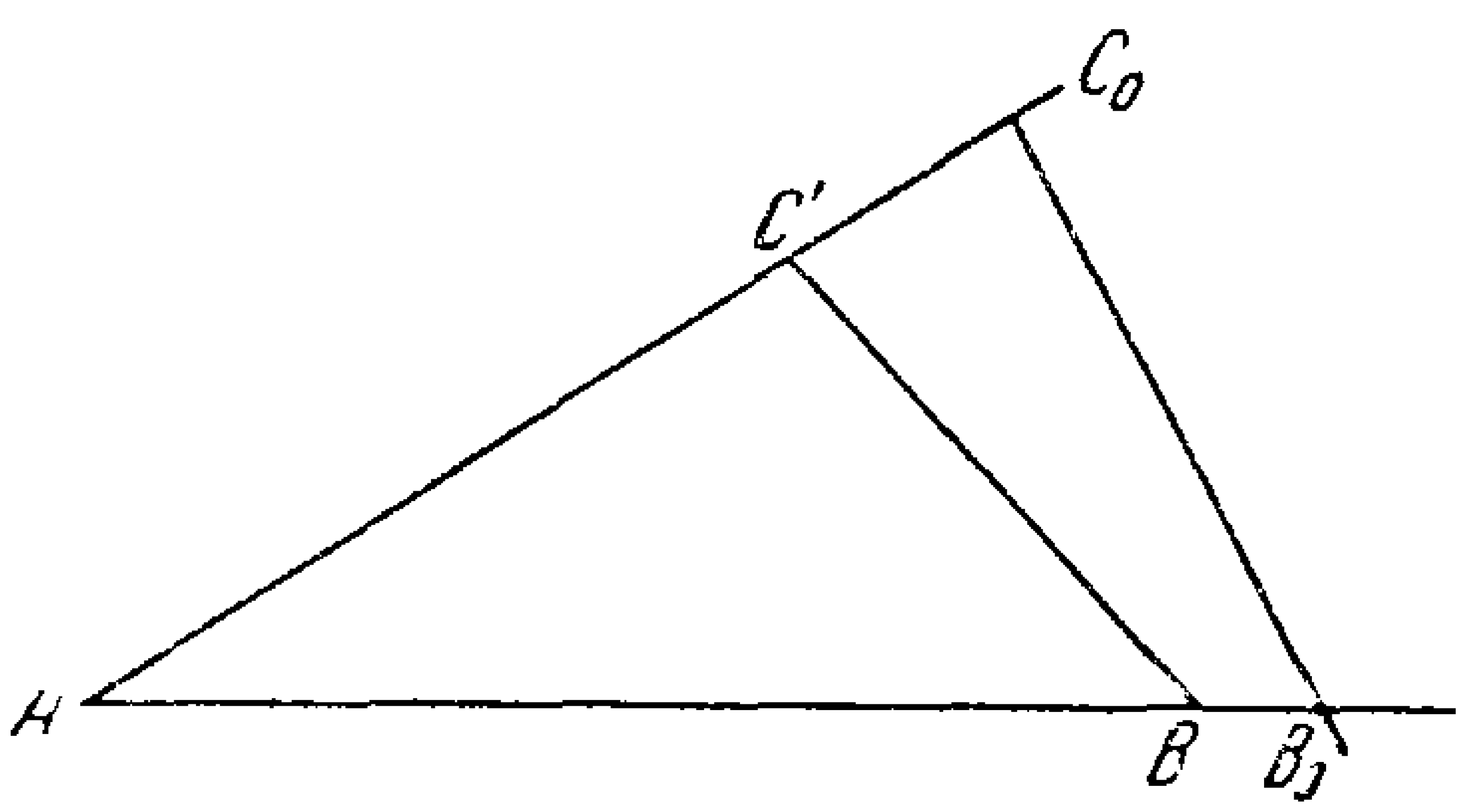
Следовательно, сумма трех углов треугольника AEF равна сумме трех углов треугольника ABC, т. е. равна двум прямым.

Исходя от треугольника AEF, мы таким же образом построим новый треугольник, сохраняя в нем угол A и удваивая стороны AE и AF, сумма же углов в этом треугольнике также будет равна двум прямым.

Повторяя это построение достаточное число раз, мы можем получить треугольник с тем же углом A и с той же суммой углов ($2d$), в котором, однако, стороны, заключающие угол A, превзойдут любые наперед заданные отрезки.

Чтобы использовать этот результат нам, однако, понадобится еще следующая лемма

Лемма. *Если в каком-либо треугольнике сумма углов равна двум прямым, то и во всяком треугольнике, от него отсеченном, сумма углов также равна двум прямым.*



Черт. 6

Легче всего это доказывается в том случае, когда отсечение производится трансверсалью, т. е. секущей, проходящей через вершину треугольника. В самом деле, положим, что в треугольнике ABC (черт. 4) сумма углов равна двум прямым, а трансверсаль AD разбивает его на два треугольника ABD и ACD. В таком случае в каждом из составляющих треугольников сумма углов равна двум прямым, так как в обоих треугольниках она составляет четыре прямых, и если бы она в одном треугольнике была меньше двух прямых, то она в другом неизбежно была бы больше двух прямых, что противоречит первой теореме Лежандра. Это рассуждение мы в сущности уже приводили выше

Если треугольник ADE отсечен не трансверсалью, а другой секущей DE, то, проведя диагональ AD, получим треугольник ADB, отсеченный от ABC трансверсалью и, следовательно, в нем сумма углов была бы равна двум прямым; треугольник же ADE вновь отсечен от него трансверсалью, а потому имеет сумму углов, равную двум прямым.

Теперь мы уже можем перейти к доказательству формулированной выше второй основной теоремы Лежандра. Допуская, что в треугольнике ABC сумма углов равна $2d$, обратимся к любому треугольнику $A'B'C'$, однако сначала к такому, в котором $\angle A = \angle A'$. Покажем, что и в нем сумма углов равна $2d$. С этой целью построим треугольник AB_0C_0 с той же суммой углов, в котором $\angle A$ совпадает с углом BAC (черт. 6), но $AB_0 > A'B'$, а $AC_0 > A'C'$. На стороне AB_0 отложим отрезок $A\overline{B}'$, равный отрезку $A'B'$, а на стороне AC_0 — отрезок $A\overline{C}' = A'C'$ Получим треугольник $A\overline{B}'\overline{C}'$ (на чертеже он обозначен просто $AB'C'$), равный треугольнику $A'B'C'$. Но в силу доказанной леммы сумма углов треугольника $A'\overline{B}'\overline{C}'$ равна двум прямым.

Остается обнаружить, что в том случае, когда в треугольнике ABC сумма углов равна двум прямым, она равна двум прямым также в любом другом треугольнике $A'B'C'$. Сопоставляя углы A', B', C' второго треугольника соответственно с углами A, B, C, мы должны заключить, что по крайней мере один из углов A', B', C' меньше соответствующего угла A, B, C или равен ему. В самом деле, если бы было $A' > A$, $B' > B$, $C' > C$, то сумма углов треугольника $A'B'C'$ превосходила бы два прямых, что противоречит первой теореме Лежандра. Положим поэтому, что $A' < A$. Проведем тогда внутри угла BAC первого треугольника трансверсаль AD, образующую с AB угол BAD, равный A'. Если эта трансверсаль встретит сторону BC в точке D, то, согласно доказанному, в треугольнике BAD сумма углов будет равна двум прямым (лемма), а вследствие этого она равна двум прямым и в треугольнике $A'B'C'$ (случай, уже рассмотренный).

Установление двух основных теорем составляет главную заслугу Лежандра. Лобачевскому обе эти теоремы также были нужны; он доказывает их в „Геометрических исследованиях“ (предложения 19 и 20) несколько иначе, но печать рассуждений Лежандра на его доказательствах явно лежит.

Другое доказательство теоремы о сумме углов треугольника

Лежандра наиболее удовлетворяло доказательство, основанное на принципе однородности; однако он считал, что оно недоступно учащимся, и предложил другое доказательство, опирающееся на две строго доказанные теоремы. Доказательство это заключается в следующем. В виду установленных двух теорем остается обнаружить, что ни в одном треугольнике сумма углов не может быть меньше $2d$. Допустим, что в треугольнике ABC (черт. 5) сумма углов меньше $2d$. Повторим построение, выполненное выше (стр. 33), т. е. при стороне BC построим треугольник BCD, равный ABC, но так, чтобы $\angle BCD = \angle ABC$ и $\angle DBC = \angle ACB$ Через вершину D этого треугольника проведем прямую EF так, чтобы она встречала стороны угла BAC в точках E и F. Обозначим через S сумму внутренних углов треугольника ABC; согласно сделанному допущению $S = 2d - \varepsilon$, где ε — положительный угол. Ту же сумму углов имеет треугольник DBC. Что касается треугольников EBD и FCD, то мы можем только утверждать, что в каждом из них сумма углов (в силу второй теоремы) меньше $2d$; обозначим эти суммы через $2d-\gamma$ и $2d-\delta$. Следовательно, во всех четырех треугольниках сумма углов составляет $8d-2\varepsilon-\gamma-\delta$. Отбросив углы при точках B, C, D, найдем, что сумма внутренних углов треугольника EAF составляет $2d-2\varepsilon-\gamma-\delta<2d-2\varepsilon$. Итак, если существует треугольник, в котором сумма внутренних углов равна $2d-\varepsilon$, то можно построить другой треугольник, в котором сумма внутренних углов меньше $2d-2\varepsilon$. Повторяя то же построение, последовательно построим треугольники, в которых сумма углов будет меньше $2d-4\varepsilon$, затем меньше $2d-8\varepsilon$ и т. д. Сумма внутренних углов треугольников, которые таким образом получаются, должна, таким образом, неизбежно стать отрицательной, что лишено смысла. Теорема доказана.

По поводу этого доказательства Герлинг пишет Гауссу (в письме от 11/III 1816 г.) следующее:

„Доказательство Лежандра предполагает, что через точку, лежащую внутри угла, всегда можно провести прямую, встречающую обе стороны угла. Это допущение он в VI издании старается доказать в дополнительном примечании. Я, однако, считаю, что в этом примечании кроется та же ошибка, от которой Вы меня предостерегали во время моего пребывания в Геттингене. Он считает свои соображения assez evident (достаточно очевидными) и полагает, что невозможно допустить большей строгости, не меняя определения прямой линии“.

Лежандр и сам от этого доказательства потом отказался.

Лобачевский тщательно изучал рассуждения Лежандра с самого появления их в первых изданиях его „Начал“. Но рассуждения эти его в заблуждение не ввели. Однако читатель, который будет изучать „Геометрические исследования“, будет ясно видеть, что они служили для Лобачевского точкой отправления. Читатель, проштудировавший эти работы Лежандра, хорошо подготовлен к чтению „Геометрических исследований“.

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

I. ВВЕДЕНИЕ

В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука, поскольку она не переходит в анализ, до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий, к восполнению которого все усилия математиков до настоящего времени были тщетными.[1] Старания Лежандра не прибавили к этой теории ничего, так как он был вынужден оставить единственно строгий ход [исследования], стать на побочный путь и прибегнуть к вспомогательным предложениям, которые он без обоснования старается изобразить как необходимые аксиомы.[2]

Свой первый опыт по началам геометрии я опубликовал в „Казанском Вестнике" за 1829 г.[3] В надежде, что я удовлетворил всем требованиям, я занялся после этого обработкой всей этой науки и эту свою работу опубликовал отдельными частями в „Ученых записках Казанского университета" за 1836, 1837 и 1838 гг. под заглавием „Новые начала геометрии с полной теорией параллельных". Размер этой работы, быть может, мешает моим соотечественникам следить за предметом, который после Лежандра утратил интерес. Я держусь, однако, мнения, что теория параллельных линий не должна была бы отказаться от своих притязаний на внимание математиков; поэтому я намерен изложить здесь сущность моих исследований; при этом вперед отмечу, что, вопреки

---

1 Настоящее сочинение посвящено исключительно устранению пробела в теории параллельных линий. О том, в чем Лобачевский усматривал сущность остальных недостатков геометрии, — неясность первых понятий и дефекты метрики, — подробно сказано во „Вступлении" к сочинению „Новые начала геометрии с полной теорией параллельных". См. также статью „Сочинения Н. И. Лобачевского, предшествовавшие «Геометрическим исследованиям»" (стр. 9, 10).

2 Об исследованиях Лежандра, относящихся к теории параллельных линий, см. посвященную им вводную статью.

3 Речь идет о сочинении „О началах геометрии" (см. стр. 13).

мнению Лежандра,[1] все остальные несовершенства, как, например, определение прямой линии, оказываются здесь посторонними и лишены всякого влияния на теорию параллельных линий.

Чтобы не утомлять читателей множеством таких предложений, коих доказательства не представляют затруднений, я привожу здесь наперед только те из них, знание которых необходимо для последующего.[2]

1) *Прямая линия покрывает себя самое во всех положениях* Под этим я разумею, что при вращении поверхности прямая линия не меняет своего места, если она проходит через две неподвижные точки поверхности [1].

2) Две прямые не могут пересекаться в двух точках [2].

3) Прямая линия, будучи достаточно продолжена в обе стороны, должна уходить за всякие пределы и таким образом делит ограниченную плоскость на две части [3].

4) Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, никогда не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали.

5) Прямая линия всегда пересекает другую прямую, если переходит с одной ее стороны на другую [4].

6) Вертикальные углы, у которых стороны одного составляют продолжения сторон другого, равны. Это справедливо как в применении к плоским прямолинейным углам, так и в применении к плоскостным двугранным углам.

7) Две прямые не могут пересечься, если какая-либо третья прямая пересекает их под равными углами.

8) В прямолинейном треугольнике равным углам противолежат равные стороны, и обратно.

9) В прямолинейном треугольнике большей стороне противолежит также больший угол. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов, и прилежащие к ней углы острые.

10) Прямолинейные треугольники конгруэнтны [5], если у них равны сторона и два угла или две стороны и заключенный между ними угол или две стороны и угол, противолежащий большей стороне [6], или три стороны.

---

[1] См. Legendre — Réflexions, стр. 372. Библиографические данные приведены на стр. 24 настоящего издания.

[2] Приводимые ниже 15 предложений носят различный характер. Первое из них представляет собой одно из возможных определений прямой линии; другие должны быть рассматриваемы как постулаты или аксиомы (например предложения 2, 3, 5); наконец, остальные суть теоремы, обычно доказываемые в курсах геометрии. Все эти предложения не зависят от постулата о параллельных линиях (т. е. устанавливаются, не опираясь на этот постулат); Лобачевский их приводит как материал, которым он может пользоваться при развитии своей геометрической системы, не рискуя впасть в ложный круг — воспользоваться положением, независимость которого он имеет в виду обнаружить. Однако, в этот перечень вошли далеко не все предложения, не зависящие от постулата о параллельных линиях; более того, Лобачевский в дальнейшем изложении и сам пользуется предложениями, не вошедшими в этот перечень; мы их отметим в своем месте

11) Прямая линия, перпендикулярная к двум другим прямым, не лежащим с нею в одной плоскости [7], перпендикулярна ко всем прямым, проведенным через точку их общего пересечения в плоскости двух последних прямых.

12) Пересечение шара плоскостью есть круг.

13) Прямая, которая перпендикулярна к линии пересечения двух [перпендикулярных[1]] плоскостей и расположена в одной из этих плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости.

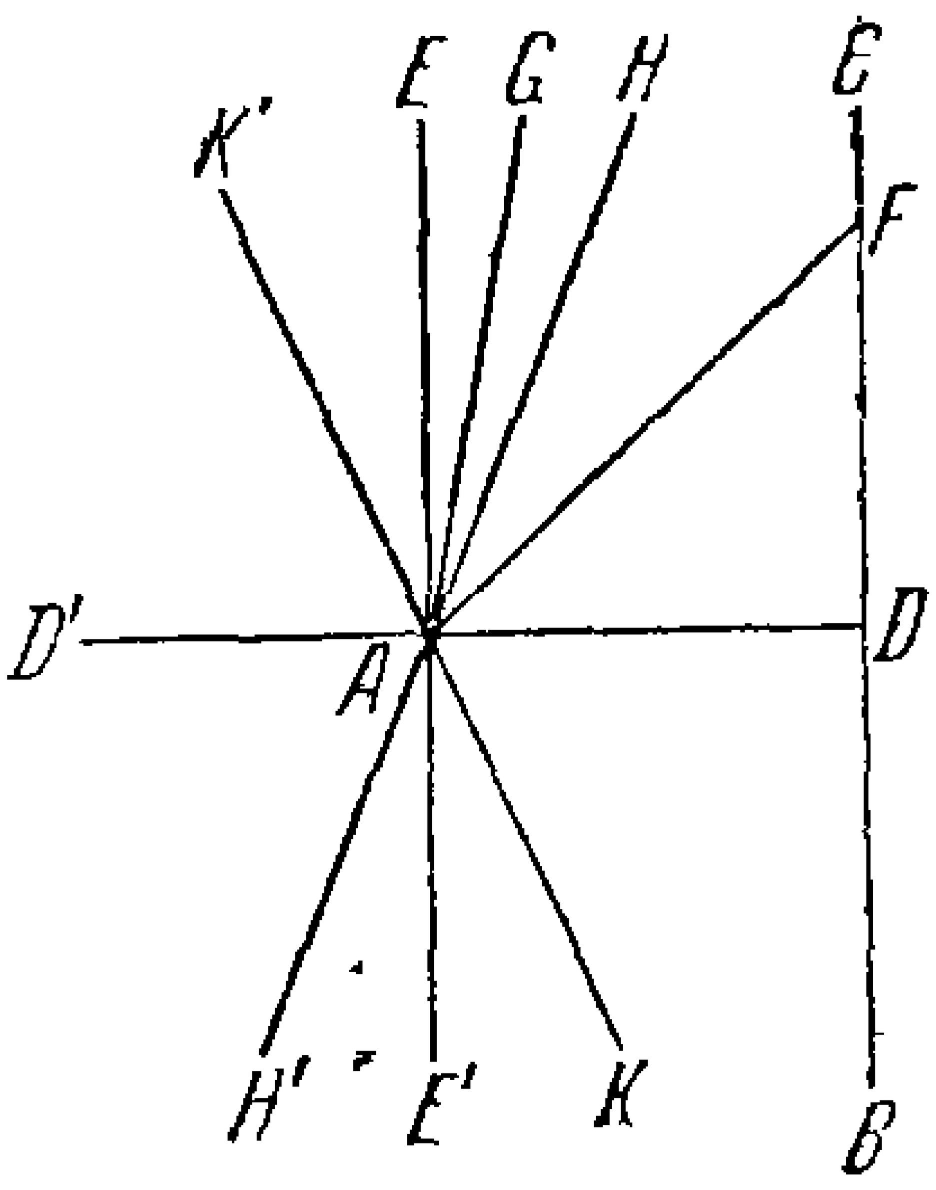
14) В сферическом треугольнике равным сторонам противолежат равные углы, и обратно.

15) Сферические треугольники конгруэнтны, если у них равны две стороны и угол, заключенный между ними, или же сторона и прилежащие к ней углы.[2]

II. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ

Начиная отсюда, дальнейшие предложения уже сопровождаются пояснениями и доказательствами.

16) Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на *пересекающие* ее и *непересекающие*.[3] *Граничная линия* одного и другого классов этих [прямых] линий называется *параллельной заданной линии* [8].



Черт. 1.

Из точки A (черт. 1) опустим на [заданную] линию BC перпендикуляр AD, к которому, в свою очередь, восставим перпендикуляр AE. В прямом угле EAD прямые, выходящие из точки A, либо все встречают линию DC, как, например, AF, либо же некоторые, подобно перпендикуляру AE, не встречают линии DC. Не зная, есть ли перпендикуляр AE единственная линия, которая

[1] Это слово, очевидно по недосмотру, в оригинале пропущено. Это отмечено и в казанском издании этого сочинения („Полн. собр. соч. по геом.“, стр 554).

[2] Это предложение формулировано не вполне точно· сферические треугольники при этих условиях либо конгруэнтны, либо симметричны. Но Лобачевский придерживается своеобразной терминологии, по которой две сферические фигуры „конгруэнтны“, если одна из них может быть совмещена со второй либо непосредственно, либо после замены одной из них симметричной. Это он определенно оговаривает в „Новых началах“, ст. 81. Нужно сказать, что первой из этих двух теорем Лобачевский фактически пользуется только в том случае, когда оба треугольника равнобедренные, и боковые стороны одного равны боковым сторонам другого; при равенстве содержащихся между ними углов сферические треугольники в этом случае всегда конгруэнтны в обычном смысле слова.

[3] Этими соображениями устанавливается та своеобразная точка зрения, вернее, то исходное допущение, которое отличает „неевклидову“ геометрию

не встречается с DC, будем считать возможным, что существуют и другие линии, например AG, которые не встречают DC, сколько бы мы их ни продолжали. При переходе от пересекающих линий AF к непересекающим AG мы должны встретить линию AH, параллельную DC, — граничную линию, — по одну сторону которой ни одна линия AG не встречает DC, между тем как по другую сторону каждая линия AF пересекает линию DC [8]. Угол HAD между параллелью HA и перпендикуляром AD называется *углом параллели* (углом параллельности); мы будем здесь обозначать его через $\Pi(p)$ при $AD=p$.[1]

Если $\Pi(p)$ есть прямой угол,[2] то продолжение AE' перпендикуляра AE также будет параллельно продолжению DB линии DC; к этому еще заметим, что в отношении четырех прямых углов, которые при точке A образуют перпендикуляры AE и AD и их продолжения AE' и AD', каждая прямая линия, выходящая из точки A, либо сама, либо по крайней мере своим продолжением расположена в одном из тех двух прямых углов, которые обращены к линии BC, так что, кроме параллели EE', все другие [прямые] по достаточном продолжении в обе стороны должны пересекать линию BC.

Если $\Pi(p)<\frac{1}{2}\pi$, то по другую сторону [перпендикуляра] AD, под тем же углом $DAK=\Pi(p)$, будет проходить еще одна линия AK, параллельная продолжению DB линии DC; таким образом, при этом допущении[3] мы должны отличать еще *сторону параллельности*.[4] Все остальные линии или их продолжения внутри

Лобачевского от обычной, веками утвердившейся „евклидовой" геометрии. Лобачевский допускает, что из точки A, лежащей вне прямой BC, может в плоскости ABC выходить не одна, а несколько прямых, не встречающих BC; точнее, он не исключает этой возможности. Это непосредственно приводит к классификации, установленной в тексте и обстоятельно изложенной в следующем абзаце Лобачевского; оно подробно разъяснено в примечании [8].

Геометрия, построенная на всех постулатах Евклида, с заменой, однако, постулата о параллельных (V постулата) допущением, что в плоскости из точки, лежащей вне прямой, можно провести больше одной прямой, не встречающей данной, и есть *неевклидова геометрия Лобачевского*. Однако название „неевклидова геометрия" в настоящее время получило гораздо более широкое значение; но в примечаниях к настоящему сочинению мы под „неевклидовой геометрией" всегда разумеем геометрию Лобачевского; ее в настоящее время обычно называют также *гиперболической геометрией* (см. сноску [1] к предложению 37, стр. 76).

[1] Это обозначение основано на том, что угол параллельности в неевклидовой геометрии, как это будет ниже обнаружено, представляет собой функцию расстояния p.

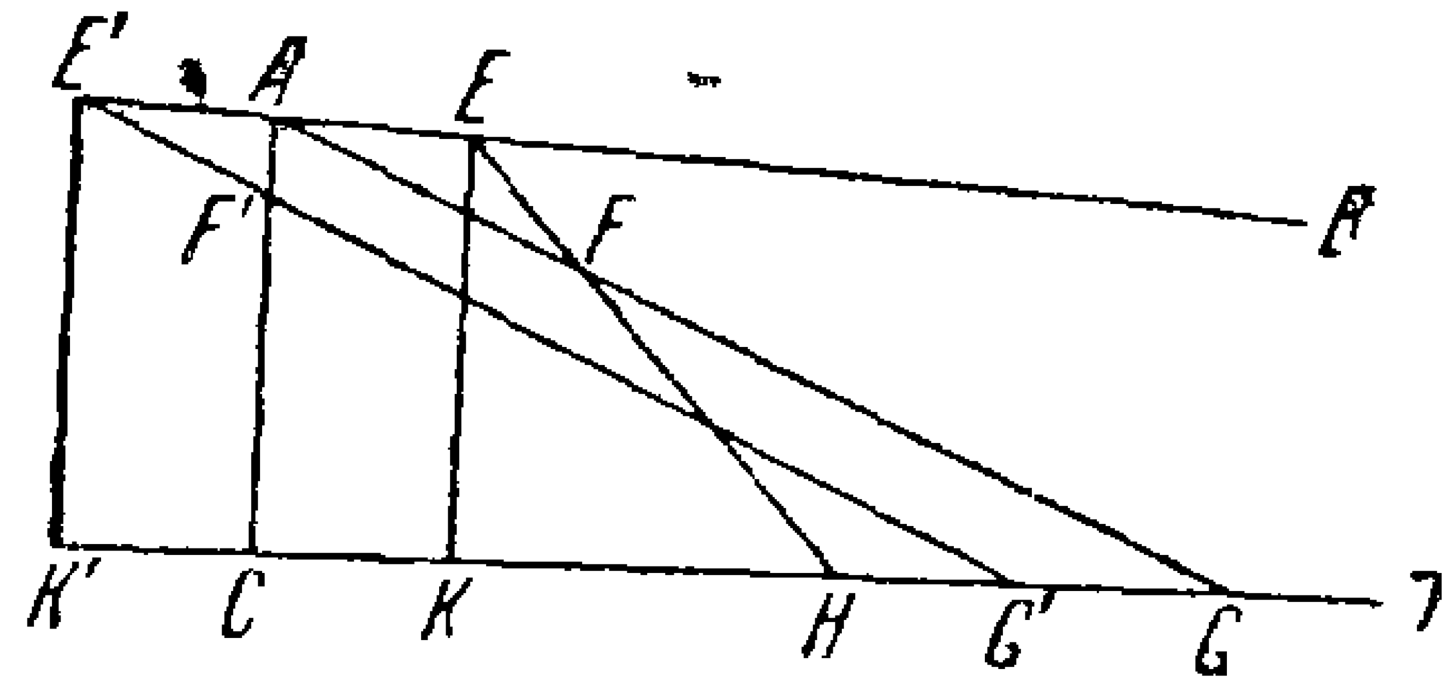
[2] То-есть в случае геометрии Евклида, которому этот небольшой абзац посвящен.

[3] То-есть в случае неевклидовой геометрии Лобачевского.

[4] Иными словами, прямая AH считается параллельной прямой BC в сторону DC, а прямая AK — параллельной той же прямой в сторону DB. Это получает еще более точное выражение, если говорить только о лучах, а не о прямых: *луч AH параллелен лучу BC* (черт. 1), а *луч AK парал-*

двух прямых углов, обращенных к BC, принадлежат к пересекающим, если они лежат внутри угла $HAK = 2\Pi(p)$ между параллелями; напротив того, они принадлежат к непересекающим AG, если они расположены по другую сторону параллелей AH и AK в отверстии двух углов $EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$ между параллелями и перпендикуляром EE' к AD. Подобным же образом по другую сторону перпендикуляра EE' продолжения AH' и AK' параллелей AH и AK также будут параллельны BC; остальные линии принадлежат в угле $K'AH'$ к пересекающим, а в углах $K'AE$ и $H'AE'$ — к непересекающим [9].

Сообразно этому при предположении $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ линии могут быть только пересекающими или параллельными; если же принять, что $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то нужно допустить две параллели, одну по одну сторону [перпендикуляра], другую по другую [его] сторону; кроме того, между остальными линиями нужно различать пересекающие и непересекающие. Как при одном, так и при другом предположении признаком параллелизма служит то, что линия становится пересекающей при малейшем отклонении в ту сторону, где лежит параллель; таким образом, если AH параллельна DC, то каждая линия AF, сколь бы мал ни был угол HAF, пересекает DC [10].



Черт. 2.

17) *Прямая линия сохраняет признак параллельности во всех своих точках.* [1]

Пусть [прямая] AB (черт. 2) будет параллельна CD [2] и пусть AC будет перпендикуляр к последней. Мы рассмотрим две точки, которые расположены произвольно: одна на линии AB и другая на ее продолжении по другую сторону перпендикуляра. Положим, что точка E лежит по ту сторону перпендикуляра, с которой

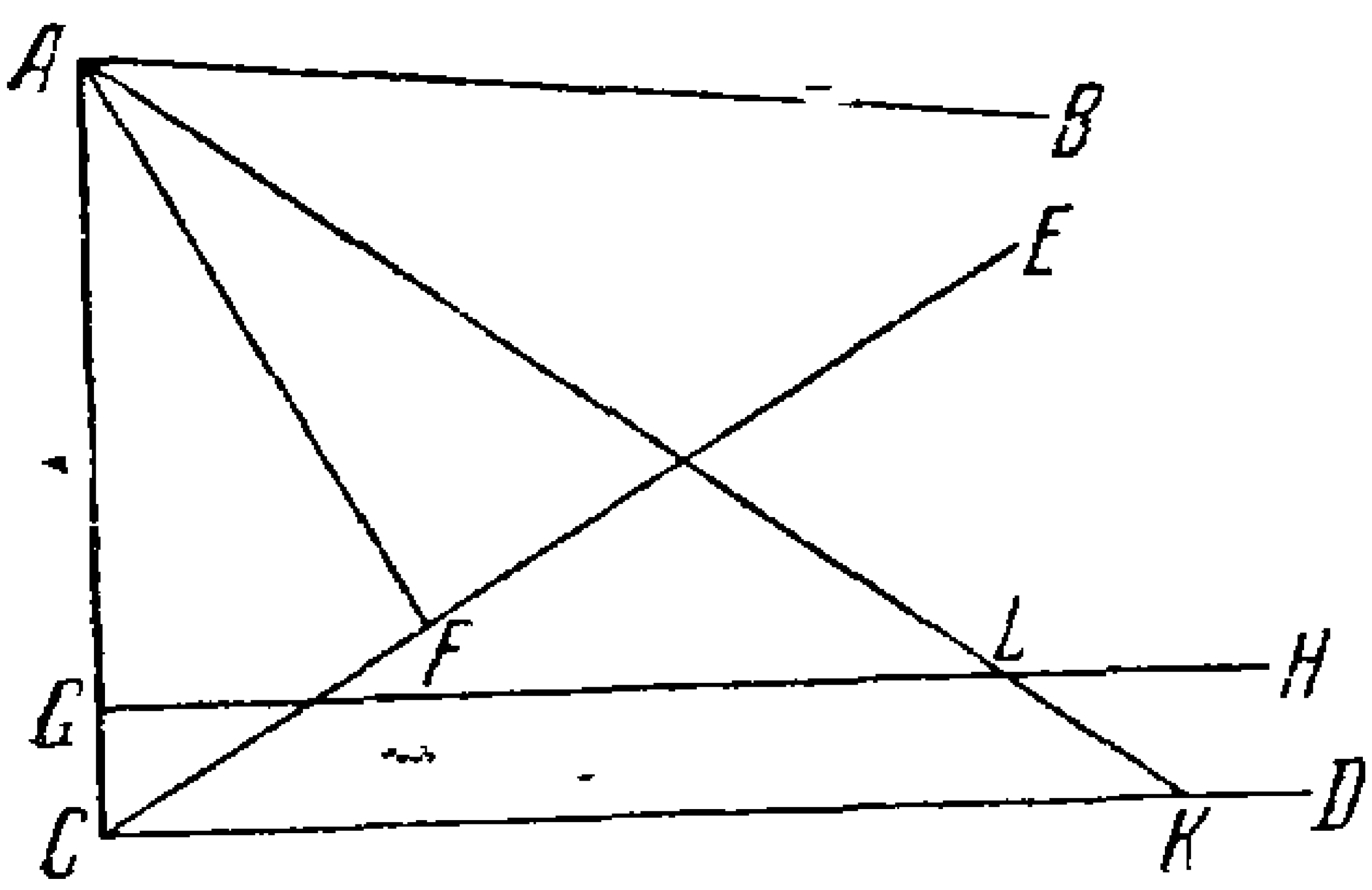
лелен лучу CB; вместе с тем через точку A, лежащую вне луча BC, во всяком случае (т. е. как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии) проходит один и только один параллельный ему луч AH. Лобачевский этой терминологией не пользуется: он всегда пишет „линия AH параллельна линии DC" или же прямая „AH параллельна прямой CD". Но это всегда нужно понимать в том смысле, что луч AH параллелен лучу CD.

[1] Содержащееся в предыдущем предложении определение параллели связывает ее с точкой, из которой она выходит: луч AB параллелен CD (черт. 2), если он не встречает CD и в точке A отделяет лучи, пересекающие CD, от непересекающих. Будет ли этот луч производить такое же отделение пересекающих лучей от непересекающих в другой своей точке, скажем, в точке E или E'? Этот именно вопрос получает разрешение в предложении 17.

[2] Предполагается — в точке A.

AB рассматривается как параллельная CD. Из точки E опустим перпендикуляр EK на CD, затем проведем EF, так, чтобы она проходила внутри угла BEK. Точки A и F соединим прямой линией, продолжение которой должно встретить CD где-либо в G (предложение 16).[1] Вместе с тем мы получим треугольник ACG, внутрь которого входит линия EF; так как эта последняя не может пересечь AC в силу самого построения, а также не может вторично встретить ни AG, ни EK (предложение 2), то она должна встретить CD в какой-либо точке H (предложение 3).[2]

Пусть теперь E' будет точка на продолжении [линии] AB и пусть $E'K'$ будет перпендикуляр на продолжении линии CD; проведем линию $E'F'$ под столь малым углом $AE'F'$, чтобы она пересекла AC где-либо в F'; затем из A проведем под тем же углом с AB линию AF, продолжение которой встретит CD в G (предложение 16). Таким образом мы получаем треугольник AGC, в который входит продолжение линии $E'F'$; так как эта линия не может вторично пересечь AC, а также не может пересечь AG, ибо угол $BAG = BE'G'$ (предложение 7), то она должна встретить CD где-либо в G'.



Черт. 3.

Таким образом, из каких бы точек E и E' [прямой AB] ни выходили линии EF и $E'F'$ и как бы мало они ни отклонялись от линии AB, они всегда пересекут [линию] CD, которой AB параллельна.[3]

18) *Две линии всегда взаимно параллельны.*

Пусть AC будет перпендикуляр к [линии] CD (черт. 3), которой AB параллельна;[4] из C проведем линию CE под каким угодно острым углом ECD к CD и из A опустим перпендикуляр AF на CE; получим прямоугольный треугольник ACF, в котором гипотенуза AC больше катета AF (предложение 9). Отложим $AG = AF$ и наложим AF на AG; тогда AB и FE займут положение AK и GH, причем угол $BAK = FAC$;[5] следовательно, AK

---

[1] Ибо в точке A луч AB по условию отделяет встречающие CD лучи от невстречающих.

[2] См. предложение 3 и к нему примечание [3].

[3] Иначе говоря, лучи EB и $E'B$ в точках E, E' производят отделение пересекающих лучей от непересекающих, т. е. как луч EB, так и луч $E'B$ параллельны лучу CD.

[4] Дано, таким образом, что луч AB параллелен лучу CD; нужно доказать, что и луч CD параллелен AB. Так как луч CD не встречает AB, то остается только обнаружить, что всякий луч CE, проходящий внутри угла DCA, встретит AB. Это доказательство Лобачевский и проводит.

[5] Полоса $BAFE$ повернута вокруг точки A таким образом, что линия AF совпадает с линией AG, FE с GH, а AB с AK. Поэтому углы поворота FAC и BAK равны.

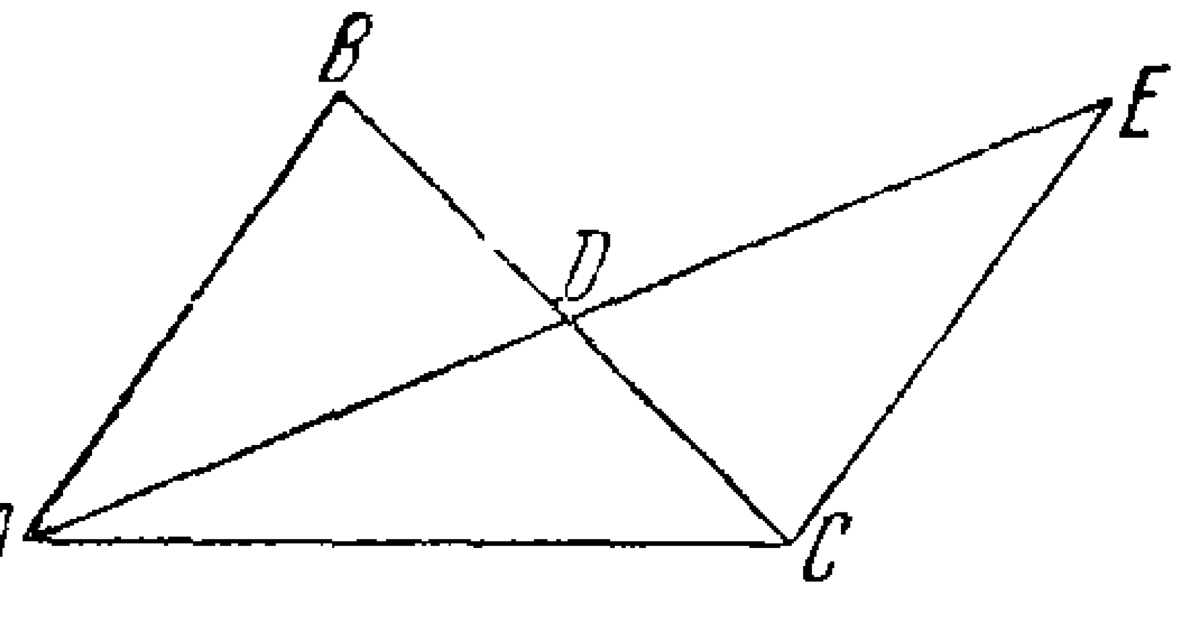
должна пересечь линию DC где-либо в [точке] K (предложение 16); таким образом получится треугольник AKC, внутрь которого [входит] перпендикуляр GH; он встречает линию AK в L (предложение 3) и тем определяет на линии AB расстояние AL, точки пересечения линий AB и CE, от точки A.[1]

Отсюда следует, что CE всегда встретит AB, сколь бы мал ни был угол ECD; поэтому CD параллельна AB (предложение 16) [11].

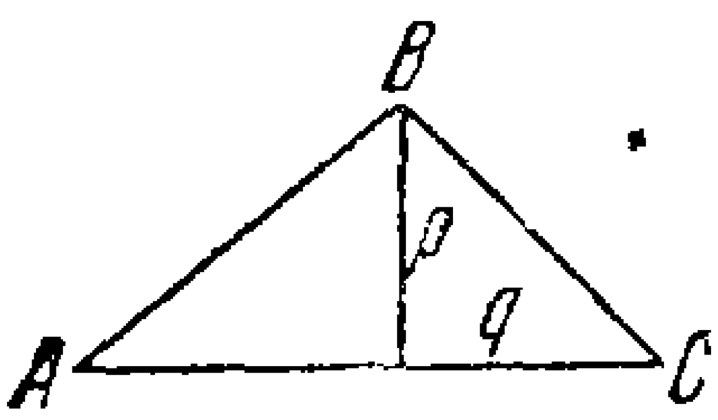
III. СУММА ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

19) *В прямолинейном треугольнике сумма трех углов не может превышать двух прямых.*

Допустим, что в треугольнике ABC (черт. 4) сумма трех углов равна $\pi+\alpha$; если его стороны не равны, возьмем наименьшую из них BC, разделим ее пополам в D, проведем из A через D линию AD и на ее продолжении сделаем DE равным AD; затем соединим точку E с точкой C прямой EC. В равных треугольниках ADB и CDE угол $ABD = DCE$ и $BAD = DEC$ (предложения 6 и 10); отсюда следует, что в треугольнике ACE сумма углов также должна быть равна $\pi+\alpha$; кроме того, наименьший угол BAC треугольника ABC (предложение 9) перешел в новый треугольник ACE, причем он разбился на две части EAC и AEC. Продолжая таким же образом, разделяя при этом пополам каждый раз ту сторону, которая противолежит наименьшему углу, мы необходимо придем к треугольнику, сумма трех углов которого равна $\pi+\alpha$, но в котором окажутся два угла, каждый из которых по абсолютной величине меньше $\frac{1}{2}\alpha$; так как, однако, третий угол не может быть больше π, то α должно быть либо нулем, либо отрицательным.



Черт. 4.



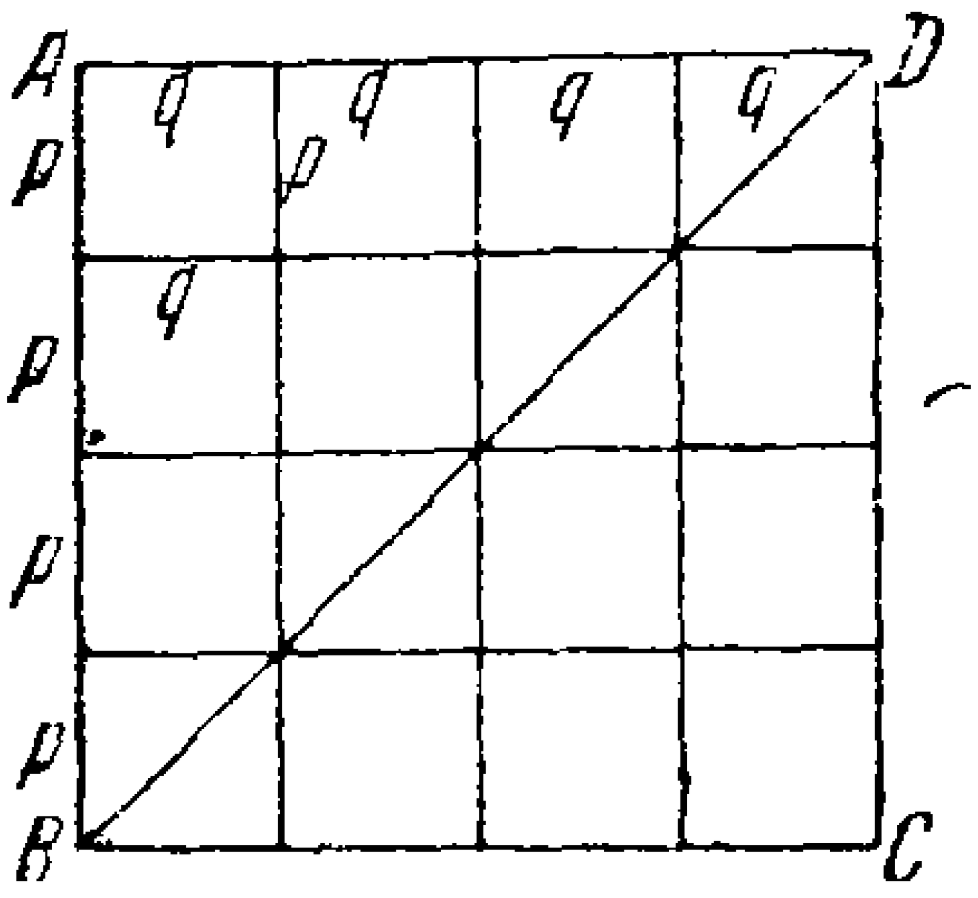
Черт. 5.

20) *Если в каком-либо прямолинейном треугольнике сумма трех углов равна двум прямым, то это имеет место и во всяком другом треугольнике.*

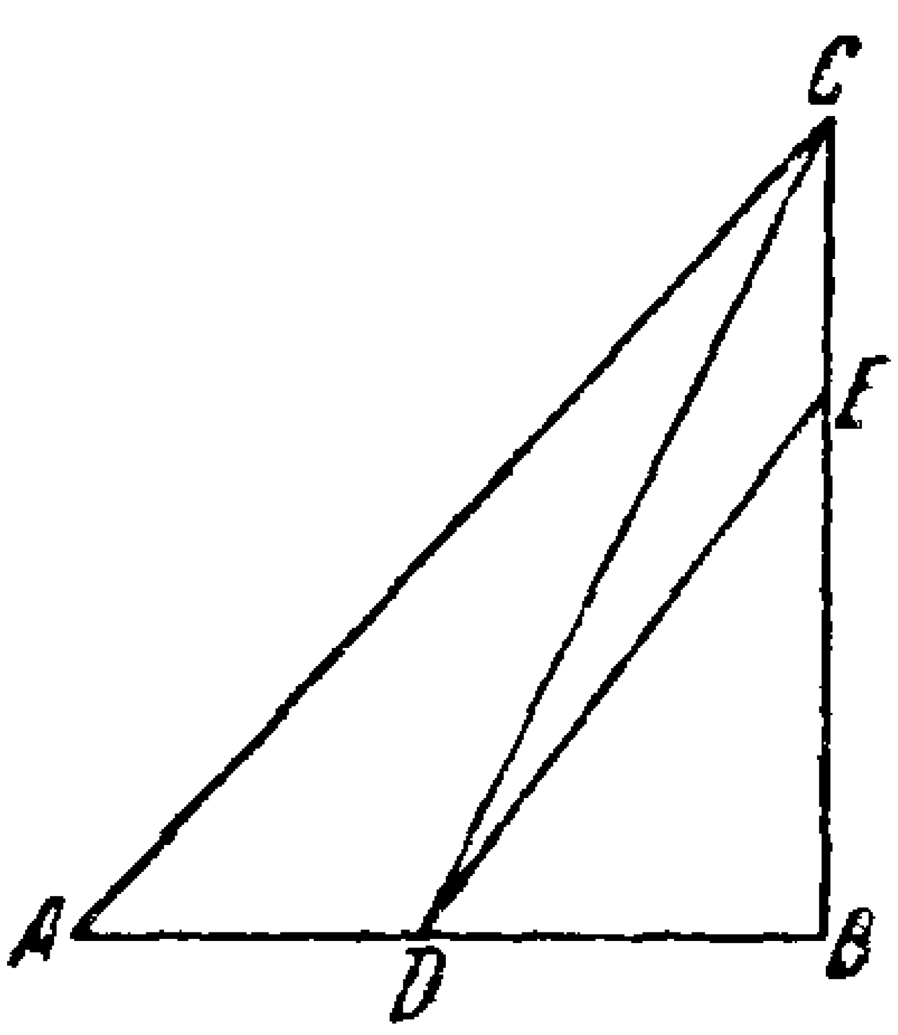
Положим, что в прямолинейном треугольнике ABC (черт. 5) сумма трех углов $=\pi$; в таком случае по крайней мере два его

[1] Если произведем обратный поворот и возвратим отрезок AG в положение AF, то луч GL пойдет по FE, AL по AB и точка L совпадет с точкой пересечения лучей AB и CE.

угла должны быть острые. Из вершины B третьего угла опустим на противоположную сторону перпендикуляр p; тогда треугольник ABC разобьется на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма трех углов также должна быть равна π, ибо ни в одном из них она не может превышать π, а в составленном из них треугольнике[1] она не должна быть меньше π. Таким образом, мы получаем прямоугольный треугольник с катетами p и q, а из него[2] получаем четырехугольник, в котором противоположные стороны равны, а прилежащие друг к другу стороны p и q взаимно перпендикулярны (черт. 6). Повторно прикладывая тот же четырехугольник, можно получить подобный же [четырехугольник] со сторонами np и q и, наконец, четырехугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными сторонами, в котором $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, где m и n суть произвольные целые числа. Такой четырехугольник делится диагональю BD на два равных прямоугольных треугольника BAD и BCD, в каждом из которых сумма трех углов равна π. Числа m и n могут быть выбраны так, чтобы прямоугольный треугольник ABC (черт. 7) катеты которого $AB = np$, $BC = mq$, охватил другой заданный [прямоугольный] треугольник DBE, коль скоро [их] прямые углы будут приведены в совмещение.[3] Если проведем линию



Черт. 6.



Черт. 7.

[1] Так как угол BAC острый, то основание перпендикуляра, опущенного из точки B на сторону AC, должно в силу предыдущего предложения упасть на луч AC, а не на его продолжение; по той же причине оно должно упасть и на луч CA; основание перпендикуляра должно, следовательно, лежать *внутри* стороны AC. Треугольник разобьется поэтому на два составляющих треугольника.

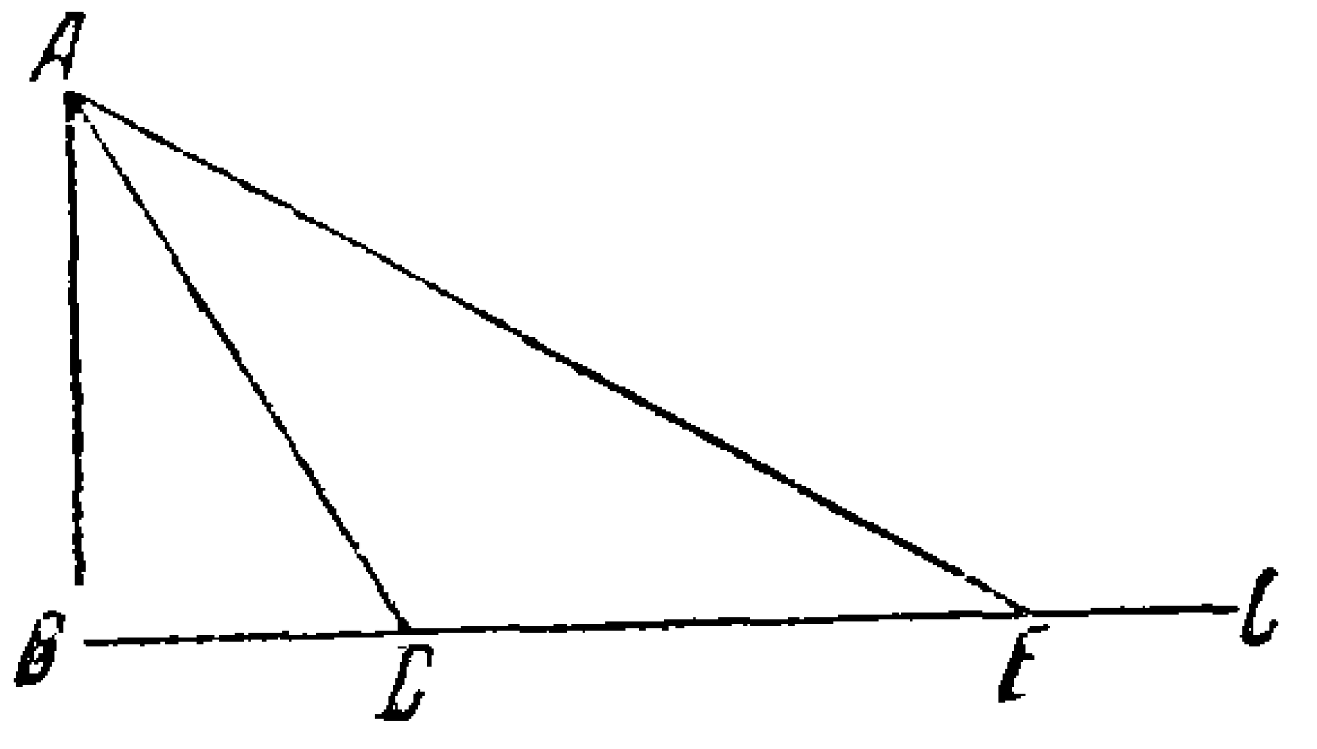
Так как сумма внутренних углов треугольника ABC равна π, в составляющих же треугольниках к ним присоединяются еще два прямых угла, то сумма внутренних углов обоих составляющих треугольников составит 2π. Поскольку в силу предыдущего предложения ни в одном из двух составляющих треугольников сумма углов не может оказаться больше π, она должна быть в каждом из составляющих треугольников равна π.

Весь смысл этой части доказательства заключается в том, чтобы показать, что при существовании какого-либо треугольника, в котором сумма углов равна π, всегда возможно построить *прямоугольный* треугольник, в котором сумма внутренних углов также равна π.

[2] Прикладывая к нему конгруэнтный ему треугольник гипотенузой к гипотенузе, но повернув последнюю в обратную сторону так, чтобы точка C попала в B, а точка B — в C.

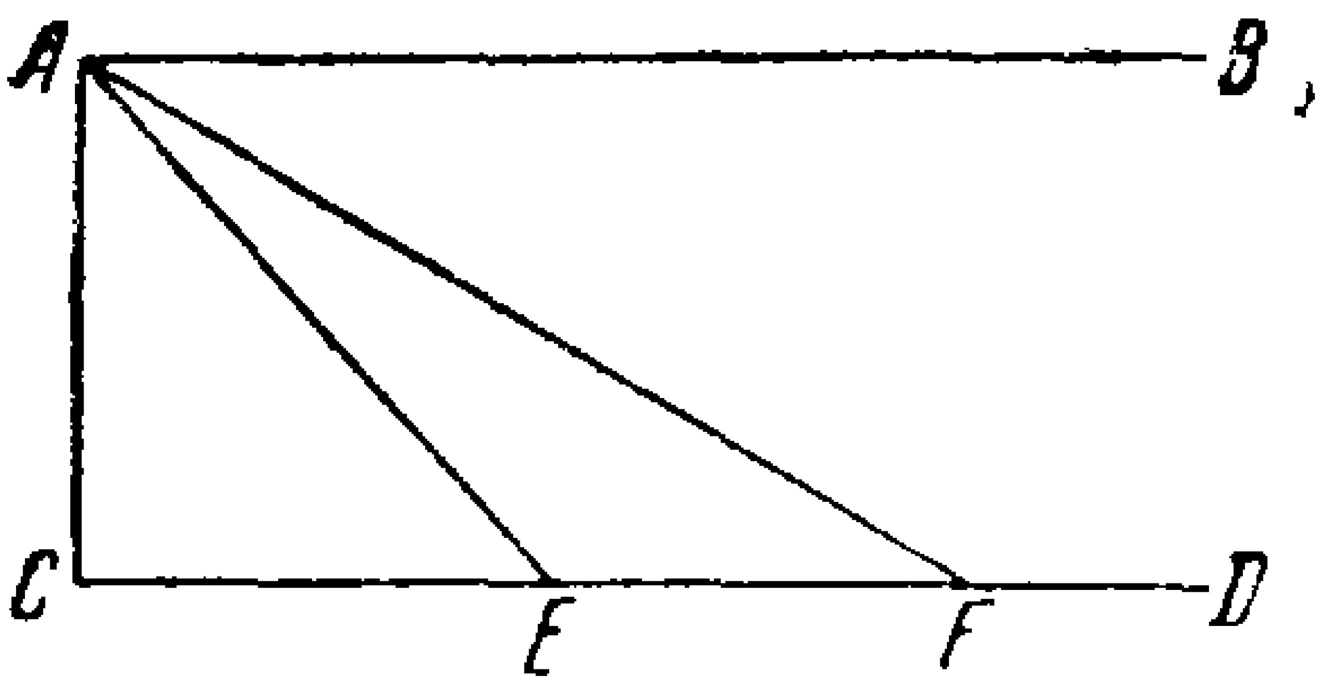
[3] Иначе говоря, располагая уже прямоугольным треугольником, в котором сумма углов равна π, можно при его помощи построить другой

DC, то получим еще прямоугольные треугольники, из которых каждые два последовательно имеют общую сторону.[1] Треугольник ABC получается путем соединения двух треугольников ACD и DCB, ни в одном из которых сумма трех углов не может быть больше π; она должна быть поэтому равна π, поскольку в составленном треугольнике эта сумма должна быть равна π. Таким же образом треугольник BDC состоит из двух треугольников DEC и DBE; поэтому и в треугольнике DBE сумма трех углов должна быть равна π;[2] и вообще это должно иметь место во всяком треугольнике, так как всякий треугольник разбивается на два прямоугольных треугольника.[3]



Черт. 8.

Отсюда следует, что возможны только два допущения: либо сумма трех углов во всех прямолинейных треугольниках равна π, либо же она во всех треугольниках меньше π.



Черт. 9.

21) *Из данной точки всегда можно провести прямую линию таким образом, чтобы она образовала с данной прямой сколь угодно малый угол.*

Из данной точки A [черт. 8] опустим на данную прямую BC перпендикуляр AB; на BC возьмем произвольную точку D и проведем линию AD; далее, сделаем $DE = AD$ и проведем AE. Пусть в прямоугольном треугольнике ABD угол $ADB = \alpha$. В таком случае в равнобедренном треугольнике ADE угол AED должен быть либо равен $\frac{1}{2}\alpha$, либо меньше (предложения 8 и 20[4]). Про-

прямоугольный треугольник с той же суммой углов ($=\pi$), в котором катеты будут сколь угодно велики (соответственно больше любых двух заданных отрезков). Если поэтому возьмем произвольный прямоугольный треугольник DBE (черт. 7), то можно будет построить такой прямоугольный треугольник ABC с суммой углов $=\pi$, в котором треугольник DBE займет положение, указанное на черт. 7.

[1] Это будут прямоугольные треугольники ABC и DBC с общим катетом CB и прямоугольные треугольники DCB и DEB с общим катетом DB.

[2] Таким образом доказано, что при сделанном предположении в любом *прямоугольном* треугольнике сумма углов равна π.

[3] Если ABC (черт. 5) есть совершенно произвольный треугольник, то мы разобьем его на два прямоугольных треугольника; в каждом из них сумма внутренних углов равна π, в обоих вместе $=2\pi$; отбросив сумму двух прямых углов, образовавшихся при дополнительной вершине, придем к заключению, что и в исходном треугольнике ABC сумма углов равна π.

[4] Здесь уместна ссылка на предложение 19: поскольку сумма внутренних углов треугольника не может превысить π, каждый из внешних

должая таким образом, мы, наконец, придем к такому углу AEB, который меньше любого заданного угла.

22) *Если два перпендикуляра к одной и той же прямой линии параллельны между собой, то в прямолинейных треугольниках сумма трех углов равна* π.

Положим, что линии AB и CD (черт. 9) параллельны между собой и перпендикулярны к AC. Из A проведем линии AE и AF к точкам E и F, взятым на линии CD на любых расстояниях $FC > EC$ от точки C. Допустим, что в прямоугольном треугольнике ACE сумма трех углов равна $\pi - \alpha$, а в треугольнике AEF она равна $\pi - \beta$; в таком случае в треугольнике ACF [сумма углов] будет равна $\pi - \alpha - \beta$, причем ни α, ни β не могут быть отрицательными. Пусть, далее, угол $BAF = a$, $AFC = b$; в таком случае $\alpha + \beta = a - b$,[1] теперь, удаляя линию AF от перпендикуляра AC, можно сделать угол a между AF и параллелью AB сколь угодно малым; так же можно уменьшать и угол b; следовательно, два угла α и β не могут иметь никакой другой величины, кроме $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.[2]

Отсюда следует, что во всех прямолинейных треугольниках сумма трех углов либо равна π, и тогда угол параллельности $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ для любой линии p, либо во всех треугольниках эта сумма $< \pi$, и тогда также $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

Первое предположение служит основой *обыкновенной геометрии* и *плоской тригонометрии*. Второе предположение также может быть допущено, не приводя ни к какому противоречию в результатах; оно обосновывает новое геометрическое учение, которому я дал название „*воображаемая геометрия*“ и которое я здесь намерен изложить вплоть до вывода уравнений между сторонами и углами прямолинейных и сферических треугольников.[3]

углов треугольника не может быть меньше суммы двух внутренних углов, с ним не смежных; поэтому $\angle DAE + \angle DEA = 2\angle DEA \leqslant \alpha$. Ссылка на предложение 20, повидимому, представляет собой недосмотр.

[1] Так как $\angle CAF = \frac{1}{2}\pi - a$, $\angle AFC = b$, то сумма углов прямоугольного треугольника ACF равна $\pi + b - a$, откуда и вытекает равенство $\alpha + \beta = a - b$.

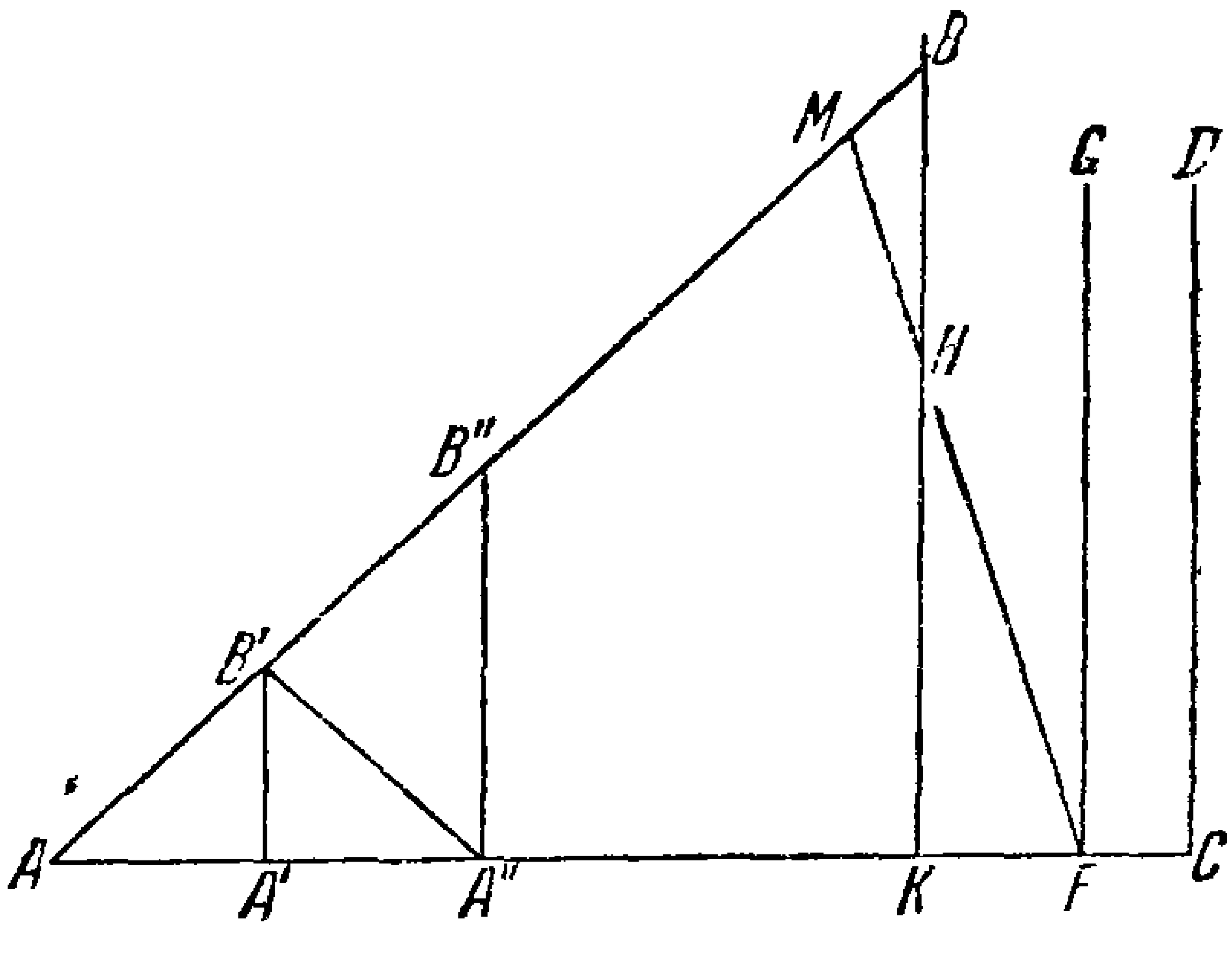
[2] Так как по условию луч AB параллелен CD, то луч AF будет пересекать CD, сколь бы малым мы ни взяли угол a. Что касается угла b, то он может быть сделан сколь угодно малым согласно предложению 21. Таким образом в предыдущем равенстве $\alpha + \beta = a - b$ левая часть представляет сумму неотрицательных слагаемых α и β; правая же часть бесконечно мала; отсюда вывод автора.

[3] С этого места Лобачевский, таким образом, твердо принимает второе возможное допущение, именно, что сумма углов треугольника меньше π, и в этом предположении развертывает все свои дальнейшие рассуждения. Это нужно постоянно помнить, следя за дальнейшим текстом.

IV. ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

23) *Для любого заданного угла* α *можно найти такую линию* p, *что* $\Pi(p)=\alpha$.

Пусть AB и AC (черт. 10) — две прямые линии, образующие при пересечении острый угол α; на AB возьмем произвольно точку B', из этой точки опустим на AC перпендикуляр $B'A'$, сделаем $A'A''=AA'$, восставим в A'' перпендикуляр $A''B''$ и так будем продолжать до тех пор, пока придем к перпендикуляру CD, который уже не встречает AB. Это необходимо должно иметь место, ибо если в треугольнике $AA'B'$ сумма всех трех углов равна $\pi-\alpha$, то в треугольнике $AB'A''$ она равна $\pi-2\alpha$, в треугольнике $AA''B''$ она меньше $\pi-2\alpha$ (предложение 20)[1] и т. д., пока она, наконец, не станет отрицательной и этим обнаружит невозможность образования треугольника. Перпендикуляр CD может оказаться именно тем, до которого все перпендикуляры из точек, лежащих ближе к A, пересекают AB; во всяком случае при переходе от пересекающих к непересекающим такой перпендикуляр FG должен существовать.[2] Теперь из точки F проведем линию FH, образующую с FG острый угол HFG и именно с той стороны, с которой лежит точка A. Из какой-либо точки H линии FH опустим на AC перпендикуляр HK, продолжение которого, следовательно, должно пересечь AB



Черт. 10.

[1] Ссылка и здесь, как и в предложении 21, должна быть сделана на предложение 19. Существенно то, что сумма углов треугольника, разбитого трансверсалью на два составляющих треугольника, всегда меньше, нежели сумма углов любого из этих составляющих треугольников. Фактически это было уже обнаружено при доказательстве предложения 22. Там было показано, что в треугольнике ACF, разбитом трансверсалью AE на треугольник ACE с суммой углов $\pi-\alpha$ и треугольник AEF с суммой углов $\pi-\beta$, сумма внутренних углов равна $\pi-\alpha-\beta$. В случае, с которым мы здесь имеем дело, сумма углов треугольника $AA''B''$ поэтому меньше, нежели в треугольнике $AA''B'$.

[2] Это доказывается так же, как и существование параллели [см. предложение 16 и к нему примечание 8]. Принимая это, Лобачевский обнаруживает, что этот перпендикуляр FG действительно параллелен лучу AB, т. е. что всякий луч FH, проходящий внутри угла GFA, встречает AB.

где-либо в B;[1] он образует, таким образом, треугольник AKB, внутрь которого входит продолжение линии FH, и потому оно должно встретить гипотенузу AB где-либо в M. Так как GFH есть произвольный угол и может быть взят сколь угодно малым, то [линия] FG параллельна AB и $AF = p$ (предложения 16 и 18).

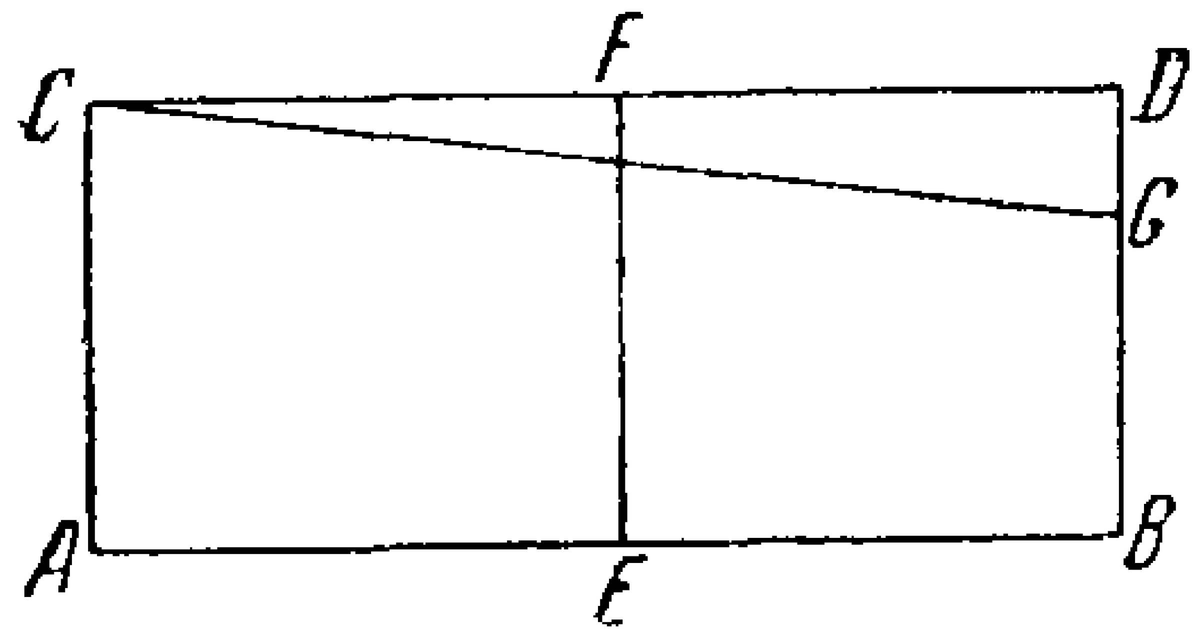
Легко усмотреть, что с уменьшением p угол α возрастает, приближаясь при $p = 0$ к $\frac{1}{2}\pi$;[2] с возрастанием p угол α уменьшается, все более приближаясь к нулю при $p = \infty$. Так как совершенно произвольно, какой угол разуметь под символом $\Pi(p)$, когда линия p выражается отрицательным числом, то мы примем [12]

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi,$$

каковое равенство должно иметь место для всех значений p, как положительных, так и отрицательных, а также для $p = 0$.

V. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

24) *Чем далее параллельные линии продолжаются в сторону параллельности, тем более они друг к другу приближаются.*



Черт. 11.

К прямой AB (черт. 11) восставим два перпендикуляра $AC = BD$ и конечные их точки соединим прямой линией CD. Тогда четырехугольник $CABD$ будет иметь два прямых угла при A и B, а при C и D — два острых угла (предложение 22),[3] которые равны между собой, как в этом легко убедиться, налагая

---

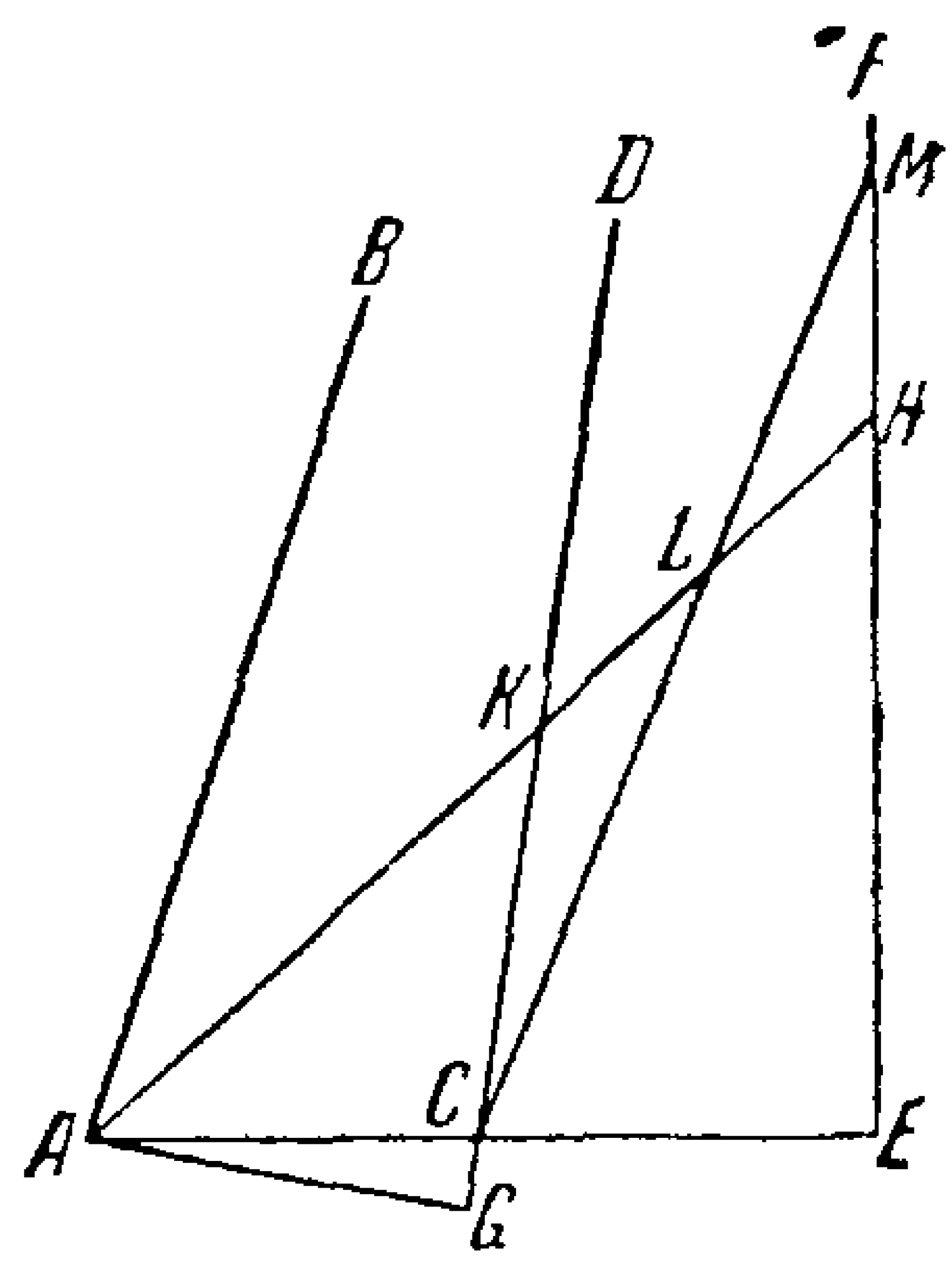
[1] Это следует из того, что, перпендикуляр KH выходит из точки K, лежащей до основания первого, не встречающего AB, перпендикуляра FG.

[2] Если, как на приведенном чертеже, AF есть тот отрезок p, для которого $\Pi(p) = \alpha\ (= \angle BAF)$, и мы возьмем $AF' < AF$, то луч AB будет встречать перпендикуляр $F'G'$, а потому луч, параллельный $F'G'$, будет проходить выше AB, т. е. при $AF' < AF$, имеем $\Pi(AF') > \Pi(AF)$. Итак, $\Pi(p)$ есть монотонная функция от p, убывающая с возрастанием p и, следовательно, возрастающая с убыванием p. Как было доказано выше (предложение 23), при этом возрастании функция $\Pi(p)$ должна проходить через все углы, меньшие $\frac{1}{2}\pi$; поэтому $\Pi(p)$ стремится к $\frac{1}{2}\pi$, когда p стремится к нулю. И обратно, убывая с возрастанием p, функция $\Pi(p)$ должна проходить через все сколь угодно малые углы; она стремится поэтому к нулю, когда p неограниченно возрастает.

[3] Ссылку на предложение 22 нужно отнести к концу его, где устанавливается, что в дальнейшем исследование будет производиться на основе допущения, что сумма углов треугольника меньше π, а потому сумма углов в четырехугольнике меньше 2π.

этот четырехугольник на самого себя так, чтобы линия BD упала на AC, а AC — на BD. Разделим AB пополам и в точке деления E восставим перпендикуляр EF к AB. Он должен быть также перпендикулярен к CD, потому что четырехугольники $CAEF$ и $FEBD$ покрывают друг друга, если наложим их друг на друга так, чтобы линия FE осталась в том же положении. Вследствие этого линия CD не может быть параллельна AB,[1] параллель же к последней в точке C, именно CG, должна быть наклонена в сторону AB (предложение 16) и отсечет от перпендикуляра BD часть $BG < CA$. Так как точка C на линии CG произвольна, то отсюда следует, что CG тем более приближается к AB, чем далее мы ее продолжаем [13].

25) *Две прямые линии, параллельные третьей, параллельны между собой.*



Черт. 12.

Примем сначала, что три линии AB, CD и EF (черт. 12) лежат в одной плоскости. Если две из них по порядку AB и CD параллельны крайней[2] линии EF, то AB и CD также параллельны между собой. Чтобы это обнаружить,[3] опустим из произвольной точки A крайней линии AB на другую крайнюю FE перпендикуляр AE, который пересечет среднюю линию CD в некоторой точке C (предложение 3) под углом $DCE < \frac{1}{2}\pi$ со стороны параллели CD к EF (предложение 22).[4] Перпендикуляр AG, опущенный из той же точки A на CD, должен упасть внутри отверстия острого угла ACG (предложение 9); всякая другая линия AH, проведенная из A внутри угла BAC, должна пересечь [линию] EF, параллельную AB, где-либо в H, сколь бы мал ни был угол BAH; следовательно, CD пересечет в треугольнике AEH линию AH где-либо в K, так как она не может встретиться с EF. Если бы AH проходила из точки A внутри угла CAG, то она должна была бы в треугольнике CAG пересечь продолжение CD где-либо между точками C и G. Отсюда следует, что AB и CD параллельны (предложения 16 и 18).

---

[1] По предложению 22.

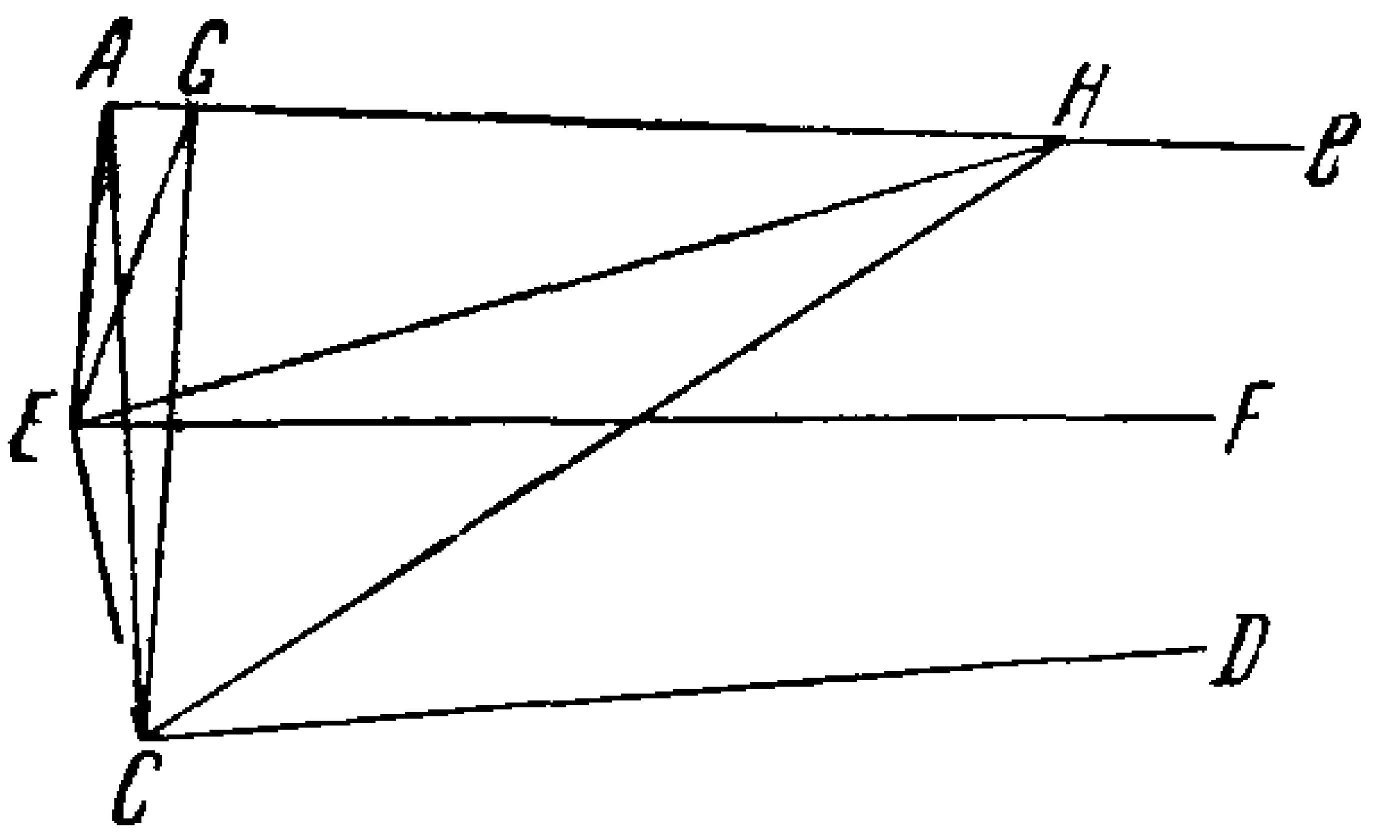
[2] То-есть лежащей вне полосы, ограничиваемой первыми двумя прямыми.

[3] Обращаясь к доказательству этого предложения, нужно прежде всего заметить, что прямые AB и CD встретиться не могут, потому что из точки их пересечения, если бы таковая существовала, выходили бы два луча, параллельные EF, что не может иметь места (см. сноску [4] на стр. 40). Остается, таким образом, обнаружить, что AB есть граничный луч, не встречающий CD; это автор и выполняет.

[4] Угол DCE есть угол параллельности, соответствующий расстоянию CE, а потому он меньше прямого.

Если примем, что обе внешние линии AB и EF параллельны средней CD, то каждая линия AK, проведенная из точки A внутри угла BAE, пересечет линию CD где-либо в точке K, сколь бы мал ни был угол BAK. На продолжении AK возьмем произвольно точку L и соединим ее с C линией CL, которая пересечет EF где-либо в M, вследствие чего образуется треугольник MCE. Продолжение линии AL внутрь треугольника MCE не может вторично пересечь ни AC, ни CM; следовательно, оно должно встретить EF где-либо в H; поэтому AB и EF взаимно параллельны.

Пусть теперь параллели AB и CD (черт. 13) лежат в двух плоскостях, пересечение которых есть линия EF.[1] Из произвольной точки E последней опустим перпендикуляр EA на одну из двух параллелей, например, на AB; затем из основания A перпендикуляра EA опустим вновь перпендикуляр AC на вторую параллель CD и соединим концы E и C обоих перпендикуляров линией EC. Угол BAC должен быть острым (предложение 22); следовательно, перпендикуляр CG, опущенный из C на AB, падает в точку G по ту сторону от CA, в которой считаем линии AB и CD параллельными. Каждая линия EH, сколь бы мало она ни отклонялась от EF, лежит с EC в плоскости, которая должна пересечь плоскость двух параллелей AB и CD вдоль некоторой линии CH. Эта последняя линия пересекает где-либо AB и именно в той же точке H, которая принадлежит всем трем плоскостям и через которую необходимо проходит также линия EH; следовательно, EF параллельна AB. Подобным же образом можно обнаружить параллельность линий EF и CD.



Черт. 13.

Сообразно этому предположение, что линия EF параллельна одной из двух других параллельных между собой [линий] AB и CD, означает не что иное, как то, что CF рассматривается как пересечение двух плоскостей, в которых лежат параллели AB и CD. Поэтому две линии параллельны между собой, если они параллельны одной и той же третьей линии, хотя бы они лежали и в различных плоскостях. Последнее предложение можно выразить также следующим образом: *три плоскости пересекаются по линиям, которые все между собой параллельны, поскольку предполагается параллельность двух из них.*

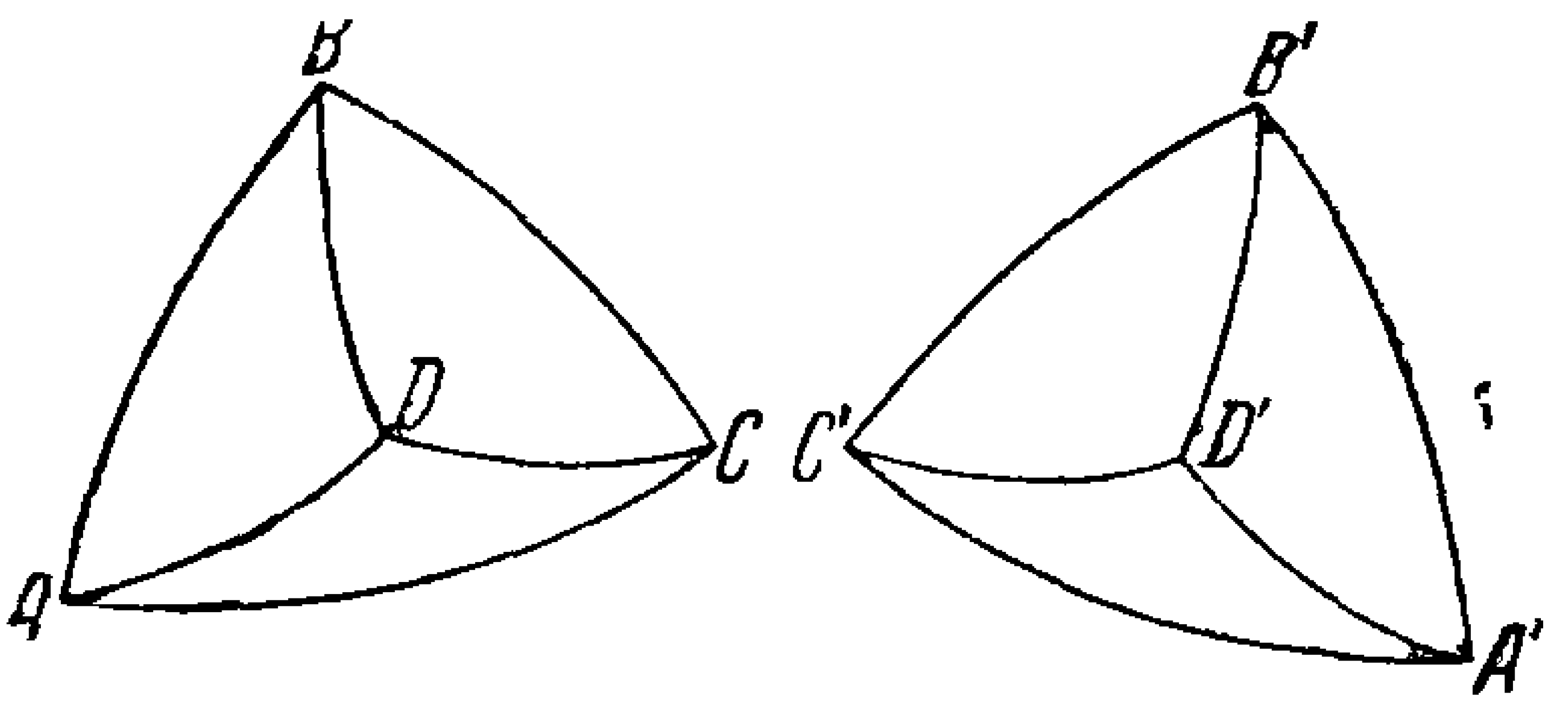
[1] Отсюда уже следует, что линии AB и EF не пересекаются: через общую их точку, если бы таковая существовала, необходимо проходила бы прямая CD, потому что три прямые AB, CD и EF лежат попарно в одной плоскости; но это не может иметь места, так как линии AB и CD параллельны.

VI. ИЗМЕРЕНИЕ ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ

26) *На поверхности шара противолежащие друг другу треугольники имеют одинаковую площадь.*

Под противолежащими друг другу треугольниками мы разумеем здесь такие, которые образуются пересечением поверхности шара [теми же] плоскостями по обе стороны центра; в таких треугольниках стороны и углы имеют поэтому противоположные направления.

В противолежащих друг другу треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 14, на котором один из треугольников нужно себе представить изображенным в повернутом виде) стороны $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, и их углы при точках A, B, C также равны соответствующим углам в другом треугольнике при точках A', B', C'. Представим себе плоскость, проходящую через три точки A, B, C, и перпендикуляр, опущенный на эту плоскость из центра шара; продолжения этого перпендикуляра в обе стороны пересекут противолежащие друг другу треугольники в точках D и D' шаровой поверхности. Расстояния точки D от точек A, B, C на сфере в дугах больших кругов должны быть равны (предложение 12) как между собой, так и расстояниям $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$ в другом треугольнике (предложение 6); следовательно, равнобедренные треугольники вокруг точек D и D'в обоих сферических треугольниках ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны друг другу.



Черт. 14.

Чтобы вообще судить о равенстве двух поверхностей,[1] принимают за основу следующее предложение: *две поверхности равны, если они образуются составлением или отделением равных частей.*[2]

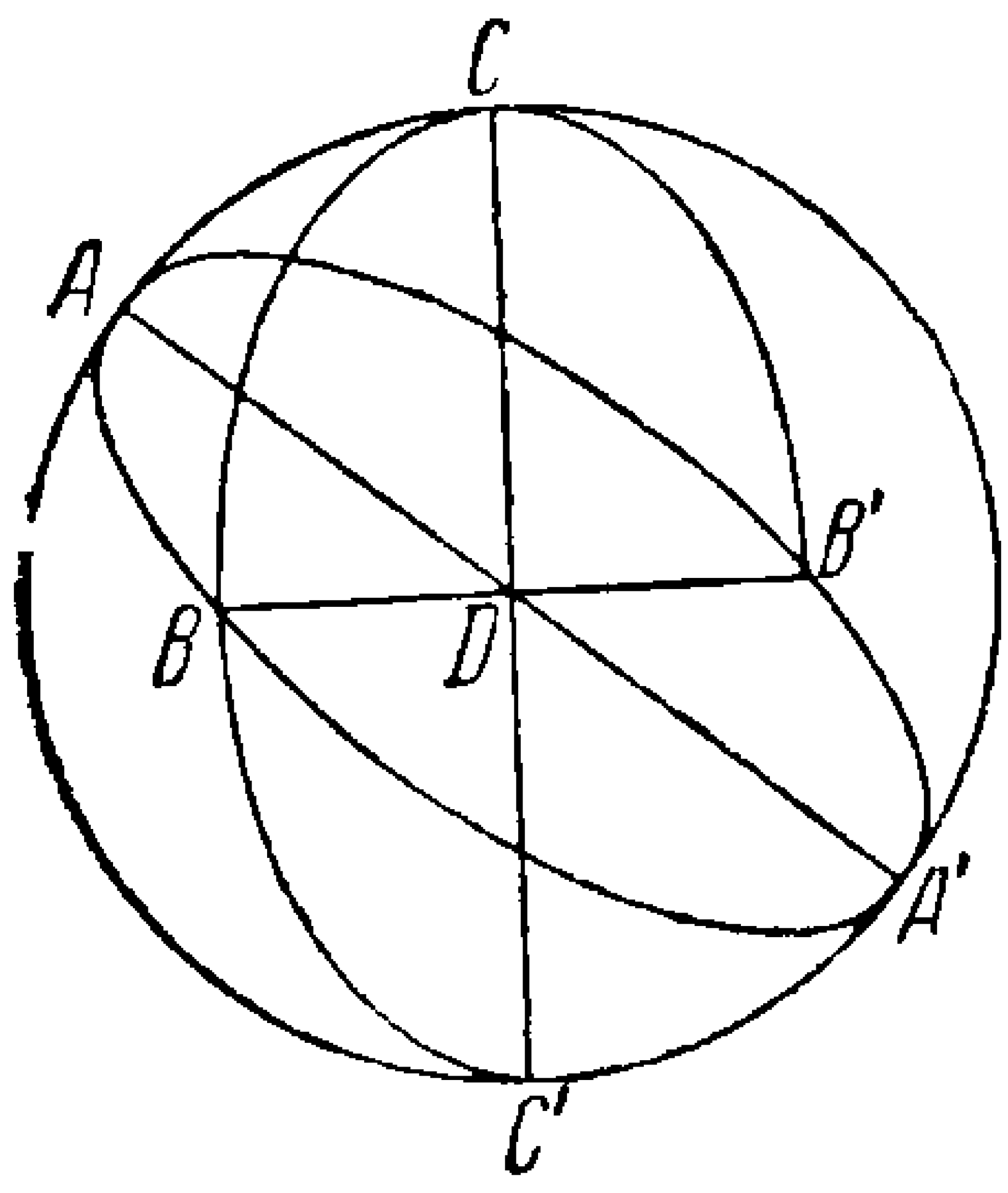
[1] В оригинале сказано „Oberflächen" (поверхностей); в действительности здесь идет речь о равенстве площадей (т. е. о равновеликости) двух фигур. Во всех своих сочинениях Лобачевский называет две фигуры или два тела *равными*, когда они по современной терминологии равновелики. Напротив того, когда они конгруэнтны, он на немецком языке называет их „Congruent", на русском — „одинаковыми" (см. примечание [5]).

[2] На это предложение не следует смотреть как на *определение* равновеликих фигур. Лобачевский им пользуется только в точном соответствии с его выражением, приведенным в тексте: показав в каждом случае, что две фигуры могут быть получены составлением или отделением одинаковых частей, Лобачевский отсюда заключает, что эти фигуры равновелики. Обратное предложение в таком общем виде вовсе несправедливо, т. е. не всякие две равновеликие фигуры могут быть составлены из конечного числа конгруэнтных частей. Впрочем, равновеликие прямолинейные фигуры (многоугольники) всегда допускают разбиение на конгруэнтные фигуры. Об этом см. В. Ф. Каган — О преобразовании многогранников, 2-е изд., М. — Л., 1933.

*

27) *Трехгранный телесный угол равен полусумме его двугранных углов без прямого.*[1]

В сферическом треугольнике ABC (черт. 15), в котором каждая сторона $<\pi$, обозначим углы через A, B, C, продолжим сторону AB так, что образуется полный круг $ABA'B'A$, который разделит сферу на две равные части. В той половине, в которой находится треугольник ABC, продолжим еще две другие стороны за точку их взаимного пересечения C до их пересечений с кругом в A' и B'. Этим полусфера разобьется на четыре треугольника ABC, ACB', $B'CA'$, $A'CB$, величины которых пусть будут P, X, Y, Z. Ясно, что здесь[2]

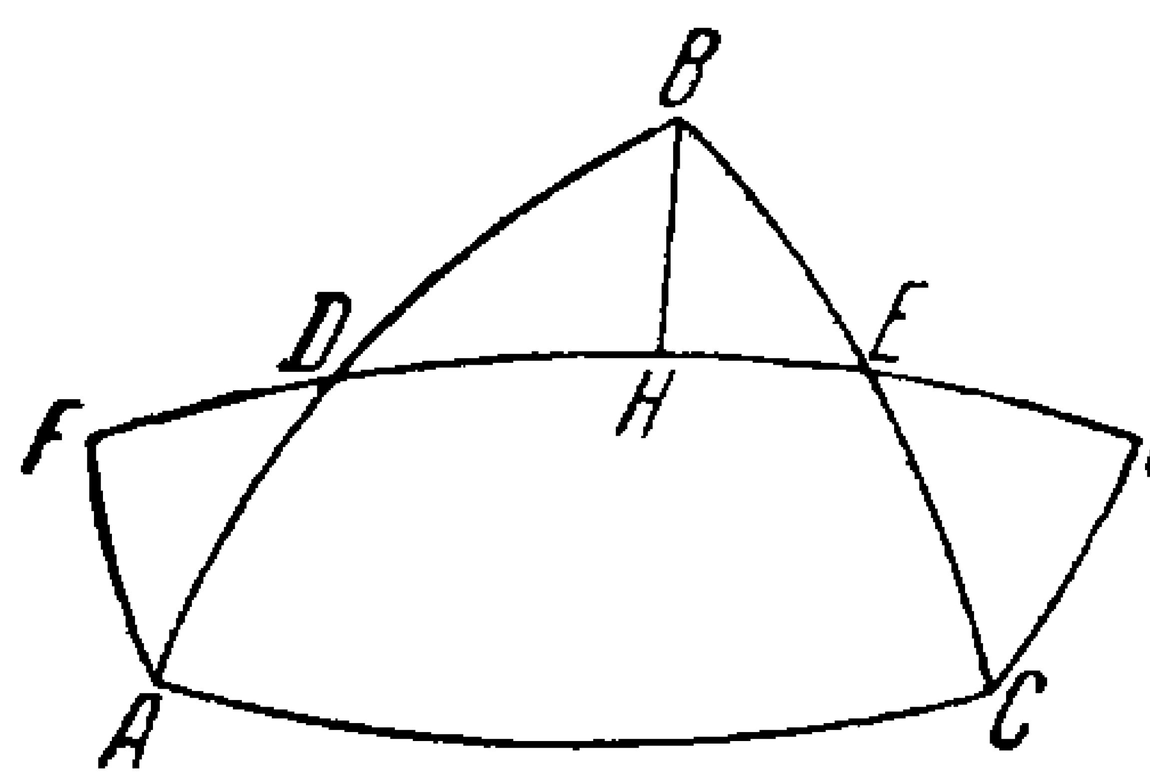


Черт. 15.

$$P+X=B,$$
$$P+Z=A.$$

Величина сферического треугольника Y равна величине противолежащего ему треугольника ABC', в котором сторона AB общая с треугольником P, а третий угол C' лежит при конечной точке диаметра сферы, идущего от C через центр сферы D (предложение 26). Отсюда следует, что $P+Y=C$; а так как $P+X+$ $+Y+Z=\pi$, то мы получаем также

$$P=\frac{1}{2}(A+B+C-\pi).$$



Черт. 16.

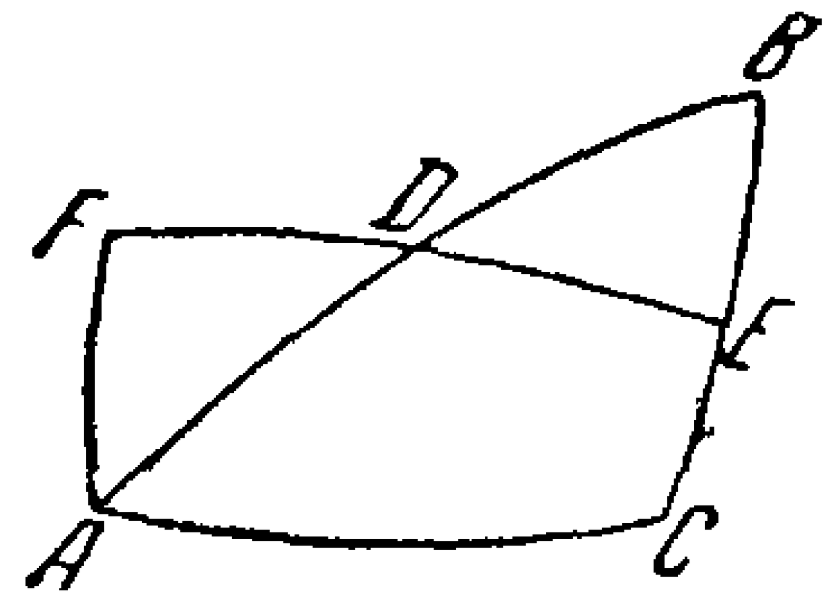
К тому же результату можно притти также и другим путем, опираясь только на предложение, приведенное выше относительно равенства площадей (предложение 26).

---

[1] Трехгранный угол, как и всякий телесный угол, измеряется площадью той части сферы единичного радиуса, которую он на ней вырезывает. Площадь сферического треугольника выражается числом $A+B+$ $+C-\pi$, где A, B, C суть углы треугольника. Сообразно этому предложение, о котором идет речь, должно было бы гласить: „трехгранный телесный угол равен *сумме* его двугранных углов без *двух прямых*". Расхождение обусловлено тем, что Лобачевский выражает площадь сферы не числом 4π, а числом 2π в особого рода единицах. Именно: часть сферы, которую на ней вырезывает двугранный угол α, имеющий ребро на каком-либо диаметре сферы, Лобачевский всегда выражает числом α. Если это угол в один градус, то Лобачевский называет соответствующий вырезок градусом (сферы), вся сфера при его (центезимальном) делении содержит 400°. Если линейный, а вместе с тем и двугранный углы, как в настоящем сочинении, измеряются в радианах, то вся сфера выражается числом 2π.

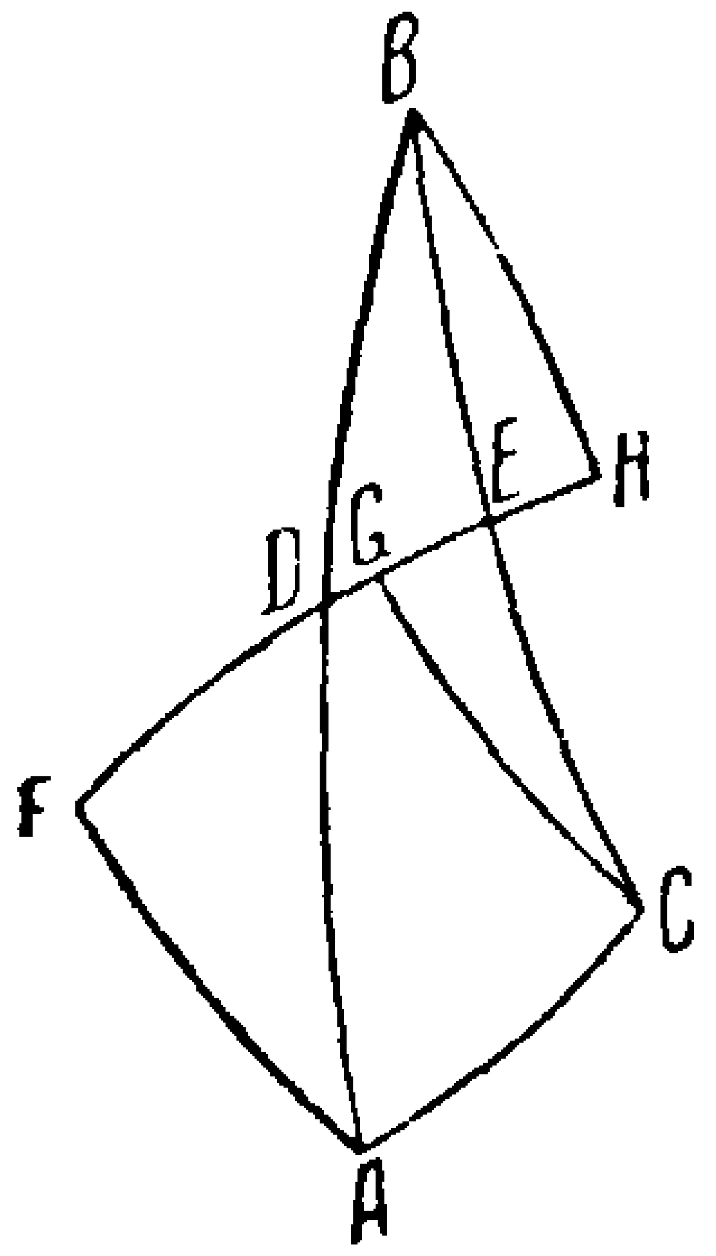
[2] Треугольники P и X образуют сферический „вырезок", который Лобачевский (как выяснено в сноске[1] на этой же странице) выражает тем же числом, что и угол B.

В сферическом треугольнике ABC (черт. 16) разделим стороны AB и BC пополам и через точки деления D и E проведем большой круг DE; из точек A, B, C опустим на этот круг перпендикуляры AF, BH и CG.[1] Если перпендикуляр из B падает в H между D и E, то образующийся таким образом треугольник BDH равен AFD, а BHE равен EGC (предложения 6 и 15); отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна площади четырехугольника $AFGC$ (предложение 26). [2] Если точка H совпадает с серединой E стороны BC (черт. 17), то образуются только два равных прямоугольных треугольника AFD и BDE, замещая которые друг другом, докажем равенство площадей треугольника ABC и четырехугольника $AFEC$. Если, наконец, точка H падает вне треугольника ABC (черт. 18), то мы перейдем от треугольника ABC к четырехугольнику $AFGC$, присоединяя треугольник $FAD = DBH$ и отнимая затем треугольник $CGE = EBH$.

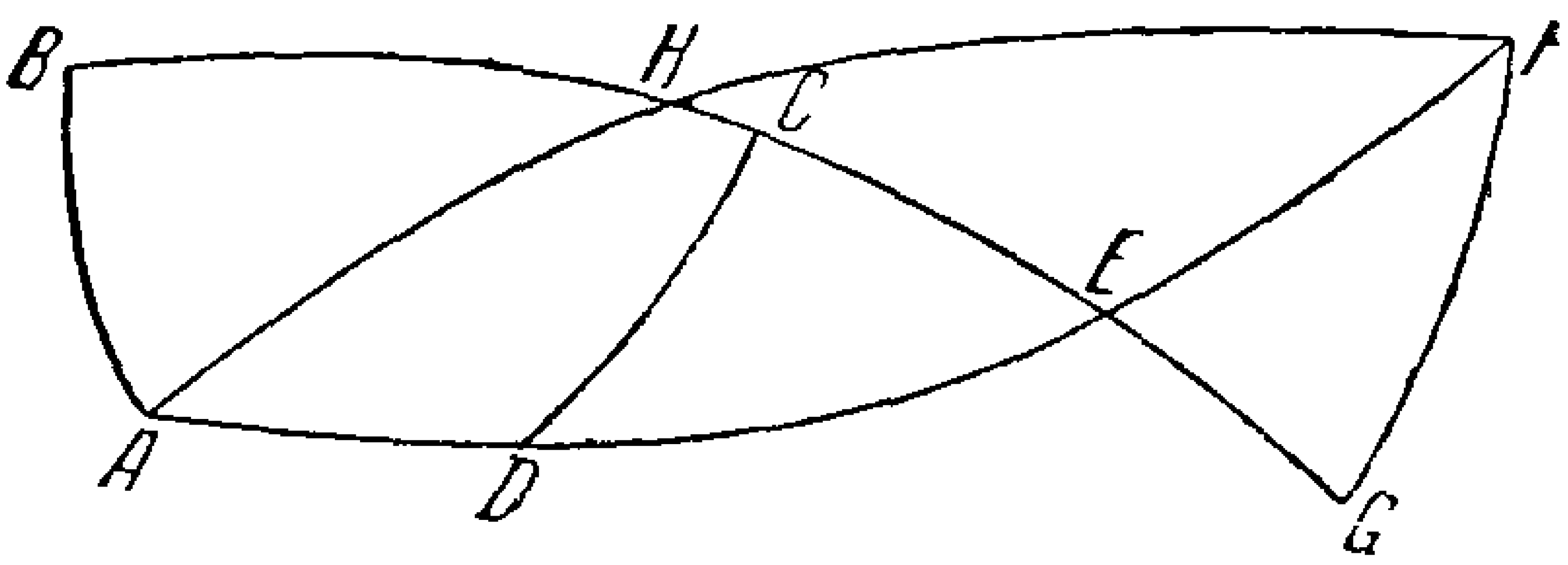


Черт. 17.

Если в сферическом четырехугольнике $AFGC$ представим себе большие круги, проходящие через точки A и G и через F и C, то дуги последних между AG и FC равны (предложение 15); поэтому конгруэнты также треугольники FAC и ACG (предложение 15) и угол FAC равен углу ACG.



Черт. 18.



Черт. 19.

Отсюда следует, что во всех предыдущих случаях сумма всех трех углов сферического треугольника равна сумме обоих равных углов в четырехугольнике по исключении обоих прямых углов.[3] Таким образом, для каждого сферического треугольника, в котором сумма трех углов есть S, можно найти четырехугольник с той же площадью, в котором имеются два прямых угла, две равные перпендикулярные [к основанию] стороны, а каждый из двух остальных углов равен $\frac{1}{2} S$.

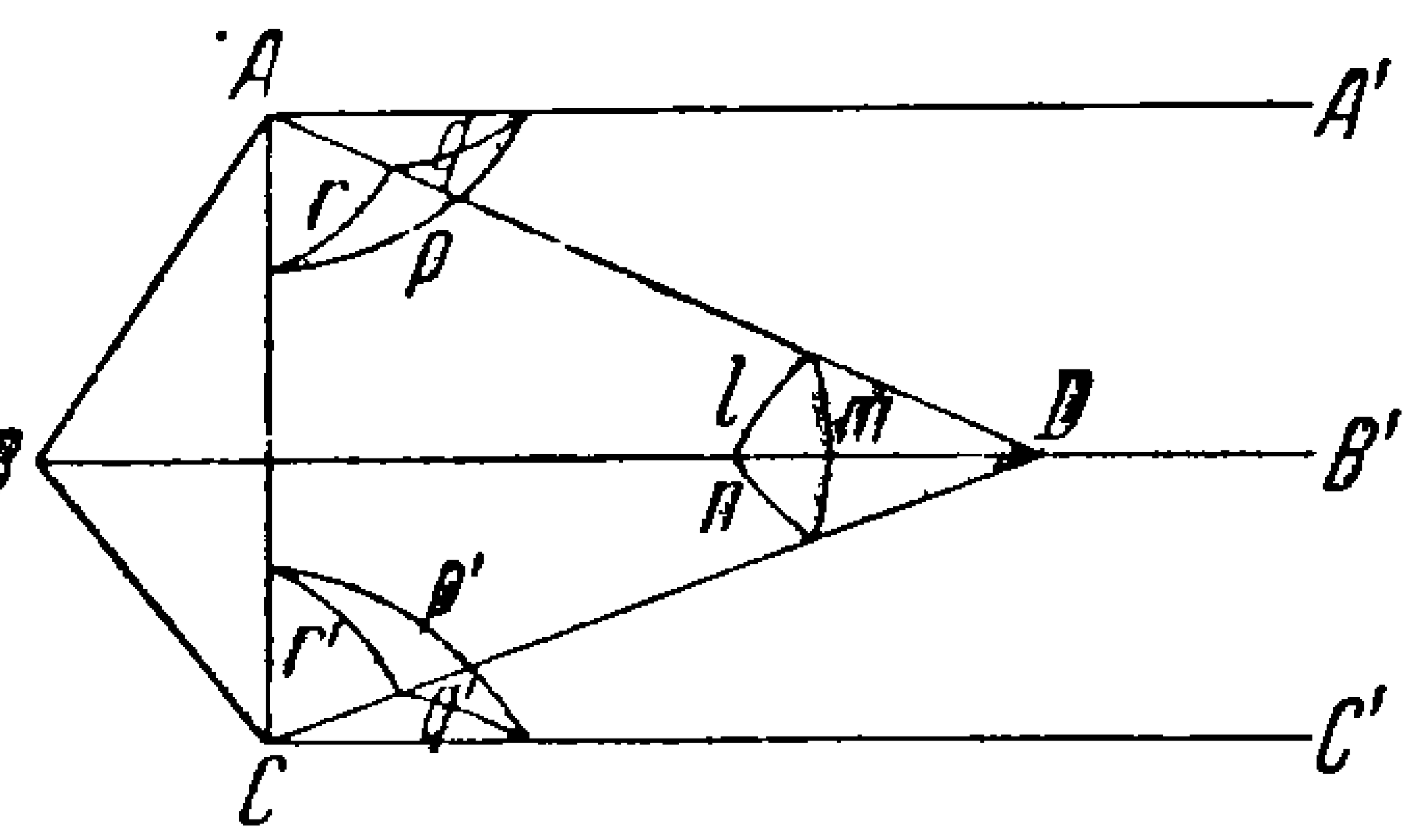
---

[1] Точнее, окружности больших кругов, перпендикулярные к DE.

[2] Треугольники ADF и BDH симметричны относительно точки D; такие симметричные фигуры всегда могут быть приведены в положение, при котором они будут противолежать друг другу на сфере; поэтому находит себе применение предложение 26.

[3] То-есть двух равных углов, которые остаются по исключении двух прямых углов четырехугольника.

Пусть теперь $ABCD$ (черт. 19) будет сферический четырехугольник, в котором стороны $AB=DC$ перпендикулярны к BC и каждый из углов при A и D равен $\frac{1}{2}S$. Продолжим стороны AD и BC до их пересечения в E и далее за точку E, сделаем $DE=EF$ и на продолжение BC опустим перпендикуляр FG. Всю дугу BG разделим пополам и точку деления H соединим дугами больших кругов с A и F. Треугольники EFG и DCE конгруэнтны (предложение 15); следовательно, $FG=DC=AB$. Треугольники ABH и HGF также конгруэнтны, так как они прямоугольные и имеют равные катеты; следовательно, [дуги] AH и HF принадлежат *одному* кругу, дуга AHF равна π,[1] $ADEF$ также $=\pi$, угол $HAD=HFE=\frac{1}{2}S-BAH=\frac{1}{2}S-HFG=\frac{1}{2}S-HFE-EFG=$ $=\frac{1}{2}S-HAD-\pi+\frac{1}{2}S$;[2] следовательно, угол $HFE=\frac{1}{2}(S-\pi)$,[3] или, что то же, равен величине вырезка $AHFDA$, который, в свою очередь, равен четырехугольнику $ABCD$; это легко усмотреть, если перейти от одного к другому, прибавляя сначала [к вырезку] треугольник EFG, а затем [треугольник] BAH и отнимая после этого равные им треугольники DCE и HFG. Сообразно этому $\frac{1}{2}(S-\pi)$ есть величина четырехугольника $ABCD$, а вместе с тем и величина сферического треугольника, в котором сумма трех углов равна S [14].



Черт. 20.

28) *Если три плоскости пересекаются по параллельным линиям, то сумма трех двугранных углов [ими образуемых] равна двум прямым.*

Пусть AA', BB', CC' (черт. 20) будут параллельные линии, образованные пересечением плоскостей (предложение 25). Возьмем на них произвольно три точки A, B, C и представим себе проходящую через них плоскость, которая, следовательно, пересекает плоскости параллелей по прямым линиям AB, AC и BC. Затем через прямую AC и какую-либо точку D на линии BB' проведем еще одну плоскость, которая пересечет две плоскости

[1] Так как большие круги AHF и ADF пересекаются в противоположных точках сферы A и F.

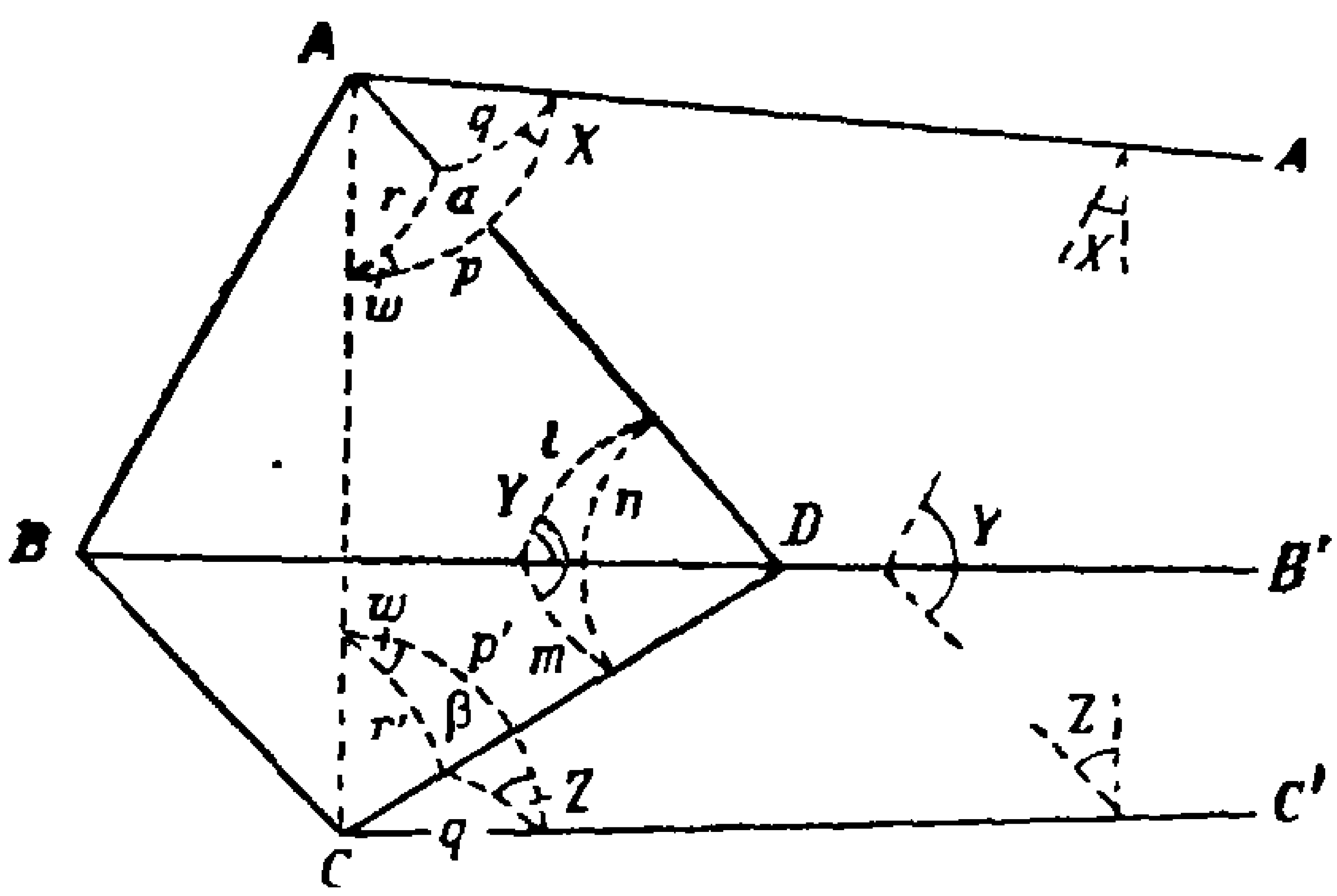
[2] $EFG=EDC=\pi-ADC=\pi-\frac{1}{2}S$.

[3] Из полученного уравнения $HAD=\frac{1}{2}S-HAD-\pi+\frac{1}{2}S$ находим $HAD=\frac{1}{2}(S-\pi)$, а потому то же значение имеет и угол HFE, а следовательно, и сферический вырезок $AHFDA$, как это и выражено в тексте.

параллелей AA' и BB', CC' и BB' по линиям AD и DC; наклонение этой плоскости к третьей плоскости параллелей AA' и CC' обозначим через w. Углы между плоскостями, в которых лежат параллели, обозначим через X, Y, Z соответственно линиям AA', BB', CC'; пусть, далее, прямолинейные углы $BDC = a$, $ADC = b$, $ADB = c$. Представим себе описанную вокруг точки A как центра шаровую поверхность; ее пересечения с прямыми AC, AD, AA' определят сферический треугольник со сторонами p, q и r, величина которого[1] пусть будет α;[2] в нем противолежат стороне q угол w, стороне r угол X, а следовательно, стороне p [противолежит угол] $\pi + 2\alpha - w - X$[3] (предложение 27). Таким же образом [прямые] CA, CD, CC', пересекая шаровую поверхность вокруг центра C, определяют [на ней] треугольник величины β со сторонами p', q', r' и углами: w против q', Z против r' и, следовательно, $\pi + 2\beta - w - Z$ против p'. Наконец, пересечениями шаровой поверхности вокруг D с линиями DA, DB, DC определяется сферический треугольник со сторонами l, m, n, которым противолежат углы $w + Z - 2\beta$, $w + X - 2\alpha$[4] и Y; следовательно, величина этого треугольника $\delta = \frac{1}{2}(X + Y + Z - \pi) - \alpha - \beta + w$. С уменьшением w уменьшается также величина треугольников α и β, так что $\alpha + \beta - w$ может быть сделано меньше любого данного числа. В треугольнике δ стороны l и m также могут быть уменьшаемы до уничтожения (предложение 21). Сле-

[1] То-есть площадь.

[2] Читателю удобнее будет следить не по черт. 20 в тексте Лобачевского, а по прилагаемому чертежу, где добавлены обозначения, вводимые в тексте.



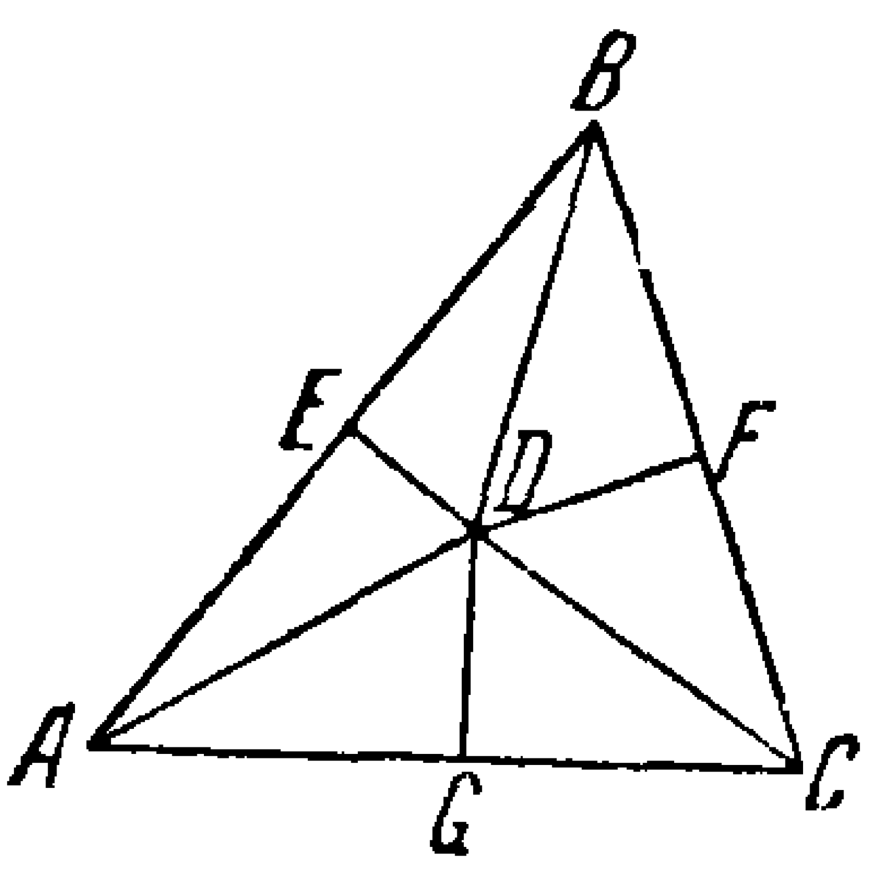
[3] Если искомый третий угол обозначим через ξ, то, в силу предложения 27, $\alpha = \frac{1}{2}(w + X + \xi - \pi)$, откуда $\xi = \pi + 2\alpha - w - X$.

[4] Легко видеть, что стороне l противолежит угол, смежный с тем, который на сфере C противолежит стороне p'. Точно так же стороне m противолежит угол, смежный с тем, который на сфере A противолежит стороне p.

довательно, треугольник δ может быть отложен одной из своих сторон l и m по большому кругу сферы сколько угодно раз и все-таки не заполнит полусферы; поэтому δ исчезает вместе с w:[1] отсюда следует, что необходимо должно быть $X+Y+$ $+Z=\pi$ [[15]].

VII. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЛИНИЯ

29) *В прямолинейном треугольнике перпендикуляры, восставленные из середин сторон, либо [вовсе] не встречаются, либо все три пересекаются в одной точке.*[2]



Черт. 21.

Предположим, что в треугольнике ABC (черт. 21) перпендикуляры ED и DF, восставленные к сторонам AB и BC из середин E и F, пересекаются в точке D; внутри углов треугольника проведем линии DA, DB, DC.

В равных треугольниках ADE и BDE (предложение 10) $AD=BD$; также заключаем, что $BD=CD$; следовательно, ADC есть равнобедренный треугольник, а потому перпендикуляр, опущенный из вершины D на основание AC, падает в середину последнего G.

Доказательство не меняется и в том случае, если точка пересечения D двух перпендикуляров ED и FD падает на самую линию AC или вне треугольника.

Если поэтому примем, что два из этих перпендикуляров не пересекаются, то и третий не может с ними встретиться [[16]].

30) *Перпендикуляры, восставленные к сторонам прямолинейного треугольника из их середин, должны быть все три друг другу параллельны, если предположим параллельность двух из них.*[3]

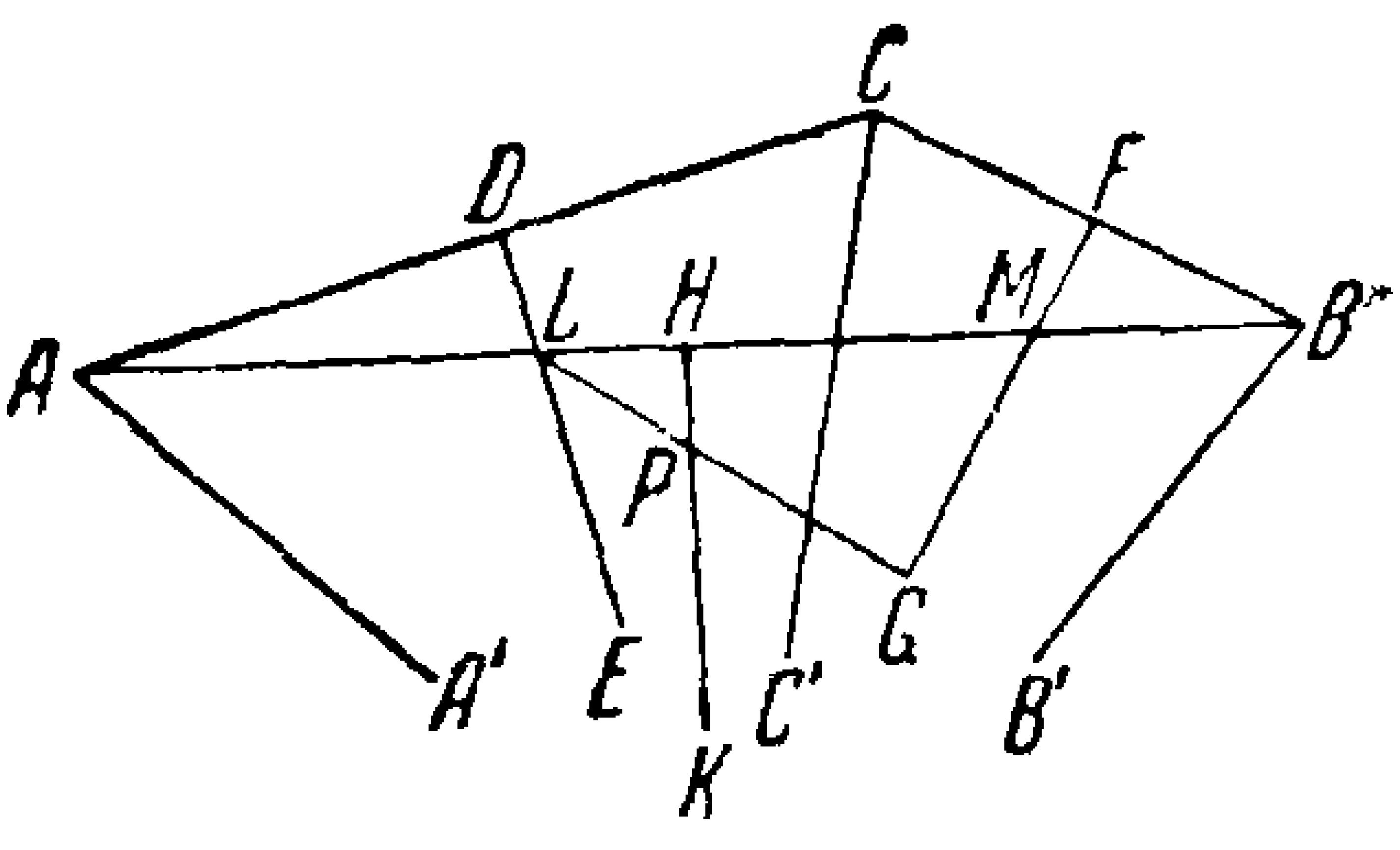
---

[1] Лобачевский хочет сказать, что при неограниченном убывании двух сторон l и m сферического треугольника, которое имеет место, когда точка D беспредельно удаляется по параллели BB', его площадь δ стремится к нулю (неограниченно убывает отношение δ к площади полусферы). В равенстве $\frac{1}{2}(X+Y+Z-\pi)=\alpha+\beta+\delta-w$ правая часть стремится к нулю, а левая сохраняет постоянное значение, которое поэтому не может быть отличным от нуля.

[2] В евклидовой плоскости около всякого треугольника можно описать окружность; перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника из их середин, всегда пересекаются и притом в одной точке, которая и служит центром описанной около треугольника окружности. В неевклидовой геометрии Лобачевского дело обстоит иначе: если в неевклидовой плоскости два из этих перпендикуляров пересекаются, то через точку их пересечения необходимо проходит и третий перпендикуляр; точка пересечения есть центр описанной окружности. Но может случиться, что два перпендикуляра вовсе не пересекутся; в таком случае не пересекаются никакие два из трех перпендикуляров: описанной около треугольника окружности не существует.

[3] Согласно предыдущей теореме эти три перпендикуляра могут друг другом не пересекаться. В этом последнем случае любые два из них

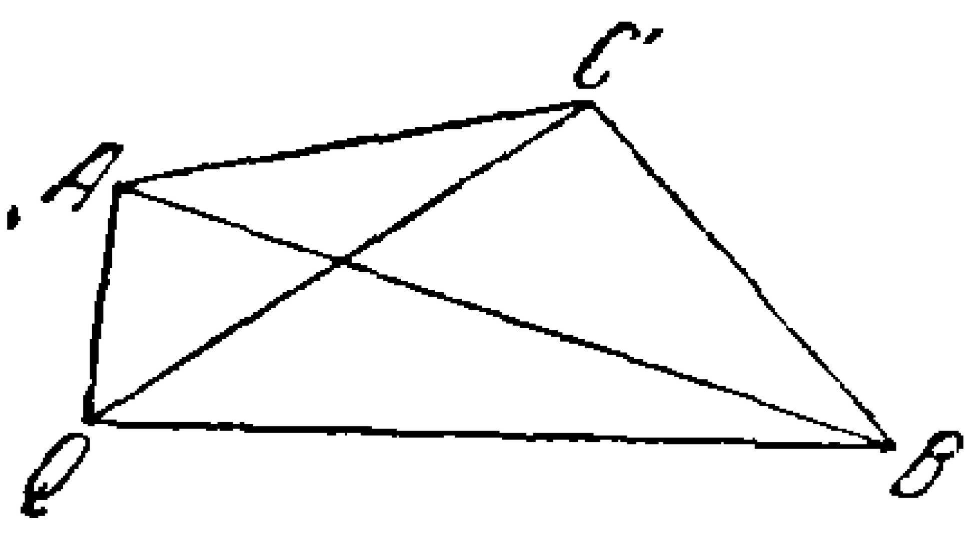
Пусть в треугольнике ABC (черт. 22) линии DE, FG, HK будут перпендикуляры, восставленные к его сторонам в их серединах D, F, H. Примем первоначально, что параллельны перпендикуляры DE и FG, которые пересекают линию AB в L и M.[1] Из точки L внутри угла BLE проведем произвольно прямую линию LG, которая должна встретить FG где-либо в G, как бы мал ни был угол отклонения GLE (предложение 16).[2] Так как в треугольнике LGM перпендикуляр HK не может встретиться с MG[3] (предложение 29), то он должен встретить LG где-либо в P; отсюда следует, что HK должна быть параллельна DE[4] (предложение 16) и MG (предложения 18 и 25).



Черт. 22.

Если положим стороны $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$, а противолежащие этим сторонам углы обозначим через A, B, C, то в рассмотренном сейчас случае

$$A = \Pi(b) - \Pi(c),$$
$$B = \Pi(a) - \Pi(c),$$
$$C = \Pi(a) + \Pi(b),$$



Черт. 23.

как в этом легко убедиться с помощью линий AA', BB', CC', которые проведены из точек A, B, C параллельно перпендикуляру HK, а следовательно, и двум другим перпендикулярам DE и FG (предложения 23 и 25).[5]

Положим теперь, что параллельны перпендикуляры HK и FG; в таком случае третий перпендикуляр DE не может их пересечь (предложение 29); следовательно, он либо параллелен им, либо пересекает AA'[6]. Последнее допущение означает не что иное, как

представляют собой либо параллельные, либо расходящиеся прямые. Настоящее предложение утверждает, что если два из трех перпендикуляров параллельны, то и все три между собой параллельны.

[1] Правильность этой конфигурации, на которой построено все дальнейшее доказательство предложения 30, разъяснена в примечании [17].

[2] Здесь, быть может, была бы уместнее ссылка и на предложение 17: луч DE, параллельный FG, сохраняет признак параллельности и в точке L; поэтому луч LG необходимо пересечет FG.

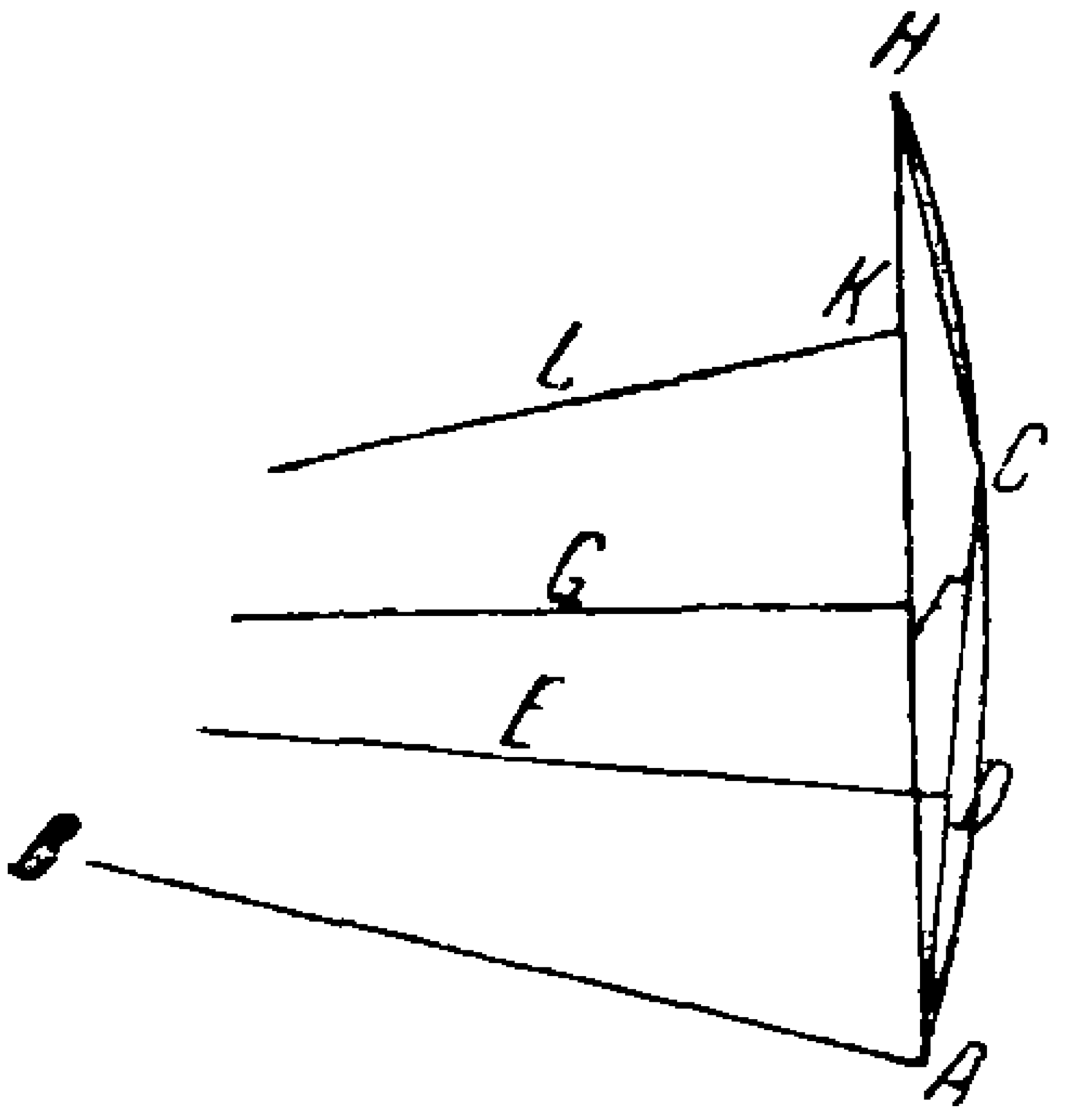
[3] Ибо по условию перпендикуляры HK и MG не встречаются.

[4] Ибо LE не встречает HK по условию, а всякий луч LP, проходящий внутри угла ELH, встречает HK.

[5] Вряд ли здесь уместна ссылка на предложение 23. Ясно, что $\angle A'AD = \Pi(b)$ и $\angle A'AH = \Pi(c)$, откуда и вытекает первое из трех равенств; совершенно таким же образом устанавливаются и два других.

[6] По условию $FG \parallel HK$. Проводим луч AA', параллельный FG и HK (см. черт. a на след. стр.). Всякий луч AQ, проходящий внутри угла $A'AH$, непременно встречает HK, а потому встречает и DE в некоторой точке S. Если поэтому луч AA' не встречает DE, то он ему параллелен.

то, что угол $C > \Pi(a) + \Pi(b)$[1]. Если мы этот угол уменьшим так, чтобы он стал равен $\Pi(a) + \Pi(b)$,[2] сообщая для этого линии AC новое положение CQ (черт. 23), и величину третьей стороны BQ обозначим через $2c'$, то угол CBQ при точке B, который возрос, должен, согласно доказанному выше, быть равен $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$, откуда следует $c' > c$ (предложение 23). Однако в треугольнике ACQ углы при A и Q равны: поэтому в треугольнике ABQ угол при Q должен быть больше, чем при точке A, следовательно, $AB > BQ$ (предложение 9); это значит $c > c'$ [17].

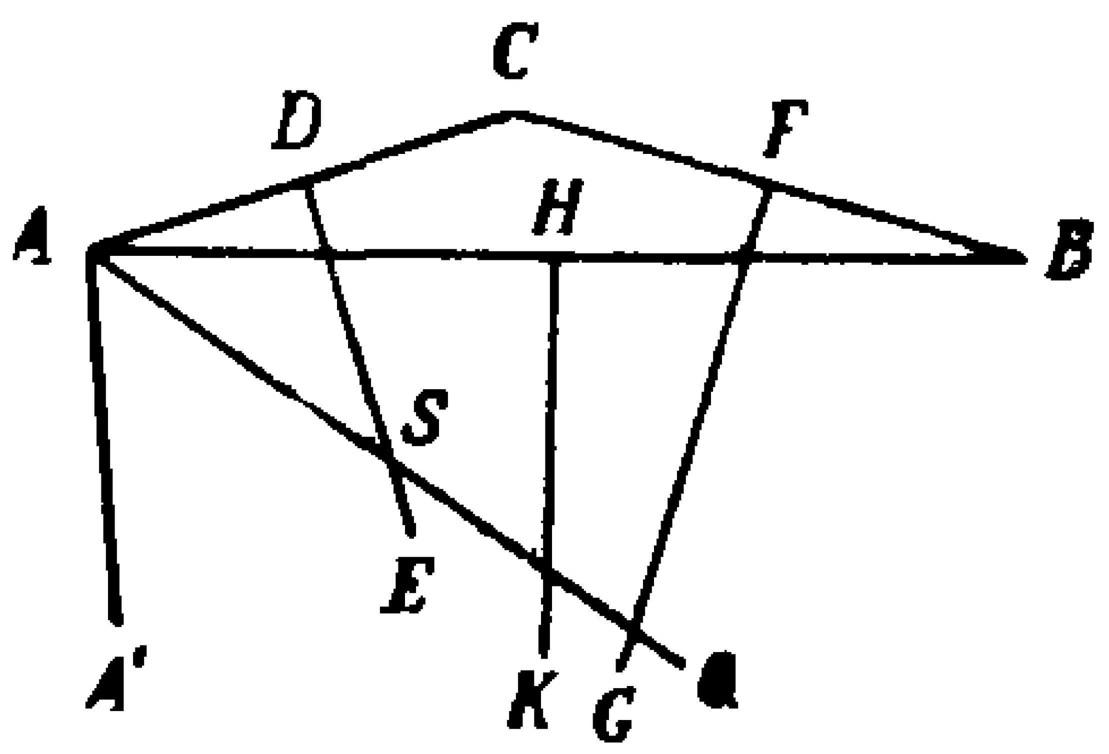


Черт. 24.

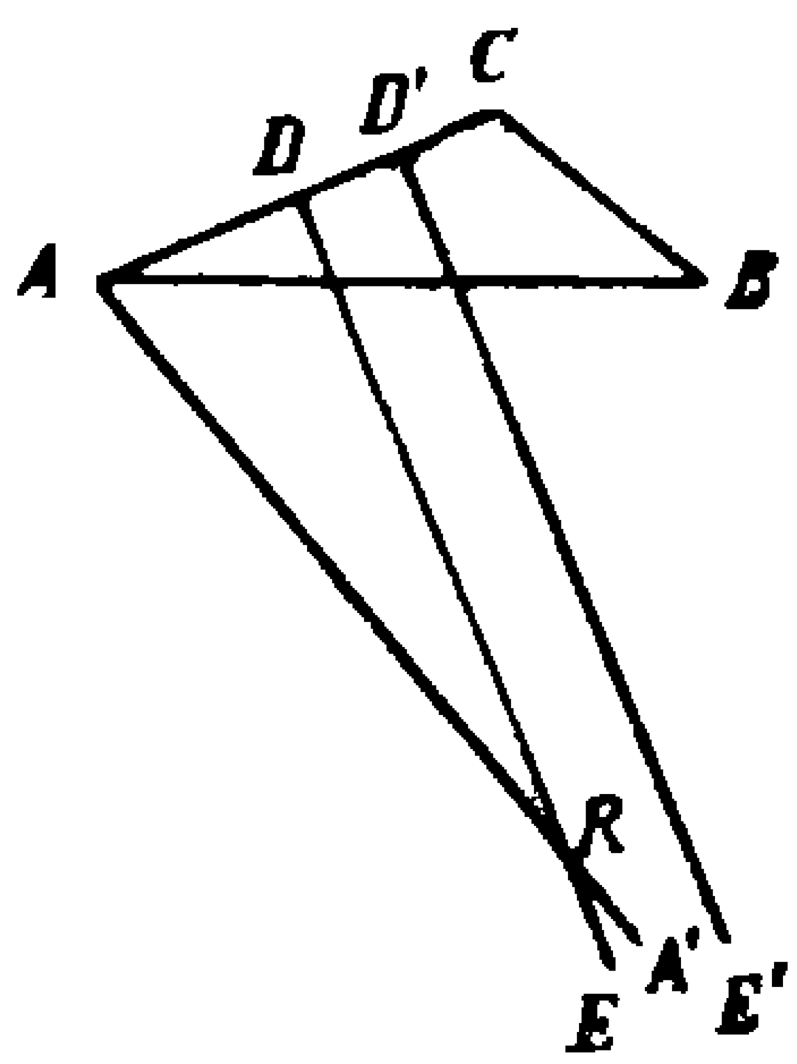
31) *Предельной линией* (*орициклом*) *мы называем такую расположенную в плоскости кривую линию, у которой все перпендикуляры, восставленные из середин ее хорд, параллельны между собой.*

---

[1] Если перпендикуляр DE встречает луч AA' в некоторой точке R (см. чертеж b), то угол RAD или $A'AD$ меньше $\frac{\pi}{2}$. Если поэтому на AD отложим отрезок AD' так, что $\Pi(AD') = \angle A'AD$, т. е. так, что перпендикуляр $D'E'$ к AC параллелен AA', то точка D' должна будет упасть за точку D, т. е. $AD' > b$, а $D'C < b$. Но $\Pi(D'C) = \angle D'CC'$, $\Pi(CF) = \Pi(a) = \angle C'CF$. Поэтому $C = \Pi(D'C) + \Pi(a)$; а так как $D'C < b$, то $\Pi(D'C) > \Pi(b)$ и следовательно, $C > \Pi(b) + \Pi(a)$.

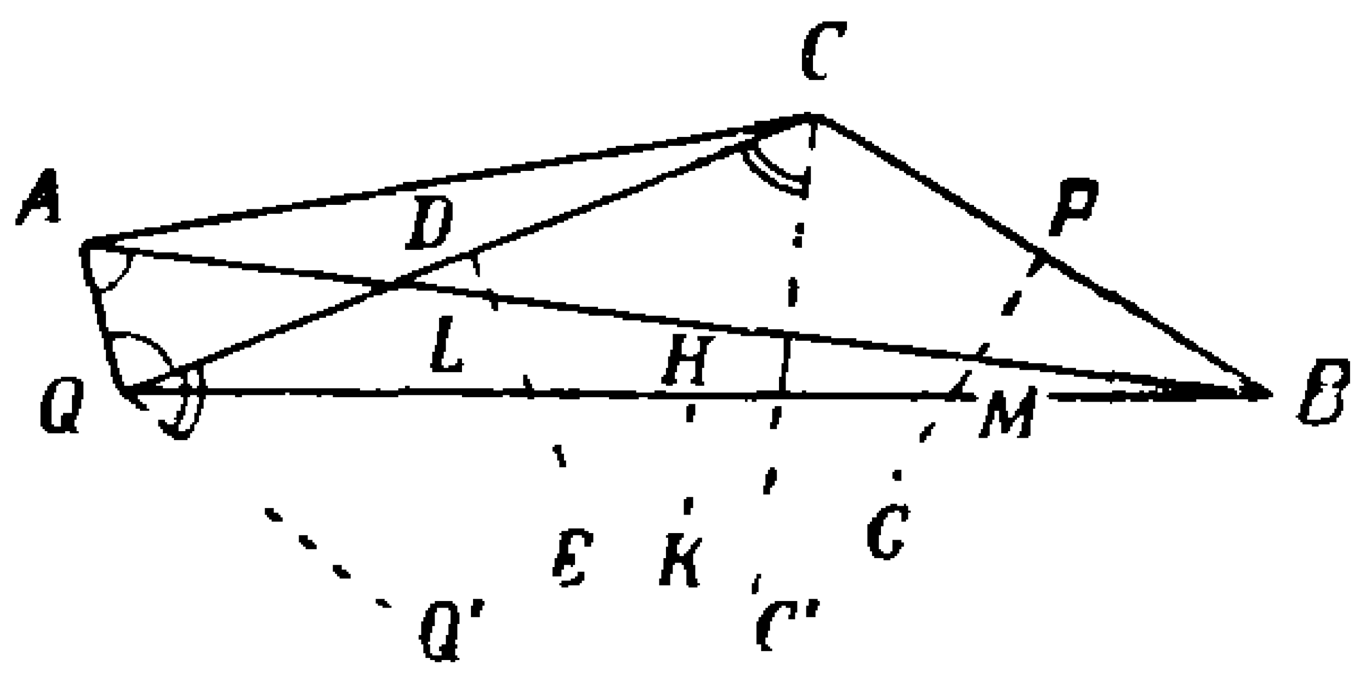


Черт. a.



Черт. b.

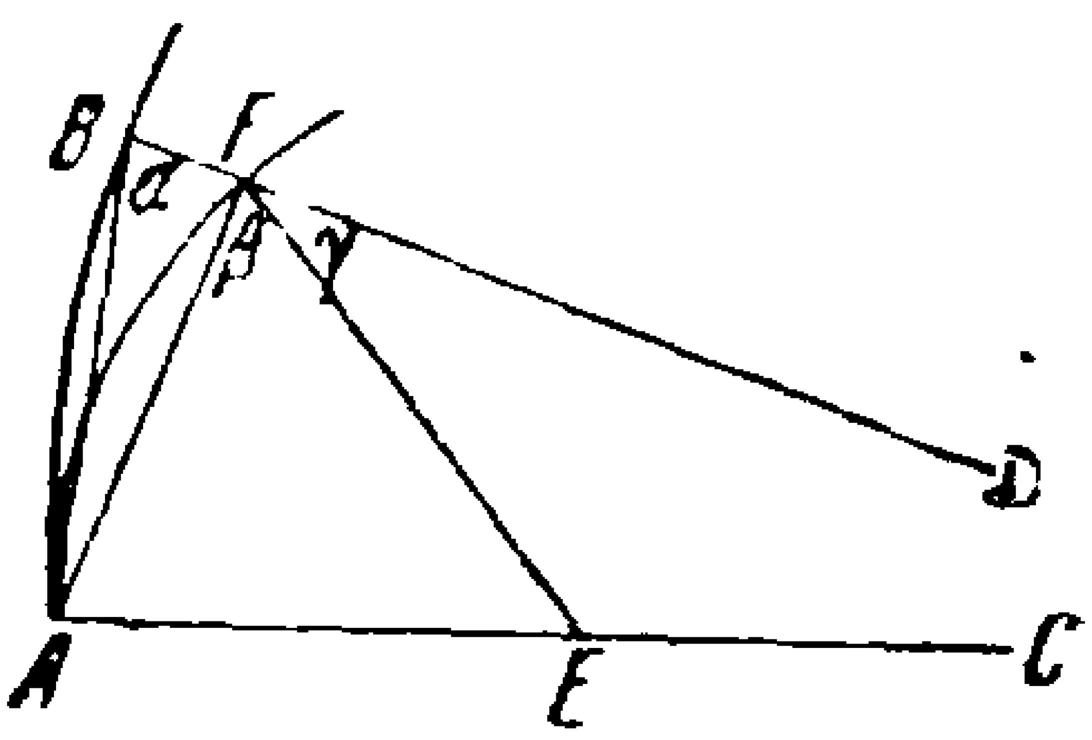
[2] Установив предыдущее неравенство, автор вращает сторону $CA = 2b$ вокруг точки C по направлению к CB. Длины a и b остаются при этом без изменения, вместе с тем сохраняет свое значение и сумма $\Pi(a) + \Pi(b)$; угол же C уменьшается. Поэтому наступит момент, в который $C = \Pi(a) + \Pi(b)$. Этот момент и изображен на черт. 23, который мы здесь для ясности пополняем. Если теперь разделим угол QCB лучом CC' так, чтобы $\angle DCC' = \Pi(b)$, $\angle FCC' = \Pi(a)$, то оба луча DE и FG будут параллельны CC', а потому будут параллельны между собой. С другой стороны, $\angle Q'QD = \angle C'CD = \Pi(b)$. Поэтому $\angle BQD < \angle QCC' < \angle QCB$; отсюда следует $BQ > CB$. Совершенно аналогичным образом докажем, что $BQ > QC$, т. е. $BQ = c$ остается наибольшей стороной в треугольнике BCQ. Мы находимся поэтому вполне в условиях уже



Черт. c.

В согласии с этим определением можно представить себе образование предельной линии, если будем проводить к данной прямой AB (черт. 24) из данной на ней точки A под различными углами $CAB = \Pi(a)$ отрезки $AC = 2a$; конец C такого отрезка будет лежать на предельной линии, точки которой можно, таким образом, постепенно определять. Перпендикуляр DE к хорде AC, восставленный из ее середины D, будет параллелен линии AB, которую мы будем называть *осью предельной линии.* Таким же образом каждый перпендикуляр FG, восставленный из середины какой-либо хорды AH, будет параллелен AB; поэтому это свойство должно принадлежать также каждому перпендикуляру KL, восставленному из середины K хорды CH, между какими бы двумя точками C и H предельной линии она ни была проведена (предложение 30).[1] Этого рода перпендикуляры должны поэтому без отличия от AB называться *осями предельной линии* [18] и [19].

32) *Круг, радиус которого возрастает, переходит в предельную линию.*



Черт. 25.

Пусть AB (черт. 25) будет хорда предельной линии; из ее концов A и B проведем две оси AC и BD, которые, следовательно, образуют с хордой два равных угла $BAC = ABD = \alpha$ (предложение 31). На одной из этих осей AC возьмем где-либо точку E, примем ее за центр круга AF от начальной точки A оси AC до ее пересечения с другой осью BD в точке F. Соответствующий точке F радиус круга FE образует по одну сторону угол $AFE = \beta$ с хордой AF, а по другую сторону угол $EFD = \gamma$ с осью BD. Отсюда вытекает, что содержащийся между двумя хордами угол $BAF = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$[2] (предложение 22); следовательно, $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Однако угол γ уменьшается до нуля как вследствие движения центра E при неизменном по-

---

рассмотренного случая. Перпендикуляры DE и FG пересекают сторону QB в точках L и M, причем середина H стороны BQ лежит между ними. А так как перпендикуляры DE и FG между собой параллельны, то им параллелен и третий перпендикуляр HK, причем имеют место три равенства, установленные выше.

[1] В виду исключительной важности всех соображений, содержащихся в настоящем предложении, они подробнее изложены с различных точек зрения в примечании [18], которое полезно прочесть уже при первом ознакомлении с текстом.

[2] Оси AC и BD, проведенные через концы хорды AB предельной линии, образуют с этой хордой равные углы (теорема 4 в примечании [18]). Поэтому $\angle BAF = \angle BAC - \angle FAE = \alpha - \beta$. С другой стороны, внешний угол AFD треугольника ABF больше суммы внутренних с ним не смежных углов $BAF + ABF$, т. е. $\beta + \gamma > \alpha - \beta + \alpha$, что совпадает с неравенством, приведенным в тексте. Самое же предложение о том, что внешний угол больше суммы внутренних с ним не смежных, вытекает из заключительных соображений предложения 22, на которое Лобачевский ссылается.

ложении точки F (предложение 21)[1], так и вследствие приближения точки F к B по оси BF при неизменном положении центра E (предложение 22); отсюда следует, что при таком уменьшении угла γ исчезает также и угол $\alpha-\beta$, т. е. взаимное наклонение двух хорд AB и AF, а вместе с тем [исчезает] и расстояние точки B на предельной линии от точки F на круге [20].

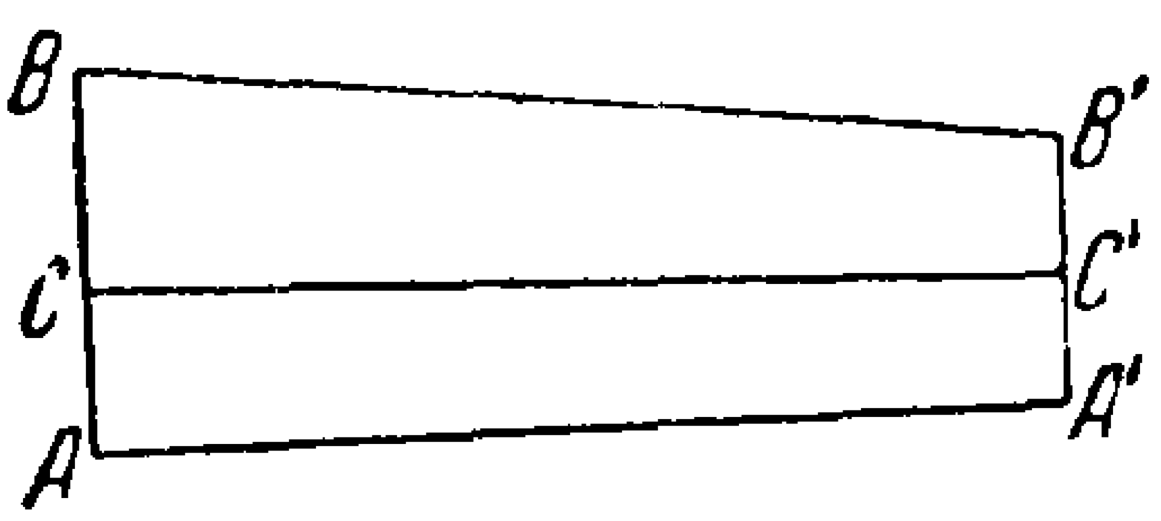
Поэтому предельная линия может называться также *кругом с бесконечно большим радиусом.*

33) Пусть $AA'=BB'=x$ (черт. 26) будут две линии, параллельные в сторону от A к A', а их параллели служат осями двух предельных дуг (дуг на двух предельных линиях) $AB=s$, $A'B'=$ $=s'$; тогда

$$s'=se^{-x},$$

где e не зависит ни от дуг s и s', ни от прямой x, т. е. от расстояния дуги s' от s.

Чтобы это доказать, примем, что отношение дуги s к s' равно отношению двух целых чисел n и m. Между двумя осями AA', BB' проведем еще третью ось CC', которая, таким образом, отсекает от дуги AB часть $AC=t$, а от дуги $A'B'$ с той же стороны — часть $A'C'=t'$. Пусть теперь отношение t к s равно отношению двух целых чисел p и q, так что



Черт. 26.

$$s=\frac{n}{m}s';\ t=\frac{p}{q}s.$$

Разделим теперь s осями на nq равных частей; тогда таких частей окажется mp на s' и np на t. Между тем эти равные части на s и t соответствуют также равным частям на s' и t'; следовательно [21],

$$\frac{t'}{t}=\frac{s'}{s}.$$

Таким образом, где бы мы ни взяли две дуги t и t' между двумя осями AA' и BB', отношение t к t' остается то же, пока между ними остается то же расстояние x. Если поэтому для $x=1$ положим $s=es'$, то для любого x должно быть [22]

$$s'=se^{-x}.$$

Так как e есть неизвестное число, подчиненное только условию $e>1$, а, с другой стороны, единица для измерения длины x

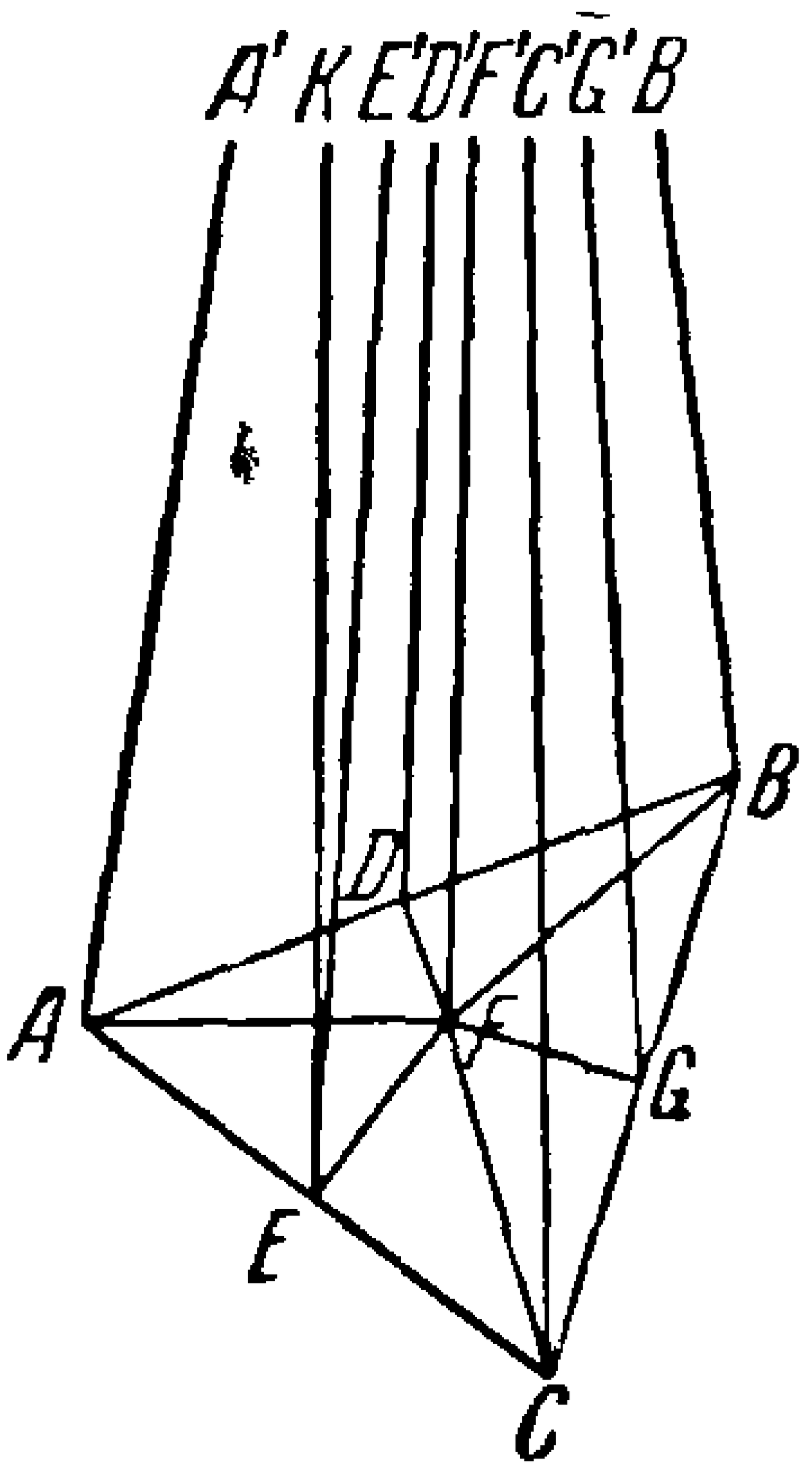
[1] Ссылка на предложение 21 неправильна. Из этого предложения можно было бы только заключить, что угол AEF стремится к нулю, когда точка E неограниченно удаляется вдоль оси AC. Угол же EFD неограниченно убывает потому, что луч FD параллелен AC, и тогда луч FE встречает AC при сколь угодно малом угле DFE. Все рассуждение доведено до конца в примечании [20].

может быть выбрана произвольно, то последнюю можно для упрощения вычислений выбрать так, что под e можно будет разуметь основание неперовых логарифмов.

Здесь можно еще отметить, что $s' = 0$ для $x = \infty$; поэтому расстояние между двумя параллелями (предложение 24) не только уменьшается, но при продолжении их в сторону параллелизма в конце концов (zuletzt) совершенно исчезает. Параллельные линии имеют, таким образом, характер асимптот.

VIII. ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

34) *Предельной поверхностью* (орисферой) называется поверхность, которая получается вращением предельной линии вокруг одной из своих осей, каковая вместе со всеми другими осями предельной линии будет также осью поверхности.[1]



Черт. 27.

Хорда [предельной поверхности] *наклонена под равными углами к осям, проведенным через ее конечные точки, где бы на поверхности эти две точки ни были взяты.*

Пусть A, B, C (черт. 27) будут три точки на предельной поверхности, AA' пусть будет ось вращения, BB' и CC' — две другие оси; следовательно, AB и AC суть хорды, к которым оси наклонены под равными углами $A'AB = B'BA$, $A'AC = C'CA$ (предложение 31);[2] две оси BB' и CC', проведенные через концы третьей хорды BC, также параллельны и лежат в одной плоскости (предложение 25). Перпендикуляр DD', восставленный из середины D хорды AB в плоскости двух параллелей, должен быть параллелен трем осям AA', BB', CC' (предложения 23 и 25),[3] такой же перпендикуляр EE' к хорде AC в плоскости параллелей AA', CC' будет параллелен трем осям AA', BB', CC' и перпендикуляру DD'. Угол между плоскостью, в которой расположены

---

[1] Предложение 34 составляет главную основу всего дальнейшего развития неевклидовой геометрии. Примечание [23] содержит тщательный его анализ и ряд указаний для уяснения дальнейшего текста.

[2] Так как AA' есть ось вращения, то BB' и CC' суть оси предельных линий, служащих меридианами; поэтому оси BB' и AA' одинаково наклонены к хорде AB, а оси CC' и AA' одинаково наклонены к хорде AC (см. примечание [18] к предложению 31, теорема 4). В предложении 31, на которое Лобачевский ссылается, это свойство предельной линии, конечно, содержится, но явно не выражено.

[3] Ссылка на предложение 23 вряд ли обоснована. Первое утверждение, что перпендикуляр DD' параллелен осям AA' и BB', основано на самом определении предельной линии (предложение 31); вследствие предложения 25 он параллелен также оси CC'.

параллели AA' и BB', и плоскостью треугольника ABC обозначим через $\Pi(a)$, где a может быть [числом] положительным, отрицательным или нулем.[1] Если a положительно, то проведем $FD=a$ внутрь треугольника ABC в его плоскости перпендикулярно к хорде AB в ее середине D. Если a будет числом отрицательным, то нужно провести $FD=a$ вне треугольника по другую сторону хорды AB; если $a=0$, то точка F совпадает с D.[2] Во всех случаях получаем два равных прямоугольных треугольника AFD и DBF; следовательно, $FA=FB$. Теперь из точки F восставим перпендикуляр FF' к плоскости треугольника ABC.

Так как угол $D'DF=\Pi(a)$, $DF=a$, то [линия] FF' параллельна DD' и линии EE', с которой она [поэтому] также лежит в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC.[3] Если теперь представим себе перпендикуляр EK, восставленный к EF в плоскости параллелей EE' и FF', то он будет также перпендикулярен к плоскости треугольника ABC (предложение 13) и к лежащей в этой плоскости прямой AE (предложение 11); поэтому [линия] AE, перпендикулярная к EK и EE', будет также перпендикулярна к FE (предложение 11).[4] Треугольники AEF и FEC равны, как прямоугольные с равными катетами; поэтому $AF=$ $=FC=FB$. Перпендикуляр из вершины F равнобедренного треугольника BFC на основание BC проходит через середину последнего G; плоскость, проходящая через этот перпендикуляр FG и линию FF', должна быть перпендикулярна к плоскости треугольника ABC и пересекать плоскость параллелей BB', CC' по линии GG', которая также параллельна AA' и BB' (предложение 25); так как теперь CG перпендикулярна к FG, а потому и к GG', то угол $C'CG=B'BG$ (предложение 23).

---

[1] См. примечание к предложению 23 на стр. 84. Если α есть линейный угол этого двугранного угла, то он здесь определяется тем числом a, для которого $\Pi(a)=\alpha$. Этот угол может оказаться острым, прямым или тупым, соответственно чему, как указано в тексте, a имеет положительное, нулевое или отрицательное значение. Этим способом определения угла Лобачевский в дальнейшем пользуется очень часто (см. примечание [25] к предложению 35, стр. 102).

[2] См. предыдущую сноску.

[3] Плоскость $D'DF$ перпендикулярна к прямой AB, а потому перпендикулярна и к плоскости ABC [это предложение не фигурирует среди основных 15 предложений (см. сноску [2] на стр. 38), но явно не зависит от постулата о параллельных линиях]. Перпендикуляр FF', восставленный к прямой DF в плоскости $D'DF$, будет перпендикулярен и к плоскости ABC (предложение 13), или, иначе, перпендикуляр FF', восставленный из точки F к плоскости ABC, лежит в плоскости $D'DF$. А так как $\angle D'DF=\Pi(DF)$, то луч DD' параллелен лучу FF'.

[4] Прямая AE перпендикулярна к линии EE'; EF есть проекция линии EE на плоскость ABC; поэтому прямая AE перпендикулярна к EF. Казалось бы, можно было непосредственно сослаться на предложение о перпендикуляре к проекции и к проектируемой линии. Но обычное доказательство этого предложения существенно предполагает, что наклонная EE и проектирующий перпендикуляр FF' пересекаются. Вследствие этого Лобачевский восполняет это доказательство для того случая, когда луч EE' параллелен лучу FF'.

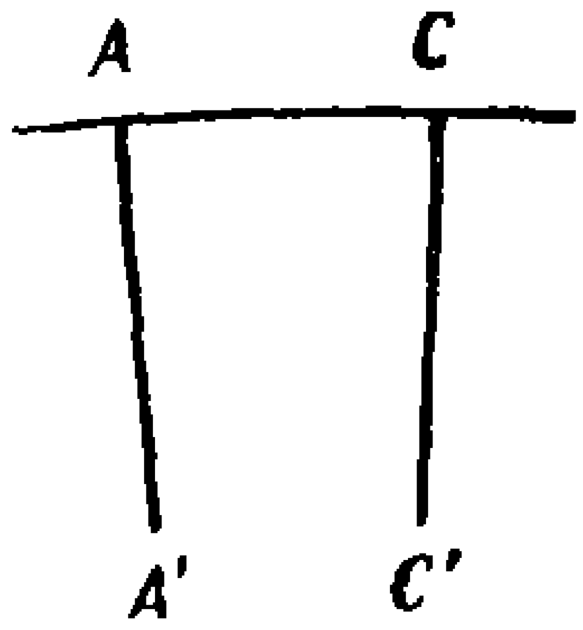
Отсюда следует, что для предельной поверхности каждая из ее осей может быть рассматриваема как ось поверхности [23].

Главной плоскостью мы будем называть каждую плоскость, проведенную через ось предельной поверхности. Сообразно этому каждая *главная плоскость* сечет предельную поверхность по предельной линии, [1] между тем как при другом положении секущей плоскости это пересечение есть круг. [2] Три главные плоскости, пересекающие друг друга, образуют друг с другом углы, сумма которых равна π (предложение 28). Эти углы мы будем рассматривать как углы в предельном треугольнике, сторонами которых служат дуги предельных линий, образуемых пересечением предельной поверхности этими тремя главными плоскостями. [3]

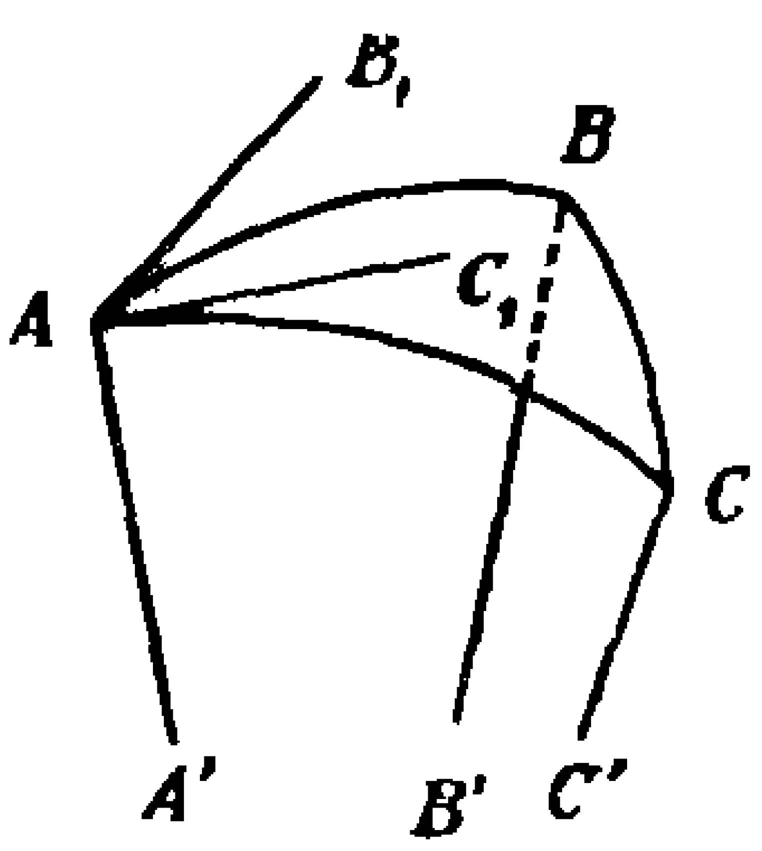
В предельных треугольниках стороны и углы связаны поэтому теми же зависимостями, которые устанавливаются в обыкновенной геометрии для прямолинейных треугольников [24]. [4]

---

[1] Через ось AA' поверхности проведем плоскость, которая рассечет поверхность по некоторой линии AC. Как было показано выше, луч AA' можно рассматривать как ось, вращением вокруг которой линия AC образует поверхность; следовательно, AC есть предельная линия. Особенно отчетливо это выясняется, если исходить из другого определения предельной линии и поверхности (примечание [18] к предложению 31 и примечание [23] к настоящему предложению). По этому определению C есть точка луча CC', соответствующая точке A луча AA'; но тогда в плоскости параллелей AA', CC' точка C лежит на предельной линии, определяемой точкой A и осью AA'.



[2] Если A, B, C суть три точки сечения, то через них, как доказано выше (см. примечание 23), проходит окружность (черт. 27 текста). Перпендикуляр FF' из центра этой окружности представляет собой ось поверхности. Плоскости $FF'AA'$, $FF'BB'$, $FF'CC'$ секут поверхность по трем предельным линиям При вращении вокруг оси FF' каждая из этих предельным линий образует рассматриваемую поверхность. Мы можем эти предельные линии рассматривать как меридианы; плоскость же ABC сечет поверхность по параллели, т. е. по окружности.



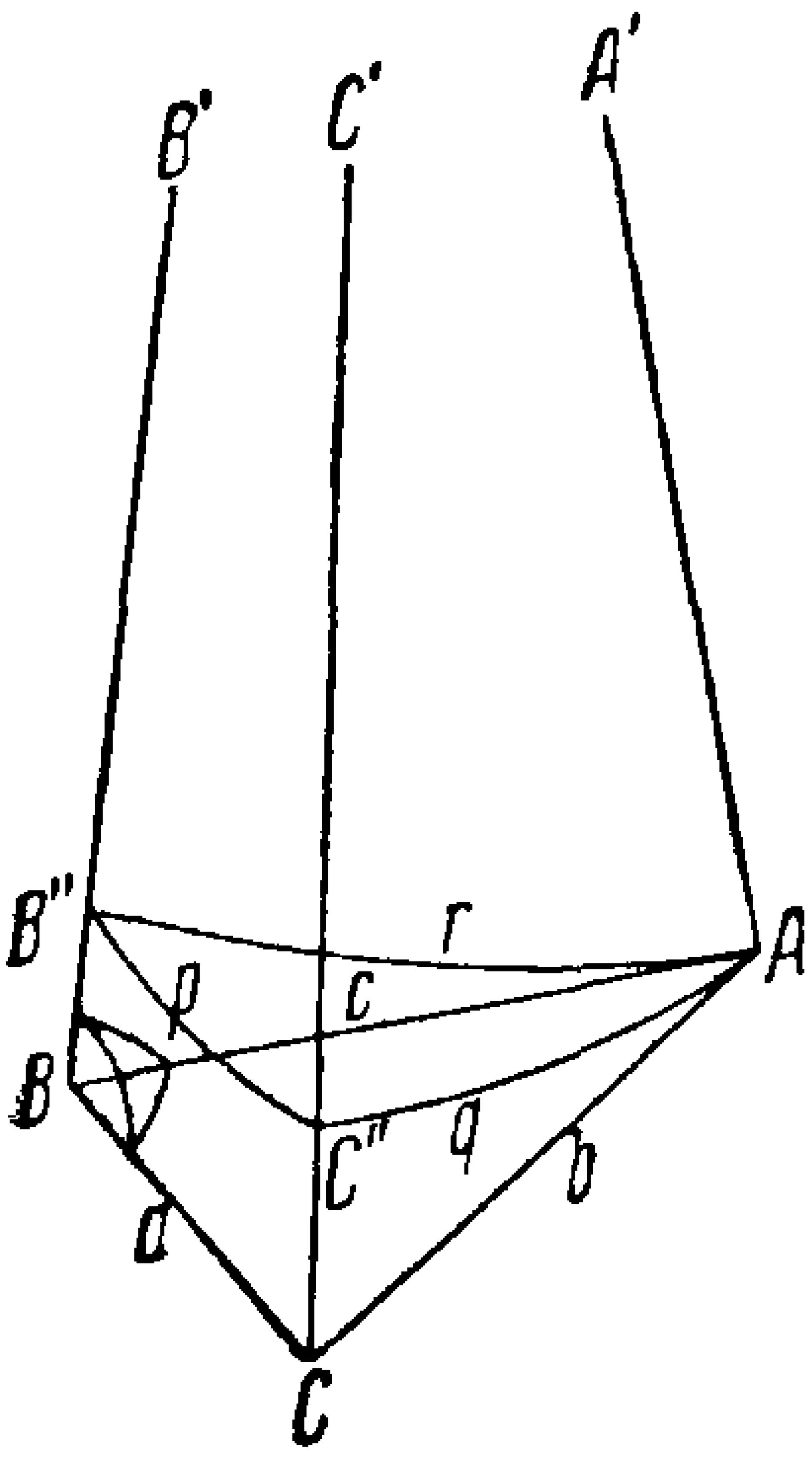
[3] Пусть ABC будет *предельный треугольник*, т. е. треугольник, составленный на предельной поверхности предельными линиями AB, BC, CA. Плоскости этих предельных линий пересекаются по осям AA', BB', CC'. Согласно предложению 28 сумма двугранных углов, этими плоскостями образуемых, равна π. Если в вершине A проведем касательные AB_1 и AC_1 к предельным линиям AB и AC, то они образуют линейный угол B_1AC_1 двугранного угла AA' (см. примечание [18] предложения 31, теорему 5); с другой стороны, тем же углом B_1AC_1 измеряется и угол A предельного треугольника; то же относится и к углам B и C. Поэтому в предельном треугольнике ABC сумма углов $A+B+C=\pi$.

[4] Последнее соображение устанавливает факт весьма большой важности, обстоятельному выяснению которого посвящено примечание [24].

IX. УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ СТОРОНЫ И УГЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

35) В дальнейшем мы будем обозначать величину линий буквой со штрихом, например x', чтобы указать, что таковая находится к другой линии, обозначаемой той же буквой без штриха, в соотношении, выраженном уравнением [25]

$$\Pi(x)+\Pi(x')=\frac{1}{2}\pi.$$



Черт. 28.

Пусть теперь ABC (черт. 28) будет прямолинейный прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза $AB=c$, катеты $AC=b$, $BC=a$, а противолежащие им углы суть $BAC=\Pi(\alpha)$, $ABC=\Pi(\beta)$.[1] В точке A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника ABC и из точек B и C проведем BB' и CC' параллельно AA'. Плоскости, в которых эти три параллели лежат, образуют между собой углы $\Pi(\alpha)$ при AA', прямой при CC' (предложения 11 и 13) и, следовательно, $\Pi(\alpha')$ при BB' (предл. 28).[2]

Пересечения линий BA, BC, BB' с шаровой поверхностью, описанной вокруг точки B как центра, определяют сферический треугольник mnk, в котором стороны $mn=\Pi(c)$, $kn=\Pi(\beta)$, $mk=\Pi(a)$; противолежащие им углы суть $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$.[3]

---

[1] Иными словами, каждый из острых углов прямоугольного треугольника ABC задается его гиперболическим значением α и β. О гиперболическом значении углов см. примечание [25].

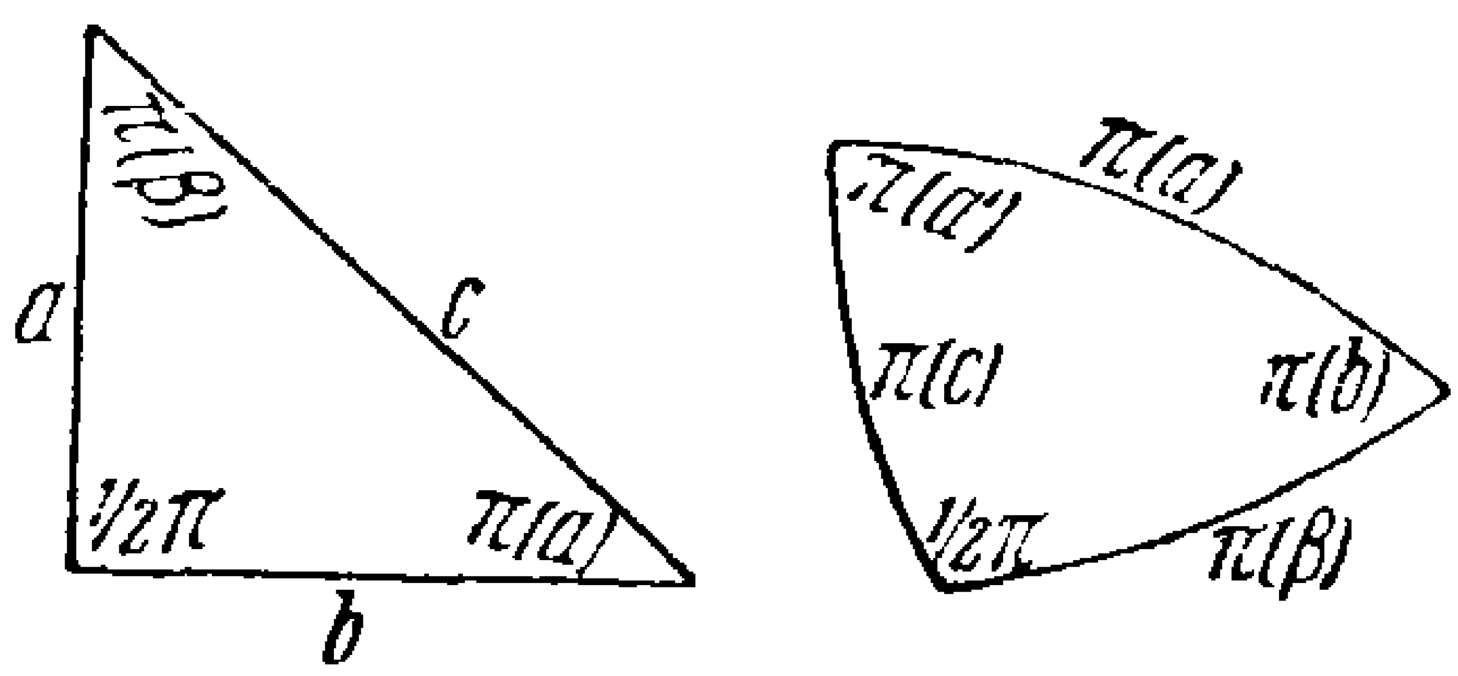
[2] Двугранный угол (AA') измеряется углом A треугольника ABC', гиперболическое значение которого обозначено через α; следовательно, $(AA')=\Pi(\alpha)$. Плоскость $C'CA$, проходящая через перпендикуляр AA к плоскости ABC, перпендикулярна к последней. Прямая BC, перпендикулярная к линии пересечения взаимно перпендикулярных плоскостей ACB и $AA'CC'$ и лежащая в первой из них, перпендикулярна ко второй (ссылка на предложение 13 в тексте). Поэтому плоскость $BB'CC'$, проходящая через BC, перпендикулярна к плоскости $AA'CC'$, двугранный угол (CC') прямой. Сумма двугранных углов (AA'), (BB'), (CC') равна π (ссылка на предложение 28 в тексте); поэтому угол (BB') дополняется углом (AA') до прямого; его гиперболическое значение есть α'.

[3] Вершины m, n, k сферического треугольника на чертеже Лобачевского не обозначены: вершина m лежит на прямой BB', n на BA, k на BC. Сторона mn сферического треугольника измеряется углом $B'BA$; так как луч BB' параллелен AA', а AA' перпендикулярен к AB, то этот угол есть $\Pi(c)$; сторона mk таким же образом измеряется углом $B'BC=\Pi(a)$; сторона же kn измеряется углом B прямолинейного треугольника ABC, гиперболическое значение которого обозначено через β. Угол m сферического треугольника измеряется двугранным углом BB' и поэтому равен, как было показано, $\Pi(\alpha')$; угол k измеряется двугранным

Поэтому вместе с существованием прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ нужно допустить также существование сферического треугольника (черт. 29) со сторонами $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами

$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{1}{2}\pi.$$

Но и, обратно, для этих двух треугольников существование сферического треугольника влечет за собой существование прямолинейного, который поэтому также может иметь стороны a, α', β и противолежащие им углы $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$.[1]



Черт. 29.

Поэтому от a, b, c, α, β можно перейти к b, a, c, β, α, а также к a, α', β, b', c [26].

Представим себе предельную поверхность, проходящую через точку A и имеющую осью [линию] AA' (черт. 28); [эта поверхность] пересечет две другие оси BB' и CC' в B'' и C'', а пересечения ее с плоскостями параллелей образуют предельный треугольник, стороны которого $B''C''=p$, $C''A=q$, $B''A=r$, противолежащие же им углы суть $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$,[2] следовательно, $p=r\sin\Pi(\alpha)$, $q=r\cos\Pi(\alpha)$.

Теперь нарушим соединение трех главных плоскостей по линии BB' и развернем их таким образом, чтобы они вместе со всеми находящимися в них линиями расположились в одной плоскости; в этой плоскости дуги p, q, r соединятся в одну дугу предельной линии, проходящей через точку A и имеющей AA' своей осью (черт. 30);[3] при этом по одну сторону [оси AA'] расположатся дуги q и p; сторона b треугольника, которая

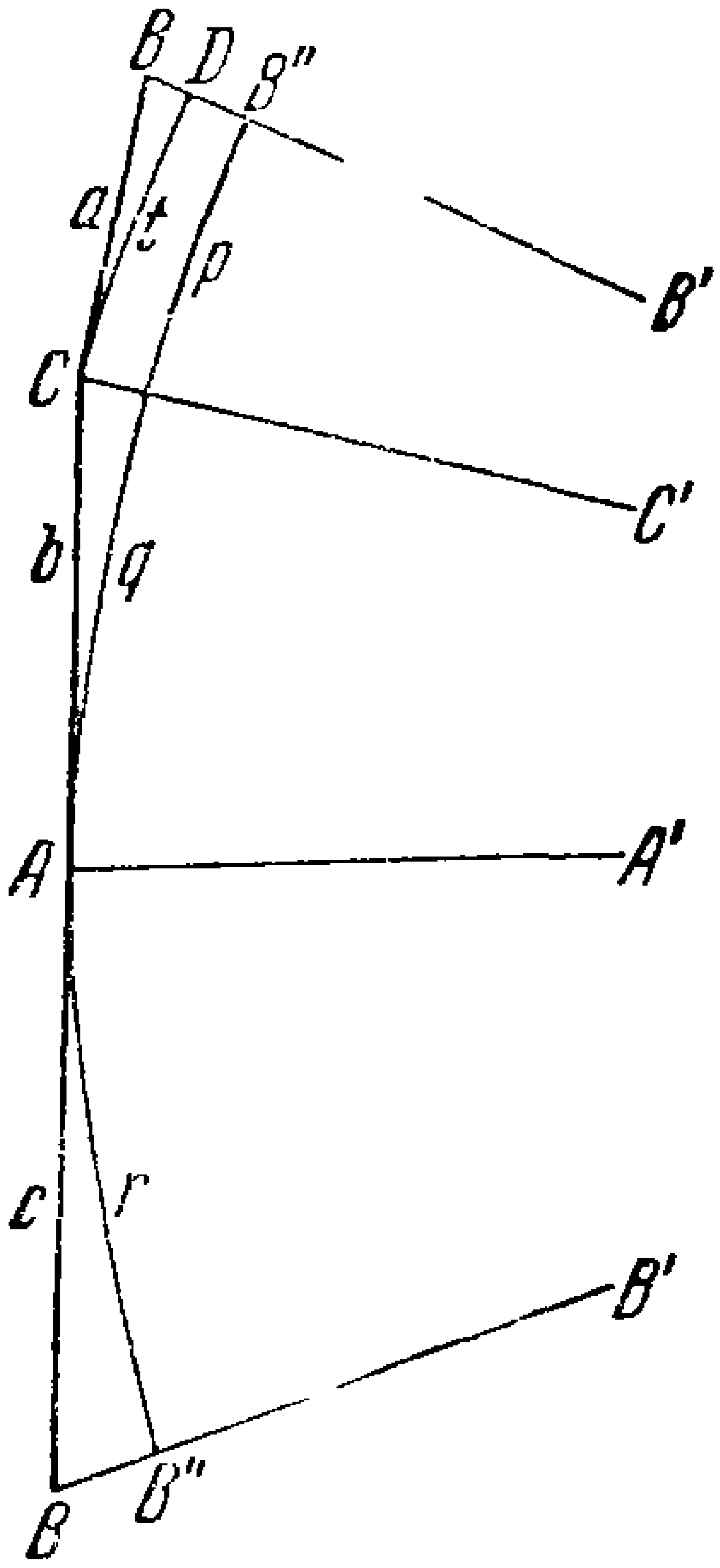
углом BC или его линейным углом $C'CA$, а потому равен $\Pi(b)$. Плоскость $BB'AA'$, проходя через AA', перпендикулярна к плоскости ABC; двугранный угол (BA), которым измеряется угол n сферического треугольника, прямой.

[1] Доказательство этого изложено в примечании [26], с которым рекомендуется ознакомиться уже при первом чтении.

[2] Стороне p противолежит угол A, который и выражен через $\Pi(\alpha)$; стороне q противолежит угол, измеряемый двугранным углом $(B''B')$, который дополняет A до $\frac{1}{2}\pi$ и потому равен $\Pi(\alpha')$. В прямоугольном предельном треугольнике стороны и углы связаны уравнениями обыкновенной (т. е. евклидовой) тригонометрии.

[3] Потому что это будут предельные линии на плоскости, имеющие в каждой из точек схождения A и C'' общую ось (точнее—параллельные оси).

в точке A перпендикулярна к AA'; ось CC', идущая от конца стороны b параллельно AA' и проходящая через точку соединения C'' [дуг] p и q; сторона a — перпендикулярная к CC' в точке C, а также выходящая из конца этой стороны ось BB', параллельная AA' и проходящая через конец B'' дуги p. По другую сторону AA' будут лежать: сторона c, перпендикулярная к AA' в точке A, и ось BB', параллельная AA' и идущая от конца [стороны] c через конечную точку B'' дуги r. Величина линии CC'' зависит от b, какову зависимость мы выразим через $CC''=f(b)$ Таким же образом будет $BB''=f(c)$.[1]



Черт. 30

Если, принимая CC' за ось, проведем из точки C новую предельную линию до пересечения D с осью BB' и обозначим дугу CD через t, то

$$BD=f(a),$$
$$BB''=BD+DB''=BD+CC'$$

и, следовательно,

$$f(c)=f(a)+f(b).$$

Кроме того, мы замечаем (предложение 33), что

$$t=pe^{f(b)}=r\sin\Pi(\alpha)\,e^{f(b)}.^{2}$$

Если бы перпендикуляр к плоскости треугольника ABC (черт. 28) был восставлен не в точке A, а в B, то линии c и r остались бы те же, дуги q и t перешли бы в t и q, прямые a и b в b и a, а угол $\Pi(\alpha)$ заменился бы углом $\Pi(\beta)$;[3] следовательно, мы имели бы ([27])

$$q=r\sin\Pi(\beta)\,e^{f(a)};$$

подставляя вместо q его значение,[4] находим

$$\cos\Pi(\alpha)=\sin\Pi(\beta)\,e^{f(a)},$$

---

[1] Если в какой-либо точке A предельной линии проведем к ней касательную $AC=b$ и из точки C проведем ось CC', параллельную AA', которая встретит предельную линию в точке C'', то длина отрезка CC'' явно будет функцией от b, которую Лобачевский и обозначает через $f(b)$. Соответственно (по другую сторону) $BB''=f(c)$.

[2] Согласно предложению 33, $t=pe^{x}$, где x есть длина отрезка CC'', выраженная в установленной в предложении 33 единице меры (в оригинале ошибочно сделана ссылка на предложение 32 вместо 33), а так как $CC''=f(b)$, то мы и получаем соотиошение, приведенное в тексте.

[3] Доказательство этого см. в примечании [[27]].

[4] Подстановка производится из найденной выше формулы $q=r\cos\Pi(\alpha)$.

заменяя же α и β через b' и c, получим [1]

$$\sin \Pi (b) = \sin \Pi (c)\, e^{f(a)}.$$

и умножая на $e^{f(b)}$:

$$\sin \Pi (b)\, e^{f(b)} = \sin \Pi (c)\, e^{f(c)}.$$

Отсюда следует также

$$\sin \Pi (a)\, e^{f(a)} = \sin \Pi (b)\, e^{f(b)}$$

Так как, однако, прямые a и b друг от друга не зависят, а с другой стороны, при $b = 0$, $f(b) = 0$, $\Pi (b) = \frac{1}{2}\pi$, то для любой прямой линии a

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi (a);$$

сообразно этому

$$\sin \Pi (c) = \sin \Pi (a) \sin \Pi (b),$$
$$\sin \Pi (\beta) = \cos \Pi (\alpha) \sin \Pi (a).^2$$

Отсюда изменением букв получаем

$$\sin \Pi (\alpha) = \cos \Pi (\beta) \sin \Pi (b),$$
$$\cos \Pi (b) = \cos \Pi (c) \cos \Pi (\alpha),$$
$$\cos \Pi (a) = \cos \Pi (c) \cos \Pi (\beta)\ ^3$$

Если в сферическом прямоугольном треугольнике (черт 29)[4] обозначим стороны $\Pi (c)$, $\Pi (\beta)$, $\Pi (a)$ с противолежащими им углами $\Pi (b)$, $\Pi (\alpha')$ буквами a, b, c, A, B, то найденные уравнения принимают форму, которая, как известно, устанавливается для прямоугольного треугольника в сферической тригонометрии, именно:

$$\sin a = \sin c \sin A,$$
$$\sin b = \sin c \sin B,$$
$$\cos A = \cos a \sin B,$$
$$\cos B = \cos b \sin A,$$
$$\cos c = \cos a \cos b;$$

---

[1] Согласно установленной выше возможности перейти от элементов a, b, c, α, β к элементам a, α', β, b', c; при этом $\cos \Pi (b') = \cos \left[\frac{1}{2}\pi - \Pi (b)\right] = \sin \Pi (b)$.

[2] Это соотношение получается из предыдущего при помощи той же замены, которая указана в предыдущем примечании.

[3] Первое из этих трех уравнений получаем из предыдущего, заменяя друг другом катеты a и b, а вместе с тем и противолежащие им углы $\Pi (\alpha)$ и $\Pi (\beta)$, второе получим из первого при помощи подстановки, указанной в последней сноске предыдущей страницы; третье получим из второго вновь транспозицией катетов и прилежащих им острых углов.

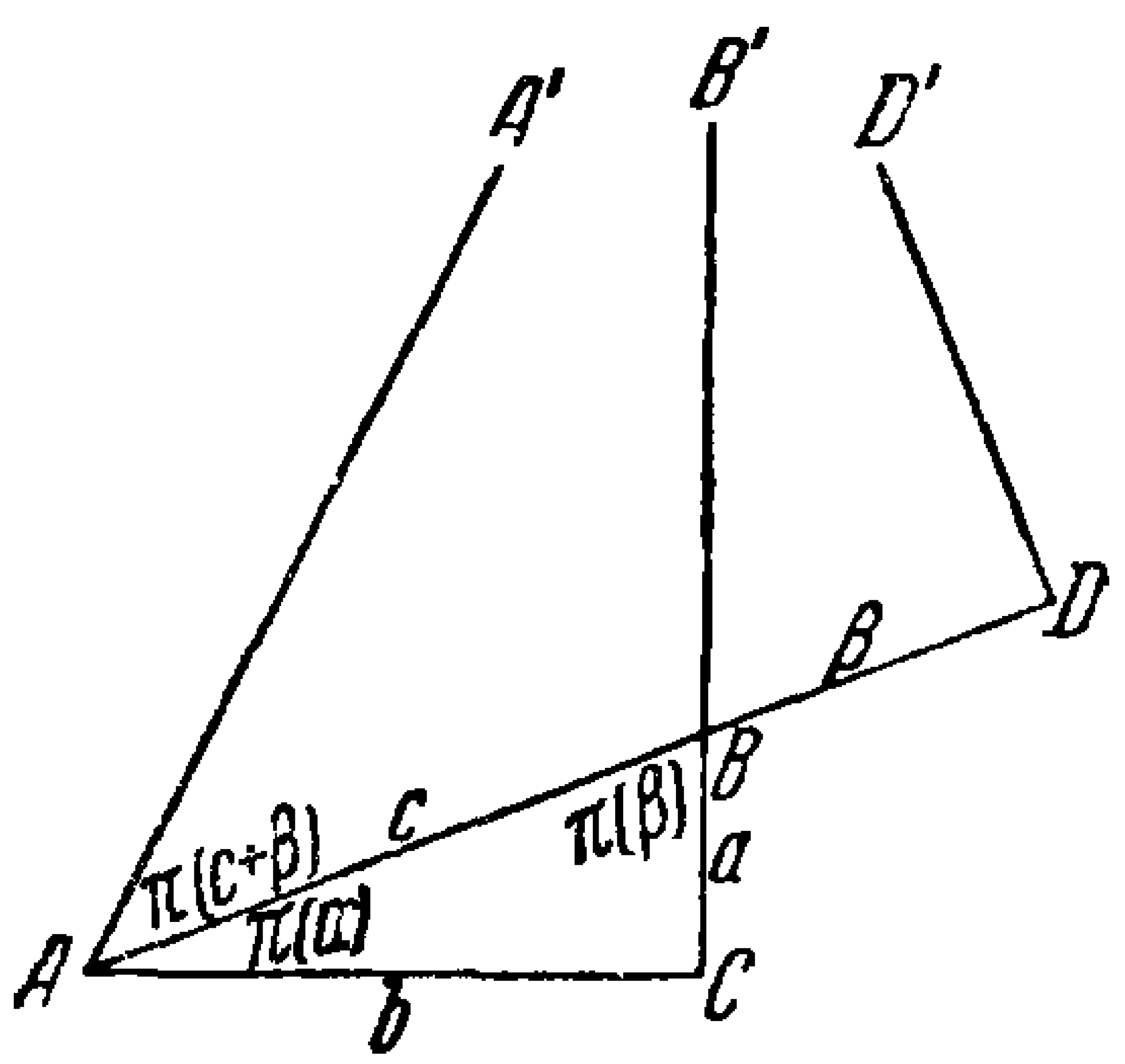
[4] Сопутствующем, как показано в тексте (см. также сноску [3] на стр. 64), нашему прямолинейному прямоугольному треугольнику.

*

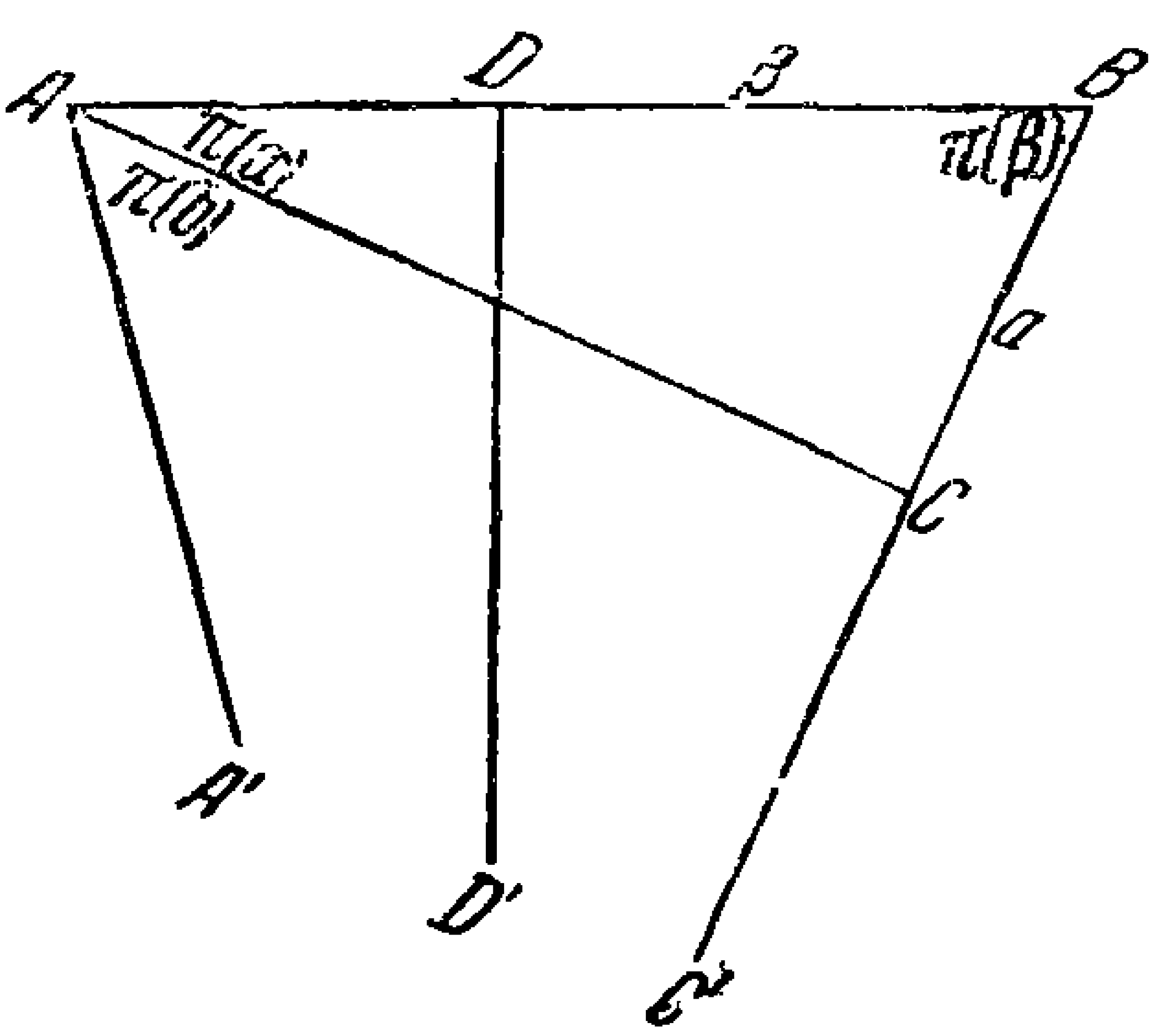
от этих уравнений можно перейти к уравнениям любых сферических треугольников. Таким образом, сферическая тригонометрия не зависит от того, равна ли в прямолинейном треугольнике сумма трех углов двум прямым или нет[1] [28].

X. РАЗЫСКАНИЕ ФУНКЦИИ П (x)

36) Теперь рассмотрим снова прямолинейный прямоугольный треугольник ABC (черт. 31), стороны которого суть a, b, c, а противолежащие углы суть $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$. Продолжим гипотенузу c за точку B и сделаем $BD=\beta$; из точки D восставим



Черт 31



Черт. 32.

к BD перпендикуляр DD', который, следовательно, будет параллелен BB', т е. продолжению стороны a за точку B. Из точки A проведем еще к DD' параллель AA', которая в то же время будет параллельна CB' (предложение 25). Поэтому угол $A'AD = \Pi(c+\beta)$, $A'AC = \Pi(b)$; следовательно,

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c+\beta).$$

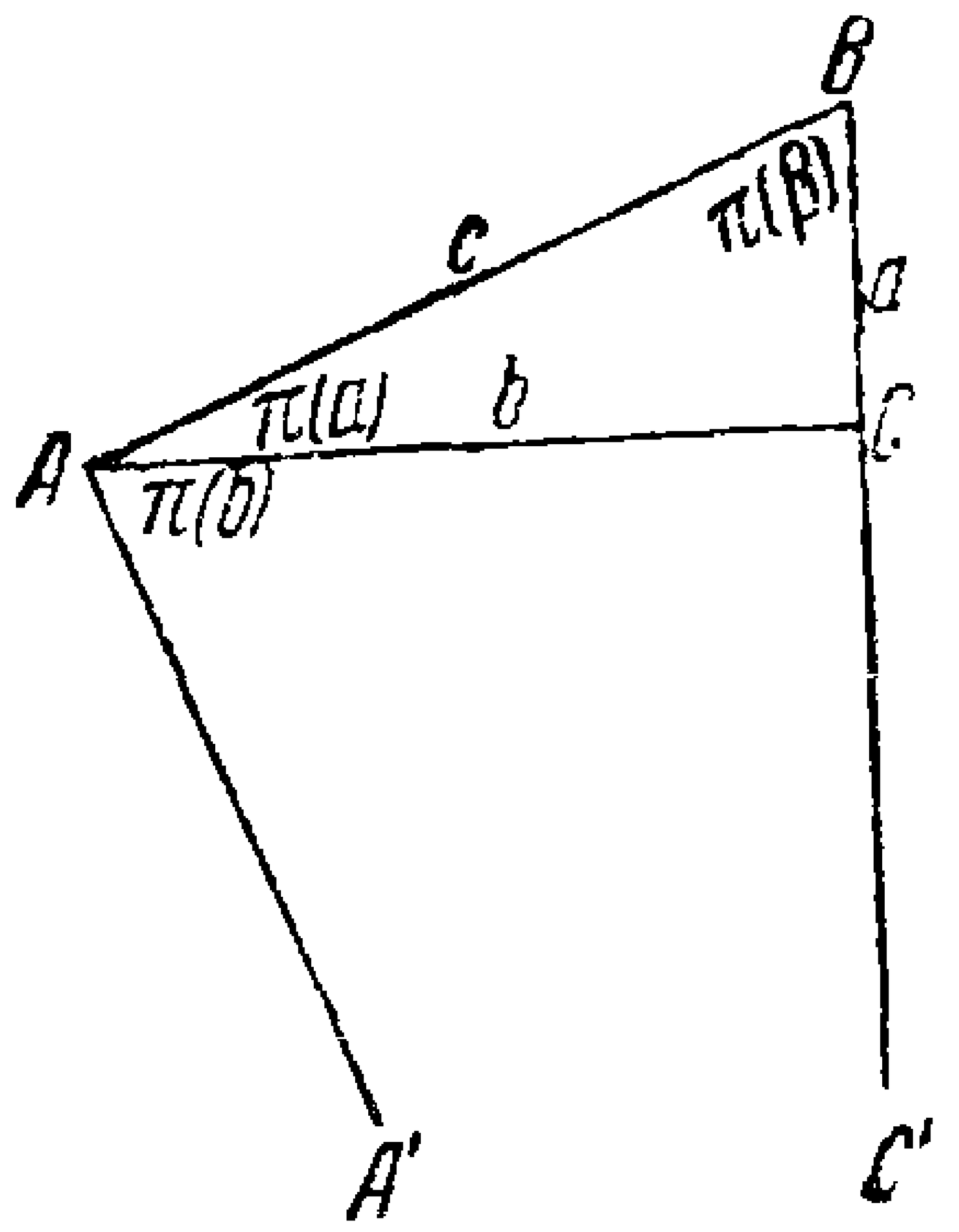
Если отложим β на гипотенузе c от точки B, затем из конечной точки D (черт. 32)[2] восставим к AB внутрь треугольника перпендикуляр DD' и из точки A проведем AA' параллельно DD', то BC с ее продолжением CC' будет третьей параллелью; тогда угол $CAA' = \Pi(b)$, $DAA' = \Pi(c-\beta)$; следовательно,

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b).$$

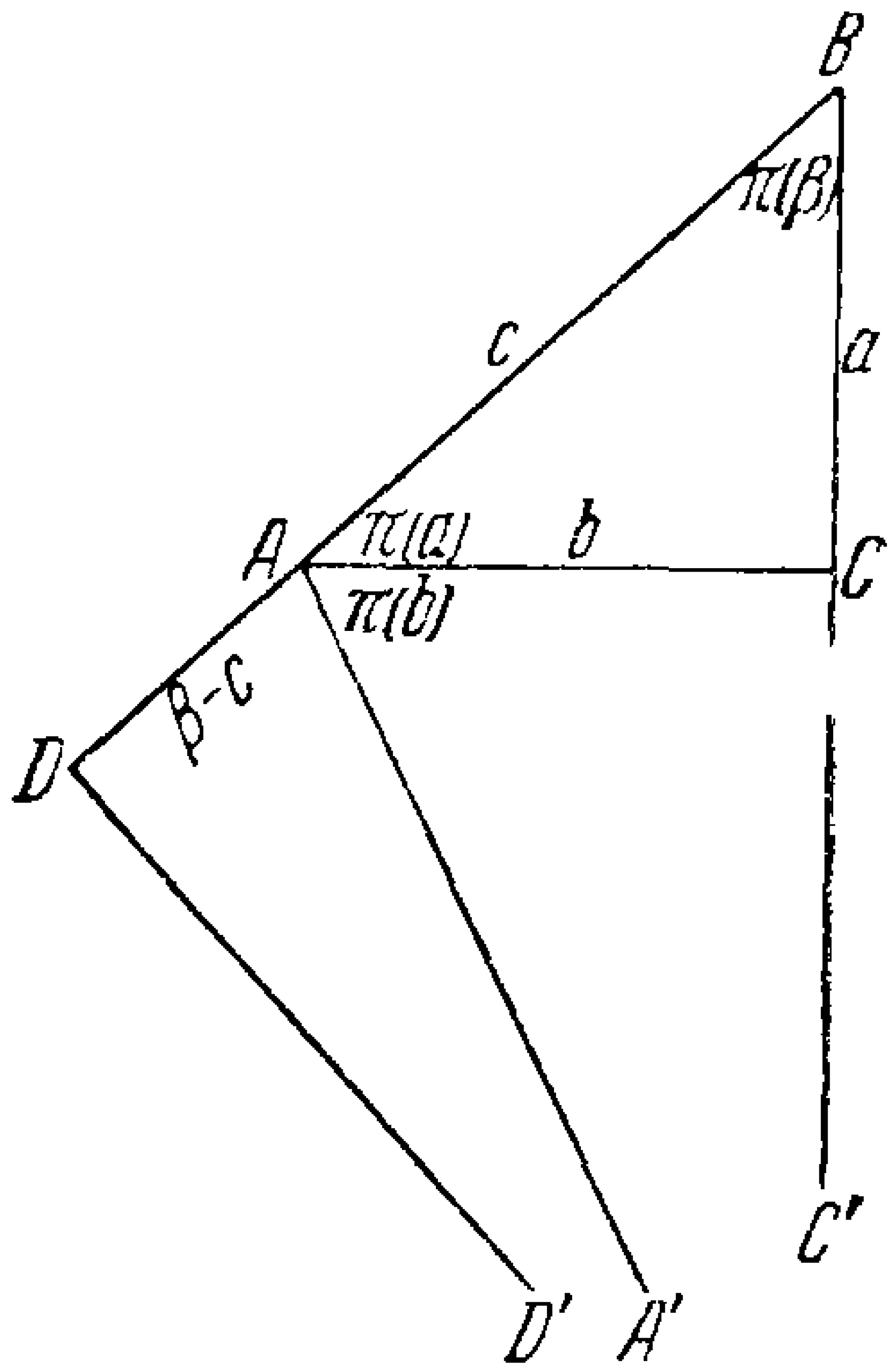
[1] Общий обзор этого довольно сложного рассуждения сделан в примечании [28].

[2] Чертеж сделан в предположении $c > \beta$, случаи $c = \beta$ и $c < \beta$ рассмотрены ниже.

Последнее уравнение остается в силе и в том случае, когда $c=\beta$ или $c<\beta$. Если $c=\beta$ (черт. 33), то перпендикуляр AA', восставленный к AB из точки A, параллелен стороне $BC=a$ с ее продолжением CC'; следовательно, $\Pi(a)+\Pi(b)=\frac{1}{2}\pi$ и в то же время $\Pi(c-\beta)=\frac{1}{2}\pi$ (предложение 23).[1] Если $c<\beta$ (черт. 34), то конец отрезка β падает по другую сторону точки A, в D, на продолжении гипотенузы AB. Восставленный отсюда перпендикуляр DD' к AD и параллельная ему линия AA' из [точки] A будут также параллельны стороне $BC=a$ с ее продолжением CC'. Здесь угол $DAA'=\Pi(\beta-c)$, следовательно, $\Pi(a)+\Pi(b)=$ $=\pi-\Pi(\beta-c)=\Pi(c-\beta)$ (предложение 23).



Черт. 33.



Черт. 34.

Приведя в связь оба найденных уравнения, получаем

$$2\,\Pi(b)=\Pi(c-\beta)+\Pi(c+\beta),$$

$$2\,\Pi(a)=\Pi(c-\beta)-\Pi(c+\beta),$$

откуда

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}=\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}.$$

Если сюда поставим значение (предложение 35)

$$\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)}=\cos\Pi(c),$$

[1] См заключительный абзац предложения 23: $\Pi(0)=\frac{1}{2}\pi$.

то получим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi(c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c-\beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c+\beta).$$ [1]

Здесь β есть произвольное число, так как угол $\Pi(\beta)$ с одной стороны [гипотенузы] c может быть выбран произвольно в пределах от 0 до $\frac{1}{2}\pi$; следовательно, β [может быть выбрано] произвольно между 0 и ∞; полагая здесь по порядку $\beta = c$, $2c$, $3c$ и т. д., для любого положительного числа n получим

$$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c)\right]^n = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(nc).$$ [2]

Если будем здесь рассматривать n как отношение двух линий x и c и примем, что

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(c) = e^c,$$

[1] Написав сообразно этому предыдущее равенство в виде пропорции

$$\frac{\cos \Pi(c)}{1} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]},$$

составляем производную пропорцию

$$\frac{1-\cos \Pi(c)}{1+\cos \Pi(c)} =$$

$$= \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right] - \cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right] + \cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]} =$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\sin\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\cos\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}.$$

[2] При $\beta = c$, $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = 1$, и равенство принимает вид:

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(2c). \qquad (')$$

При $\beta = 2c$

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(-c) = \pi - \Pi(c);\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c),$$

а потому предыдущее равенство дает:

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^3 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3c).$$

Далее, при $\beta = 3c$

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(-2c) = \pi - \Pi(2c);\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(2c),$$

то получим вообще для любой линии x, как положительной, так и отрицательной,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x},$$ [1]

где e может быть любое число, большее единицы, ибо $\Pi(x) = 0$ при $x = \infty$.

Так как единица, которой измеряются линии, произвольна, то за e можно также принять основание неперовых логарифмов [[29]].

XI. УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ СТОРОНЫ И УГЛЫ ВСЯКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

37) Из найденных выше уравнений достаточно знать два следующих:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b),$$

$$\sin \Pi(a) = \sin \Pi(b) \cos \Pi(\beta),$$

относя последнее к обоим катетам a и b, чтобы из их соединения

и, таким образом, в силу соотношения (1) при $\beta = 3c$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c \quad \beta) = \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c)\right]^{-2}.$$

Вместе с тем основное уравнение, установленное в тексте, дает

$$\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c)\right]^{4} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(4c).$$

Продолжить эти рассуждения или провести их в общем виде уже не трудно.

[1] Если фиксируем c и положим $n = \frac{x}{c}$, то предыдущее основное соотношение примет вид

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c)\right]^{n} = \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c)\right]^{\frac{x}{c}}.$$

Если c есть положительное число, то $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(c)$ есть правильная дробь. Поэтому всегда можно найти такое число $c > 1$, при котором

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(c) = e^{c}.$$

Предыдущее равенство примет вид

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

Этим сделан следующий важный шаг: установлена функция $\Pi(x)$

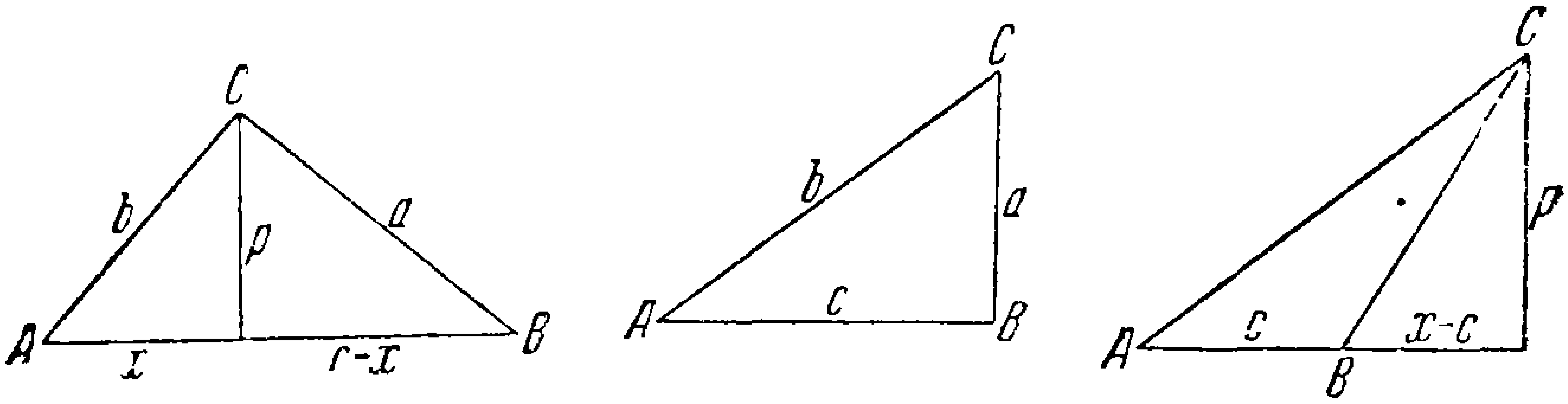
вывести два остальных (предложение 35) и притом без двузначности относительно алгебраических знаков, ибо углы здесь острые.[1]

Аналогичным образом приходим к двум уравнениям

$$1.\ \operatorname{tg}\Pi(c) = \sin\Pi(a)\operatorname{tg}\Pi(a),$$

$$2.\ \cos\Pi(a) = \cos\Pi(c)\cos\Pi(\beta).^{2}$

Рассмотрим теперь прямолинейный треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C (черт. 35). Если A и B суть острые углы, то перпендикуляр p из вершины угла C падает внутрь треугольника и делит сторону c на две части, именно: на часть x со стороны угла A и $c - x$ со стороны угла B. Таким



Черт 35. Черт. 36. Черт 37.

образом, получаются два прямоугольных треугольника, применяя к которым уравнение (1), получаем

$$\operatorname{tg}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tg}\Pi(p),$$

$$\operatorname{tg}\Pi(b) = \sin A \operatorname{tg}\Pi(p),$$

каковые уравнения остаются без изменения, даже если бы один из углов, например B, был прямым (черт. 36) или тупым (черт. 37).

---

[1] Стороны и углы прямолинейного треугольника — в неевклидовой геометрии даже прямоугольного — связаны *тремя независимыми уравнениями*. Лобачевский указывает, что за такие три уравнения могут быть приняты те два уравнения, которые приведены в тексте в связи с третьим, которое получается из второго транспозицией катетов и противолежащих им острых углов. Из этих трех уравнений путем исключения то одних, то других элементов треугольника могут быть получены не только два дополнительных уравнения, приведенные в предложении 35, но и еще пять уравнений, которые совместно с приведенными пятью дают возможность по любым двум элементам вычислить любой третий элемент. Эти десять уравнений (соответствующие числу сочетаний из 5 элементов по 3) Лобачевский то отдельными группами, то совместно приводит, можно сказать, во всех своих сочинениях. Они все сгруппированы в ст. 14 „Новых начал“. В примечании[30] приведены все эти десять уравнений прямоугольного треугольника, и дан их вывод из тех трех, которые Лобачевский принимает за исходные.

[2] Эти уравнения выведены в примечании [30]. Они там приведены под номерами (8) и (6).

Таким образом, получаем общее для всех треугольников соотношение

$$3.\quad \sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b).$$ [1]

Для треугольника с острыми углами A, B (черт. 35) получаем еще [уравнение (2)].

$$\cos \Pi(x) = \cos A \cos \Pi(b), \qquad [!]$$
$$\cos \Pi(c - x) = \cos B \cos \Pi(a),$$ [2]

каковые уравнения относятся также к треугольникам, в которых угол A или B прямой или тупой. Например, при $B = \frac{1}{2}\pi$ (черт. 36) нужно взять $x = c$; первое уравнение переходит тогда в то, которое мы получили выше [уравнение (2)], а второе удовлетворяется само по себе. [3] При $B > \frac{1}{2}\pi$ (черт. 37) первое уравнение остается без изменения, вместо же второго нужно написать соотношение

$$\cos \Pi(x - c) = \cos(\pi - B) \cos \Pi(a);$$

но $\cos \Pi(x - c) = -\cos \Pi(c - x)$ (предложение 23), а также

$$\cos(\pi - B) = -\cos B.$$

Если A есть прямой или тупой угол, то вместо x и $c - x$ нужно взять $c - x$ и x, и этот случай приведется к предыдущим. [4]

---

[1] Если это соотношение написать в виде

$$\frac{\operatorname{ctg} \Pi(a)}{\sin A} = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(b)}{\sin B},$$

то оно наиболее напоминает так называемую „теорему синусов" евклидовой тригонометрии.

[2] Обозначения формул [!], [!!] и [!!!], конечно, вставлены нами для удобства ссылки на них в примечаниях; это и отмечено, как обыкновенно, прямоугольными скобками

[3] В этом случае $c - x = 0$, $\Pi(c - x) = \frac{1}{2}\pi$, а потому обе части второго уравнения обращаются в нуль.

[4] Если A есть тупой угол, то мы обозначим через x расстояние BD от вершины угла B до основания перпендикуляра p; тогда $AD = x - c$. Из треугольника CAD в силу уравнения (2) мы тогда получаем

$$\cos \Pi(x - c) = \cos \Pi(b) \cos(\pi - A)$$

или

$$\cos \Pi(c - x) = \cos \Pi(b) \cos A.$$

Точно так же из треугольника CBD находим

$$\cos \Pi(x) = \cos \Pi(a) \cos B.$$

Оба эти уравнения получаются из тех двух основных уравнений [!], которые Лобачевский устанавливает (в тексте), если заменить x на $c - x$ и обратно. Существенно важно здесь то, что два основных соотношения [!] имеют место во всяком треугольнике при надлежащем выборе отрезка x.

Чтобы из этих двух уравнений исключить x, заметим, что (предложение 36)

$$\cos \Pi(c-x)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c-x)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c-x)}=\frac{1-e^{2x-2c}}{1+e^{2x-2c}}=$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c)\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c)\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\Pi(x)}=\frac{\cos\Pi(c)-\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)},$$ [1] [!!]

Если подставим сюда выражения для $\cos \Pi(x)$, $\cos \Pi(c-x)$, то получим

$$\cos \Pi(c)=\frac{\cos\Pi(a)\cos B+\cos\Pi(b)\cos A}{1+\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B},$$ [!!]

откуда следует

$$\cos \Pi(a)\cos B=\frac{\cos\Pi(c)-\cos A\cos\Pi(b)}{1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)};$$

и, наконец,

$$\sin \Pi(c)^2=$$
$$=[1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)]\cdot[1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)].$$ [2]

Таким же образом должно быть:

$$4.\ \sin^2\Pi(a)=$$
$$=[1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)]\cdot[1-\cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)],$$
$$\sin^2\Pi(b)=$$
$$=[1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)]\cdot[1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)].$$

Из этих трех уравнений получаем еще

$$\frac{\sin^2\Pi(b)\sin^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(a)}=[1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)]^2.$$

Отсюда без двузначности по отношению к знакам [3] имеем:

$$5.\ \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)+\frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}=1.$$

Если сюда в согласии с уравнением (3) подставим значение $\sin \Pi(c)$

$$\sin\Pi(c)=\frac{\sin A}{\sin C}\operatorname{tg}\Pi(a)\cos\Pi(c),$$ [4]

---

[1] Выкладки проведены в примечании [31].

[2] Выкладки проведены в примечании [32].

[3] Извлечение корня не приводит к двузначности потому, что обе части

$$\frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)}\ \text{и}\ 1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)$$

имеют положительные значения.

[4] Это есть уравнение (3):

$$\sin A\operatorname{tg}\Pi(a)=\sin C\operatorname{tg}\Pi(c),$$

взятое для сторон a и c и противолежащих углов A и C.

то получим:

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \sin C}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)},$$

или же, подставляя это выражение для $\cos \Pi(c)$ в уравнение (4),

$$6.\ \operatorname{ctg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}.$$ [1]

Исключая отсюда $\sin \Pi(b)$ с помощью уравнения (3), получаем:

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a).$$ [2]

Между тем уравнение (6) изменением букв [3] дает

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \operatorname{ctg} B \sin C \sin \Pi(a) + \cos C.$$

Из двух последних уравнений следует [4]

$$7.\ \cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.$$

Все четыре уравнения, выражающие зависимости между сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C, согласно этому [уравнения (3), (5), (6), (7)] [5] будут:

$$8.\ \left\{\begin{array}{l} \sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b), \\ \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1, \\ \operatorname{ctg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \dfrac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\ \cos A + \cos B \cos C = \dfrac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}. \end{array}\right.$$ [6]

[1] Подстановку эту нужно сделать не в первое уравнение (4), а в следующее, выражающее $\sin^2 \Pi(b)$. Выкладки проведены в примечании [33].

[2] Иначе говоря, мы подставляем в предыдущее уравнение вместо $\sin \Pi(b)$ выражение, которое дает уравнение (3):

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b)}{\sin B}.$$

Это дает непосредственно

$$\frac{\cos A \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin C}{\sin B} + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}.$$

Умножая же обе части на $\dfrac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$, получим уравнение, приведенное в тексте.

[3] То-есть транспонированием сторон a и b, а соответственно этому и углов A и D.

[4] По исключении из этих уравнений отношения $\dfrac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$.

[5] Квадратные скобки здесь принадлежат Лобачевскому.

[6] Было бы точнее сказать не „четыре уравнения", а четыре группы уравнений. Выкладки уже проведены выше. Уравнений первой группы имеется три (из них два независимых). Каждое из этих уравнений дает возможность по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, определить угол, противолежащий второй стороне, или же по двум

Если стороны треугольника a, b, c очень малы, то можно удовольствоваться приближенными значениями (предложение 36):

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = a,$$
$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2,$$
$$\cos \Pi(a) = a,$$ [1]

и аналогично для других сторон b и c. Уравнения (8) переходят для таких треугольников в следующие:

$$b \sin A = a \sin B,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$a \sin(A + C) = b \sin A,$$
$$\cos A + \cos(B + C) = 0.$$ [2]

Из этих уравнений первые два приняты в обыкновенной геометрии; последние же с помощью двух первых приводят к заключению, что

$$A + B + C = \pi.$$ [3]

углам и стороне, противолежащей одному из них, определить сторону, противолежащую второму углу.

Три уравнения второй группы определяют углы треугольника по трем его сторонам. Каждое из уравнений этой группы может также служить для определения третьей стороны по двум сторонам и одному углу.

Уравнений третьей группы имеется шесть; каждое из них служит для определения по стороне и двум прилежащим к ней углам стороны, противолежащей одному из этих углов, или же по углу и двум содержащим его сторонам — угла, противолежащего одной из этих сторон.

Четвертая группа содержит три уравнения и служит для определения сторон треугольника по его углам.

Все три группы содержат, таким образом, 15 уравнений, исчерпывающих тригонометрию прямолинейного треугольника.

[1] Установленное в предложении 36 соотношение $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^x$ дает:

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Выражая правые части в гиперболических функциях, представим эти уравнения в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \operatorname{sh} x, \quad \sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \cos \Pi(x) = \operatorname{th} x.$$

Гиперболические функции играют, таким образом, в неевклидовой геометрии Лобачевского такую же роль, какую в обыкновенной геометрии играют тригонометрические функции. Поэтому построенную Лобачевским систему геометрии, как уже упомянуто выше, называют *гиперболической геометрией* (см. сноску [3], стр. 39).

Разлагая гиперболические функции в ряд Маклорена и сохраняя для малых значений x только члены не выше второго порядка, получим выражения, приведенные в тексте.

[2] Выкладки проведены в примечании [[34]].

[3] Выкладки проведены в примечании [[35]]. Последний вывод можно формулировать следующим образом. При весьма малых размерах треуголь-

Таким образом, воображаемая геометрия переходит в обыкновенную, если предположим, что стороны прямолинейного треугольника очень малы. [1]

Об измерении кривых линий, площадей плоских фигур, поверхностей и объемов тел, равно как и о применении воображаемой геометрии к анализу я опубликовал некоторые исследования в „Ученых записках Казанского университета“ [37].

Уравнения (8) уже сами по себе представляют достаточную основу для того, чтобы рассматривать предположения воображаемой геометрии как возможные. Сообразно этому мы не располагаем никаким другим средством, кроме астрономических наблюдений, чтобы судить о точности, которую дают вычисления обыкновенной геометрии. Как я показал в одной из моих работ, эта точность простирается далеко, так что, например, в треугольниках, стороны которых доступны нашим измерениям, сумма углов не отличается от двух прямых даже на сотую долю секунды. [2]

Замечательно также, что уравнения (8) в плоской геометрии переходят в уравнения сферических треугольников, если вместо сторон a, b, c подставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; при таком изменении, однако, нужно будет также положить

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a},$$
$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1}\,\operatorname{tg} a,$$
$$\operatorname{tg} \Pi(a) = \frac{1}{\sin a \sqrt{-1}};$$

подобные же изменения нужно сделать и для сторон b, c; этим путем мы придем от уравнений (8) к следующим [38]:

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\operatorname{ctg} A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \operatorname{ctg} a,$$
$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

ника царящие в нем метрические соотношения не отличаются от евклидовых. В настоящее время это часто формулируют еще так: геометрия бесконечно малого в гиперболическом пространстве совпадает с евклидовой. В связи с этим делаются и заключения натурфилософского характера. Об этом см. примечание [36].

[1] Точнее, если стороны настолько малы, что можно пренебречь кубом отношения каждой стороны к принятой единице меры.

[2] См. примечание [36].

ПРИМЕЧАНИЯ

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Предложение, выделенное курсивом, правильнее всего рассматривать как определение прямой линии.

Столь обычное определение прямой как оси вращения все же выражено в тексте Лобачевского странно. Почему он говорит о вращении *поверхности*, а не твердого тела (неизменяемой среды)? Определение прямой как геометрического места точек, остающихся неподвижными вместе с двумя точками, принадлежащими движущемуся геометрическому образу (телу, поверхности), имеет содержание только в том случае, если речь идет о неподвижных точках этого движущегося образа: среда референции, относительно которой происходит движение, вся рассматривается как неподвижная. Вращающаяся *поверхность* неподвижной прямой не содержит, за исключением плоскости и некоторых особенных поверхностей, содержащих прямые линии. Английский переводчик Гальстед поэтому вносит после текста Лобачевского следующее замечание: „Это значит: если мы вращаем поверхность, ее (эту линию) содержащую, около двух точек этой линии, то линия остается в покое". Кстати сказать, помещая это замечание в скобках, переводчик не указывает, что оно принадлежит ему, а не Лобачевскому.

Это определение прямой в той или иной модификации, чаще всего в той форме, что прямая остается неподвижной, когда закреплены две ее точки, было широко распространено уже в древности. Его приводит уже Прокл в своих комментариях ко II определению в „Началах" Евклида. Оно восходит, повидимому, еще к Герону Александрийскому (около 100 г. до н. э.). Это определение сохраняет свое значение и до нашего времени. У Гильберта, принципиально не отличающего определений и аксиом, две части определения Лобачевского в некоторой модификации выражены в аксиомах I_1 (две различные точки A и B определяют прямую a) и I_2 (любые две точки прямой определяют эту прямую). Вален во введении к своей „Абстрактной геометрии" [1] говорит: „Предложение: «двумя различными точками прямая однозначно определяется» повидимому, в такой мере неразрывно связано с самым понятием прямой линии, что определению прямой естественно дать такое выражение, чтобы это предложение входило в его состав". Лобачевский ввел, таким образом, в определение прямой наиболее существенные ее признаки.

---

[1] Th. Vahlen. Abstracte Geometrie. Leipzig 1905.

[2] Евклид дает этому положению такое выражение: „Две прямые не могут заключать пространства“. Это положение встречается в „Началах“ в виде аргументации при доказательстве предложения 4 книги I. Некоторые комментаторы извлекли его из этого рассуждения и включили в число аксиом. Как Гейберг и Менге, так и Гис [1] изъяли это положение из числа аксиом как не подлинное.

[3] Под „ограниченной плоскостью“ („begrenzte Ebene“] Лобачевский разумеет часть плоскости, ограниченную непрерывной замкнутой кривой, „плоскую фигуру“, как часто говорят теперь. Проходя через такую фигуру, неограниченная прямая должна из нее выйти и таким образом делит ее на две части. Самое важное точно выраженное применение, которое это положение в дальнейшем получает, заключается в том, что *прямая, пересекая одну сторону треугольника и входя поэтому внутрь треугольника, должна из него выйти, а поэтому неизбежно пересекает и другую сторону треугольника.* Отнюдь не будет преувеличенным сказать, что построение своеобразной теории параллельных линий Лобачевского опирается преимущественно на это положение (см., например, предложения 17 и 18 настоящего сочинения). Выделенный таким образом частный случай, которого несомненно достаточно, чтобы в дальнейшем (при правильном определении непрерывной замкнутой кривой) доказать приведенное выше общее предложение, в позднейшей литературе обыкновенно называют *аксиомой Паша*. Хотя на нее несомненно опираются и гораздо более ранние авторы (Саккери, Лежандр), но в совершенно отчетливой форме она действительно выражена впервые в сочинении Паша „Лекции по новой геометрии“ [2] [IV основное положение (IV Grundsatz) в теории плоскости].

[4] Точнее: прямолинейный отрезок, соединяющий точку, лежащую по одну сторону некоторой прямой, с точкой, лежащей по другую сторону той же прямой, пересекает эту прямую.

[5] В оригинале „Congruent“. Во всех своих сочинениях на русском языке Лобачевский называет конгруэнтные фигуры *одинаковыми*. В настоящем переводе везде сохранен термин „конгруэнты“.

[6] В оригинале сказано неудачно „der grössten Seite“, т. е. наибольшей стороне (треугольника).

[7] Слова „не лежащим с нею в одной плоскости“, очевидно, излишни: прямая не может лежать в одной плоскости с двумя пересекающимися прямыми, к которым она перпендикулярна.

[8] Существование такой „граничной прямой“ требует, конечно, доказательства. Оно основано на непрерывности пучка

---

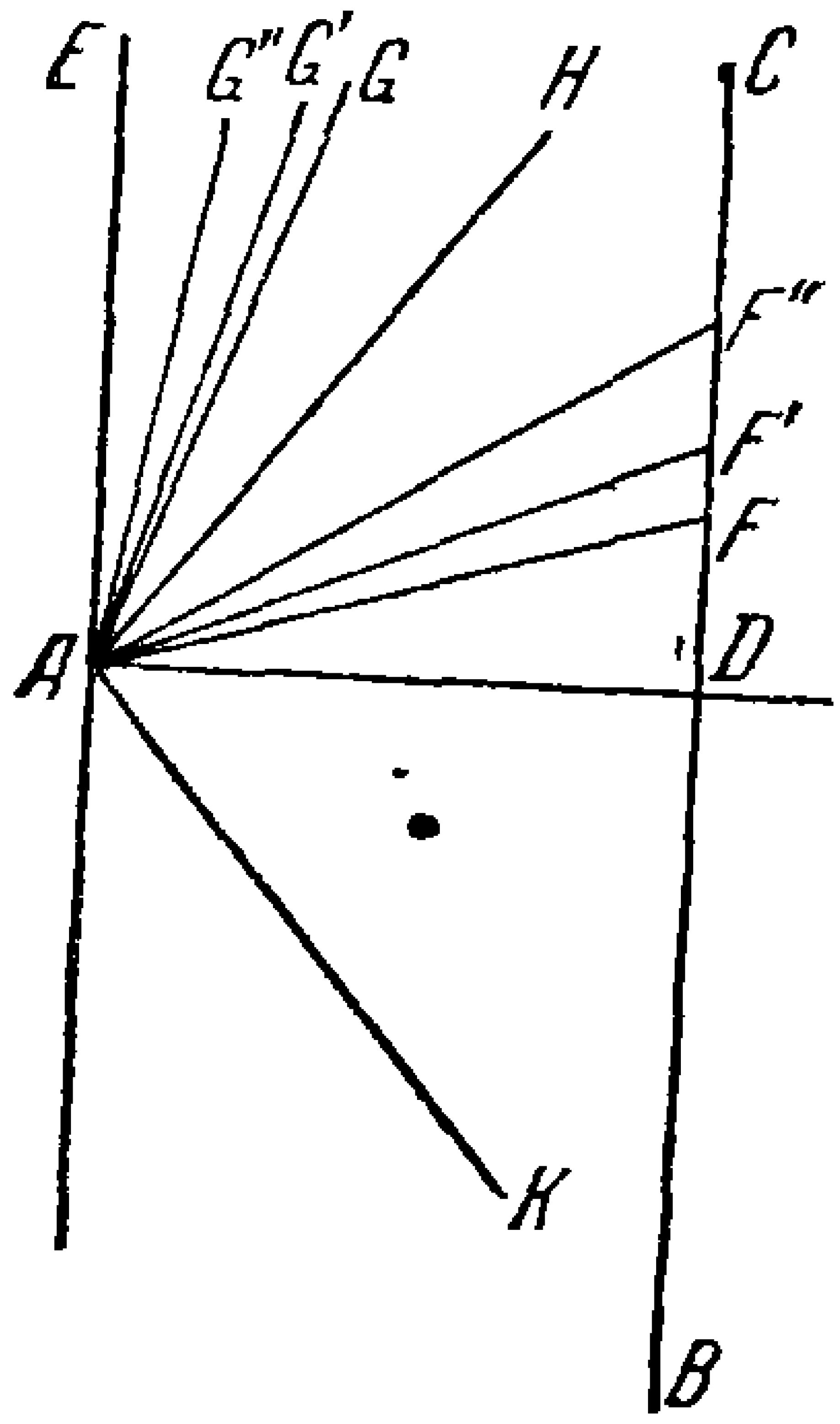
[1] Euclidis opera omnia. Ediderunt et latine interpretati sunt J. L. Heiberg et H. Menge. Leipzioj, 1888—1896.

The thirteen books of Euclid's Elements. 3 Vol. Editor T. L. Heath. Cambridge, 1908.

[2] M. Pasch — Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, 1882, стр. 21; новое издание с обширной статьей Дена (M. Dehn) выпущено в 1926 г.

прямых или, лучше сказать, лучей, проходящих внутри угла EAD из его вершины A. При допущении, что кроме AE, есть еще лучи, не встречающие DC, лучи этого пучка распадаются на две категории: лучи первой категории $AF\ AF'\ AF'', \ldots$ встречают лучи DC, лучи второй категории $AG, AG', AG'', \ldots$ его не встречают. При этом все лучи первой категории неизбежно расположены по одну сторону лучей второй категории, и обратно. В самом деле, если лучи AF и AF'' принадлежат первой категории, то никакой луч второй категории не может лежать между ними, ибо всякий луч AF', лежащий между двумя лучами AF и AF'', встречающими CD, также встречает CD (предложение 3 и к нему примечание 3).

Таким образом положение, что из точки A внутри прямого угла EAD выходит не один, а несколько (и вследствие этого — бесконечное множество) лучей, не встречающих CD, приводит к образованию дедекиндова сечения в пучке лучей, проходящих в угле EAD через его вершину. Вследствие этого по принципу Дедекинда в этом пучке необходимо существует *граничный луч*, представляющий собой либо последний луч первой категории (последний луч, встречающий DC), либо первый луч второй категории (первый луч, не встречающий DC). Но последнего встречающего луча существовать не может; в самом деле, если AF есть встречающий луч, то, взяв на DC точки F', F'' за точкой F, мы получим дальнейшие лучи, встречающие DC. Следовательно, существует первый луч второй категории, т. е. первый (граничный) луч, не встречающий DC; это и есть луч AH, который Лобачевский называет *параллельным* DC.



Черт. 1.

[9] Лобачевский в „Новых началах“ (ст. 93) называет лучи, встречающие CD, *встречными* или *сводными*; лучи же, не встречающие (кроме параллельного), — *невстречными* или *несводными*.

[10] Строго говоря, этот именно признак непосредственно служит определением параллели. Луч AH параллелен DC, если он не встречает DC, между тем как *всякий* луч, проходящий внутри угла DAH, встречает DC. Существенно важной особенностью такого определения параллели является то обстоятельство, что оно, по выражению Больай, носит *абсолютный* характер, т. е. пригодно как для неевклидовой, так и для евклидовой геометрии.

Заметим, что Лобачевский, в сущности, всегда опирается на это свойство параллели, которым она определяется.

[11] Больай приводит доказательство того же предложения, исходя из другого принципа. Именно, он доказывает, что из любой точки A луча AB, параллельного CD, можно провести секущую

*

AC таким образом, чтобы она образовала с обоими лучами равные внутренние односторонние углы BAC и DCA.

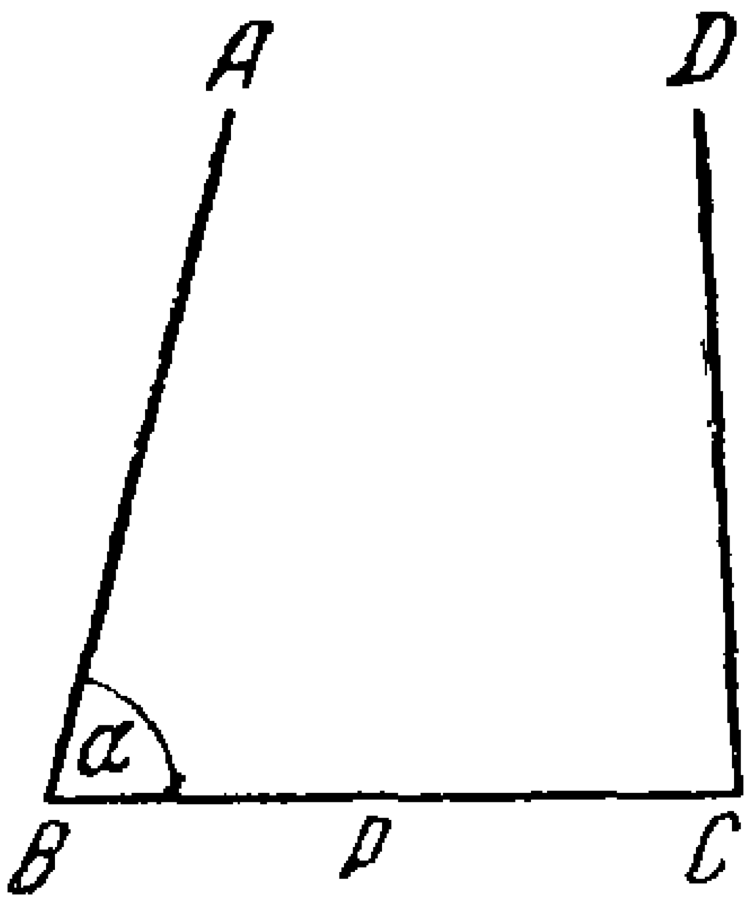
Доказательство этого предложения в несколько более общей форме приведено ниже, в примечании [18].

Из симметрии расположения обоих лучей относительно AC следует, что и луч CD параллелен AB.

[12] Согласно изложенному выше, каждому положительному числу p (при установленной единице меры, в которой оно выражает определенный отрезок) соответствует острый угол α, связанный с p соотношением

$$\Pi(p) = \alpha. \qquad (!)$$

Этот угол обращается в $\frac{1}{2}\pi$ при $p = 0$, и обратно, каждому углу α, не превышающему $\frac{1}{2}\pi$, соответствует отрезок, а вместе с тем и положительное число p, при котором имеет место соотношение (!). Если на стороне BC угла $ABC = \alpha$ отложим отрезок $BC = p$ (черт. 2), то перпендикуляр CD, восставленный к этой стороне угла из точки C, будет параллелен BA.



Черт. 2.

Если p есть отрицательное число, то функция $\Pi(-p)$ геометрически не установлена. С другой стороны, равенство (!) при наличных определениях не имеет содержания, если α есть тупой угол.

Теперь Лобачевский определяет функции $\Pi(-p)$ (для отрицательного значения аргумента) соотношением

$$\Pi(-p) = \pi - \Pi(p). \qquad (!!)$$

В силу этого соотношения каждому отрицательному числу $-p$ также соответствует угол α, для которого

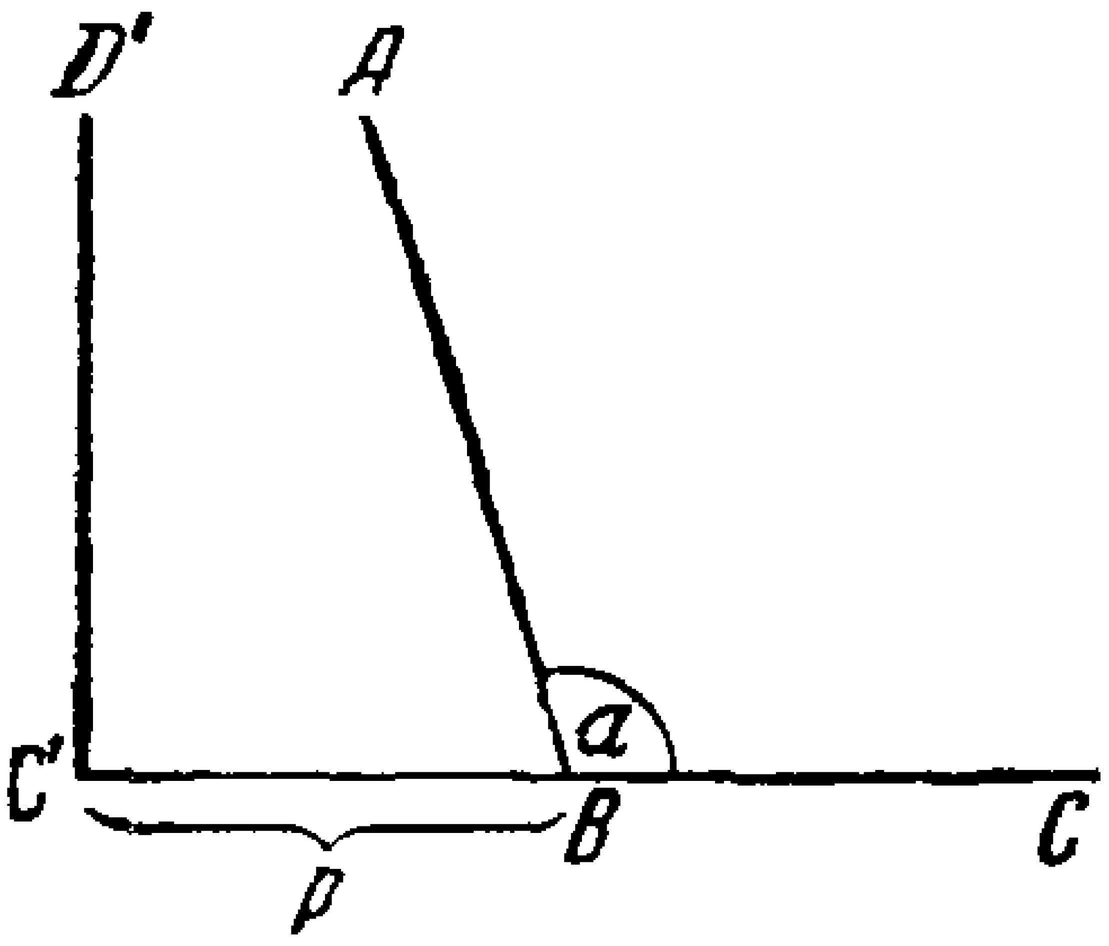
$$\Pi(-p) = \alpha, \qquad (!!!)$$

но это будет угол тупой, $\pi - \Pi(p) > \frac{1}{2}\pi$. И обратно, если α есть тупой угол $\left(\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi\right)$, то ему всегда отвечает один и только один отрицательный аргумент $-p$, для которого имеет место соотношение (!!); выбрав в этом случае p так, чтобы $\Pi(p) = \pi - \alpha$, получим то значение p, при котором соотношение (!!) имеет место. При этих условиях в функции $\Pi(x)$ аргумент может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; значение же функции меняется от π до 0. Вместе с тем, каков бы ни был угол α в пределах от 0 до π, всегда найдется одно и только одно (положительное или отрицательное) значение x, при котором $\Pi(x) = \alpha$.

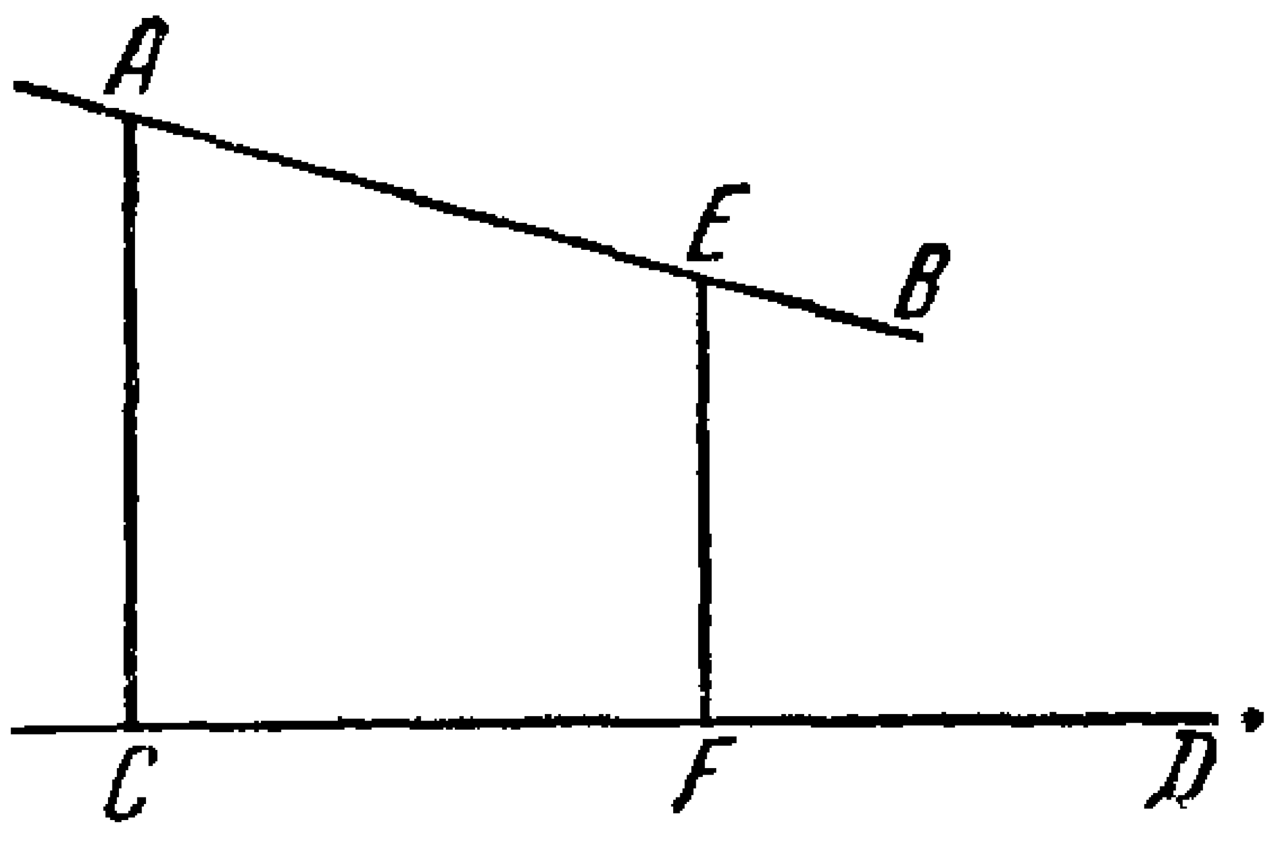
Геометрический смысл положительного значения аргумента p выяснен выше. Если α есть тупой угол и при $x = -p$ имеет место соотношение (!!), то в силу определения (!!) $\Pi(p) = \pi - \alpha$. Если поэтому теперь на *продолжении* стороны BC (черт. 3) отложим отрезок $BC'=p$, то перпендикуляр $C'D'$ будет параллелен второй стороне угла. Определение (!!) представляется поэтому вполне естественным.

[13] Следующее доказательство того же предложения кажется несколько проще. Положим, что луч AB параллелен лучу CD (черт. 4). Из точки E, лежащей от A в сторону параллельности, опустим на CD перпендикуляр EF. Так как $\angle BEF+\angle AEF=\pi$, а $\angle CAE+\angle AEF<\pi$, то $\angle BEF>\angle BAC$, т. е. $\Pi(EF)>\Pi(AC)$, а потому (предложение 23, заключительная часть) $EF<AC$.

Заметим, что в сторону параллельности расстояние одной параллели от другой убывает неограниченно; в противоположную же сторону (как говорит Лобачевский — „в сторону развода") оно неограниченно возрастает (см. „Новые начала", стр. 109).



Черт. 3.



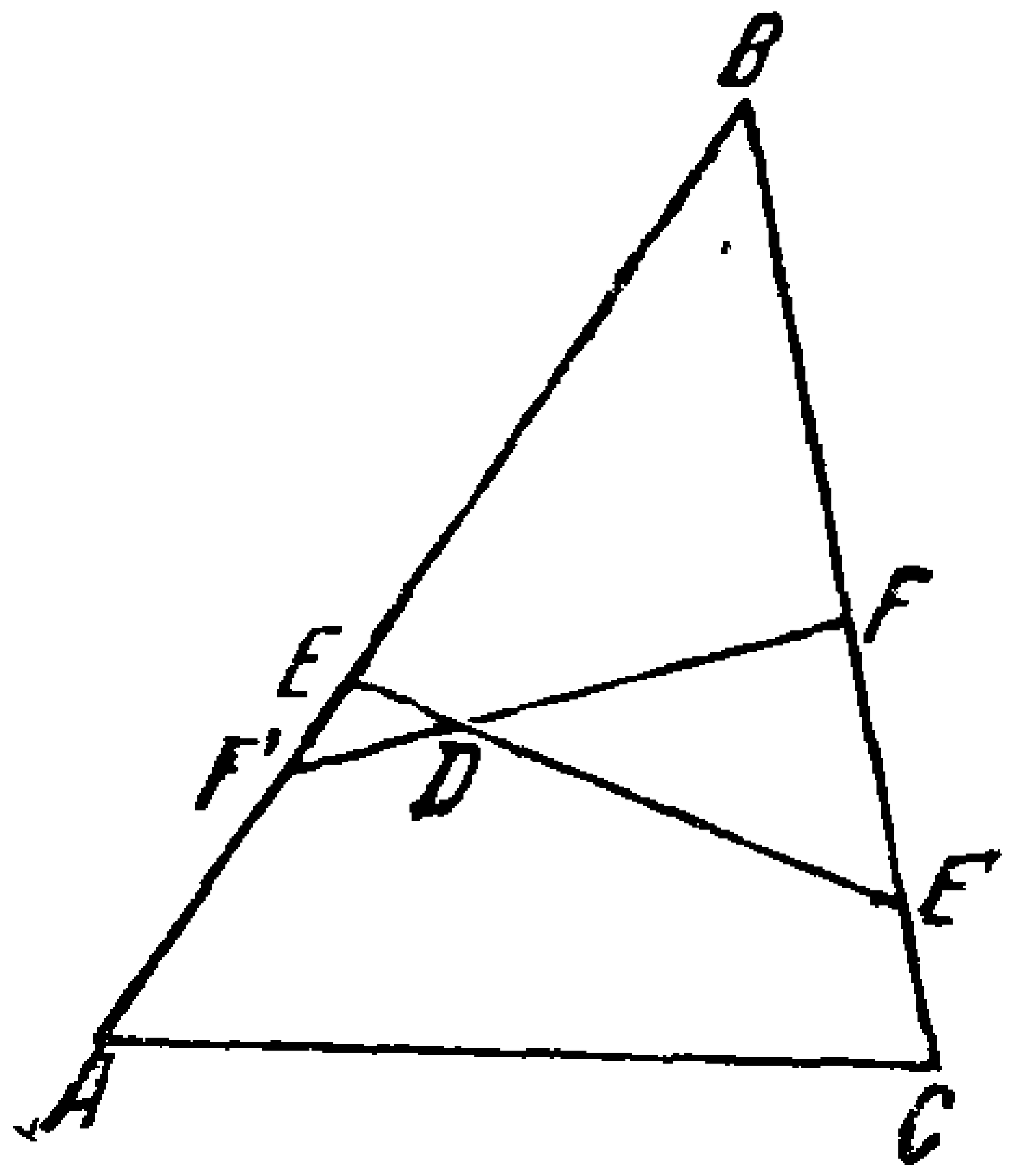
Черт. 4.

Четырехугольник $ACDB$, который Лобачевский строит (черт. 11, стр. 48) таким образом, что из точек A и B прямой AB восставляет к ней перпендикуляры, откладывает на них равные отрезки $AC=BD$ и соединяет точки C и D, в настоящее время называют *четырехугольником Саккери*,[1] по имени итальянского геометра, который им успешно пользовался; прямую AB называют *нижним основанием*, прямую CD — *верхним основанием* четырехугольника. Прямая EF, соединяющая середины верхнего и нижнего оснований, так называемая *средняя* его *линия*, как доказано в тексте, перпендикулярна к обоим. Углы при верхнем основании острые. Если на FD отложить отрезок $FH=EB$, то $EFHB$ также будет четырехугольником Саккери, с нижним основанием FE. Поэтому угол HBE при верхнем основании будет острый. Прямая BH пройдет внутрь прямого угла DBE, точка H будет расположена между точками F и D. Следовательно, $FH<FD$, т. е. $EB<FD$ или $AB<CD$: *верхнее основание четырехугольника Саккери всегда больше нижнего*; это значит: два перпендикуляра к одной и той же прямой по мере удаления от нее расходятся.

[1] G. Saccheri (1667—1733). Euclides ab omni noevo vindicatus. Milano. 1733

Можно показать, что это расхождение возрастает неограниченно, т. е. расстояние CD по мере удаления от AB неограниченно возрастает (см. ниже Приложение I, рубр. 5).

[14] Предложение, содержащееся в этой рубрике, было, конечно, хорошо известно до Лобачевского; как и предыдущее предложение, оно принадлежит абсолютной геометрии. Впервые оно было, повидимому, установлено в 1603 г. англичанином Харрио (Th. Harriot) и независимо открыто и опубликовано Жираром (A. Girard) в 1629 г.[1] Лобачевский мог бы на него непосредственно сослаться. Приведенные, однако, в тексте два доказательства имеют двоякую цель. Во-первых, Лобачевскому необходимо четко показать, что доказательство этого предложения не зависит от теории параллельных. Во-вторых, принадлежащее ему второе доказательство имеет то значение, что оно с несущественными изменениями может быть применено к разысканию площади прямолинейного треугольника в его неевклидовой геометрии.



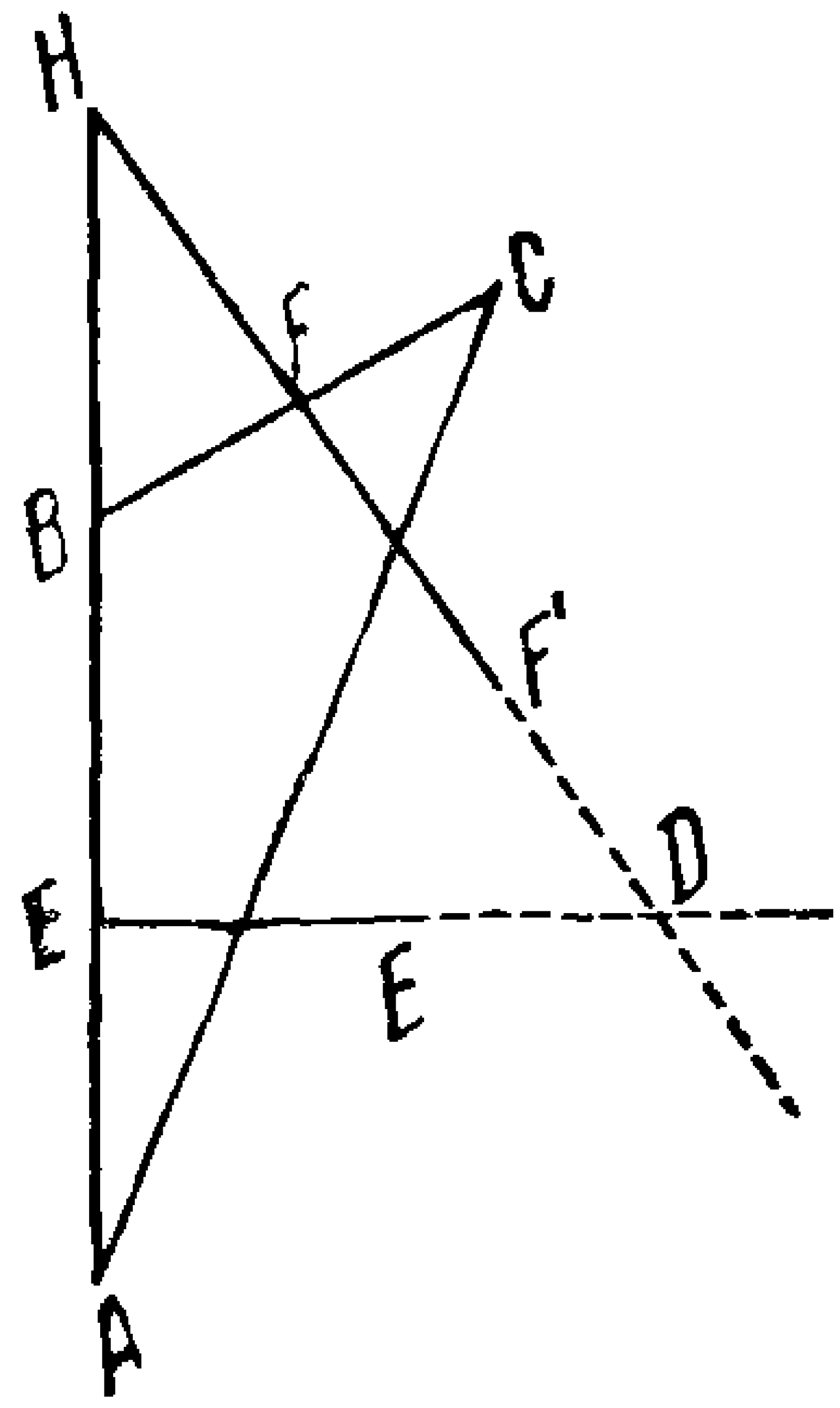
Черт. 5.

[15] Доказанное здесь предложение играет в неевклидовой геометрии очень важную роль. После установления нового понятия о параллельности двух лучей (первого основного момента в неевклидовой геометрии) это предложение является *вторым основным моментом* в построении неевклидовой геометрии. Сущность дела заключается в том, что оно принадлежит к числу тех предложений, которые Больай называет *абсолютными*, т. е. которые равно справедливы как в евклидовой, так и в неевклидовой геометрии. Если прямые AA', BB', CC' параллельны в евклидовом пространстве, а плоскость ABC к ним перпендикулярна, то углы A, B, C треугольника ABC суть линейные углы двугранных углов (AA'), (BB') (CC'), о которых идет речь. Сумма углов треугольника ABC равна π, а вместе с тем и сумма трех двугранных углов, которые образуются, когда три плоскости пересекаются по параллельным линиям AA', BB', CC', также равна π. В неевклидовой геометрии прежде всего нельзя провести плоскость, перпендикулярную к трем параллельным прямым. Сумма углов треугольника ABC, как бы мы ни выбрали точки A, B, C на параллелях, меньше π; но сумма двугранных углов (AA'), (BB') и (CC') и здесь остается равной π. Значение этого факта не замедлит выясниться.

[16] Приведенное в тексте доказательство ничем не отличается от того, при помощи которого издавна доказывается, что около каждого треугольника можно описать окружность (Евклид,

[1] Подробные сведения об этом открытии можно найти у Тропфке. J. Tropfke Geschichte der Elementar-Mathematik. Berlin und Leipzig. 1921—1924, т. V, стр. 129—130.

„Начала“, IV, 5). Существенным моментом является только то, что при традиционном доказательстве всегда принимается, что точка пересечения D перпендикуляров ED и FD всегда существует. Действительное же обоснование этого неизбежно опирается на евклидов постулат о параллельных линиях. Обнаружим это. Пусть AB (черт. 5) наибольшая сторона треугольника (не меньше двух других его сторон); тогда угол B треугольника необходимо острый. Из середины стороны AB восставляем перпендикуляр EE'. Так как прямая EE' перпендикулярна к AB, а прямая BC образует с нею острый угол, то прямые EE' и BC пересекутся в некоторой точке E' (постулат о параллельных: сумма внутренних односторонних углов $E'EB$ и EBC меньше π). При этом угол $EE'B$ будет острый, так как треугольник BEE' прямоугольный. Если FF' есть перпендикуляр, восставленный к стороне BC из ее середины F, то $BF \leqslant BE < BE'$; FF' непременно пересечется с прямой $E'E$, образующей с BC острый угол, в некоторой точке D. Таким образом традиционное доказательство существования центра описанной около треугольника окружности, проведенное со всей необходимой полнотой, опирается на постулат о параллельных линиях.

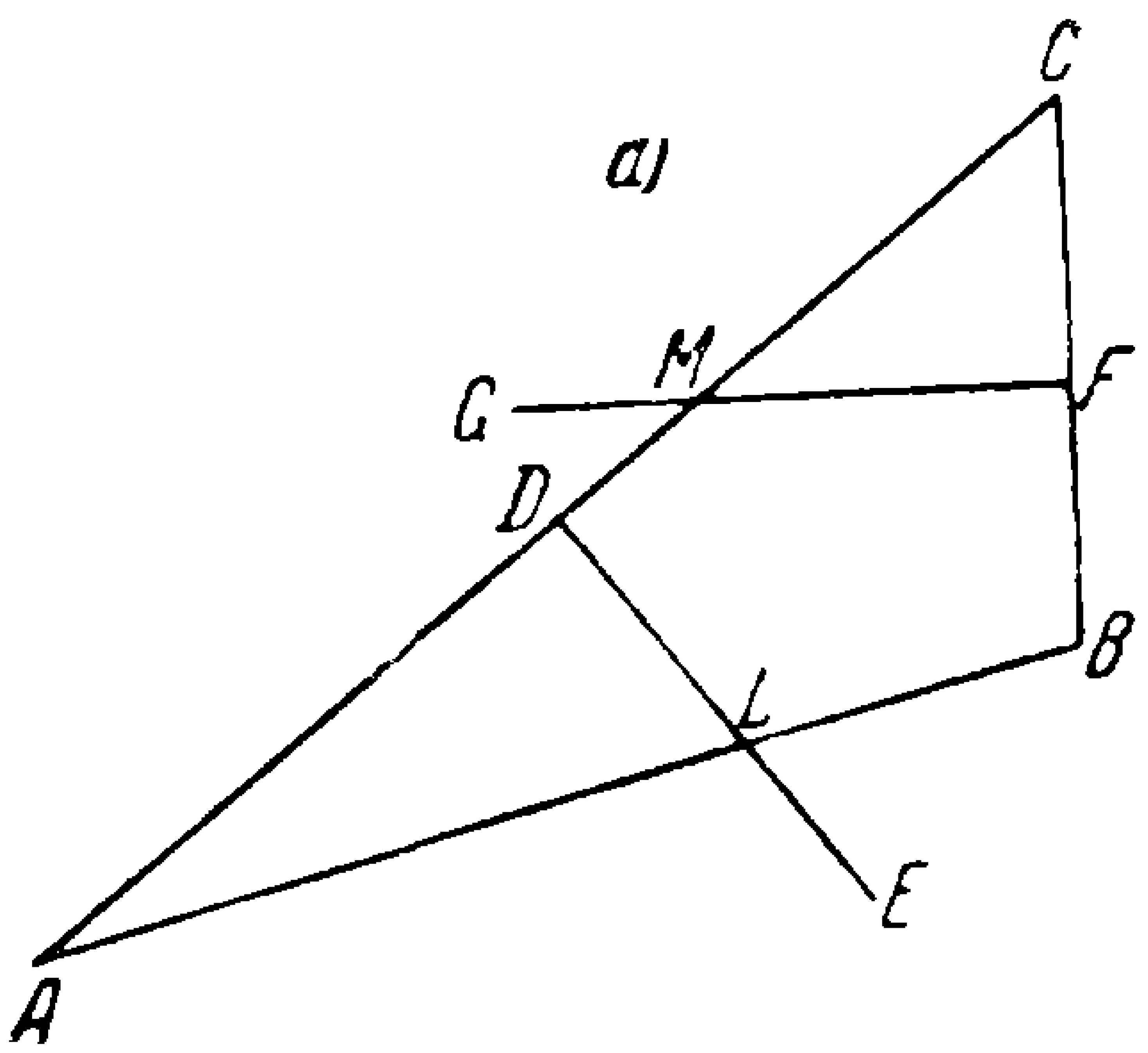


Черт. 6.

В неевклидовой геометрии применить изложенное выше рассуждение нельзя. Более того, если допустить, что около всякого треугольника можно описать окружность, то отсюда вытекает постулат о параллельных линиях. Докажем это

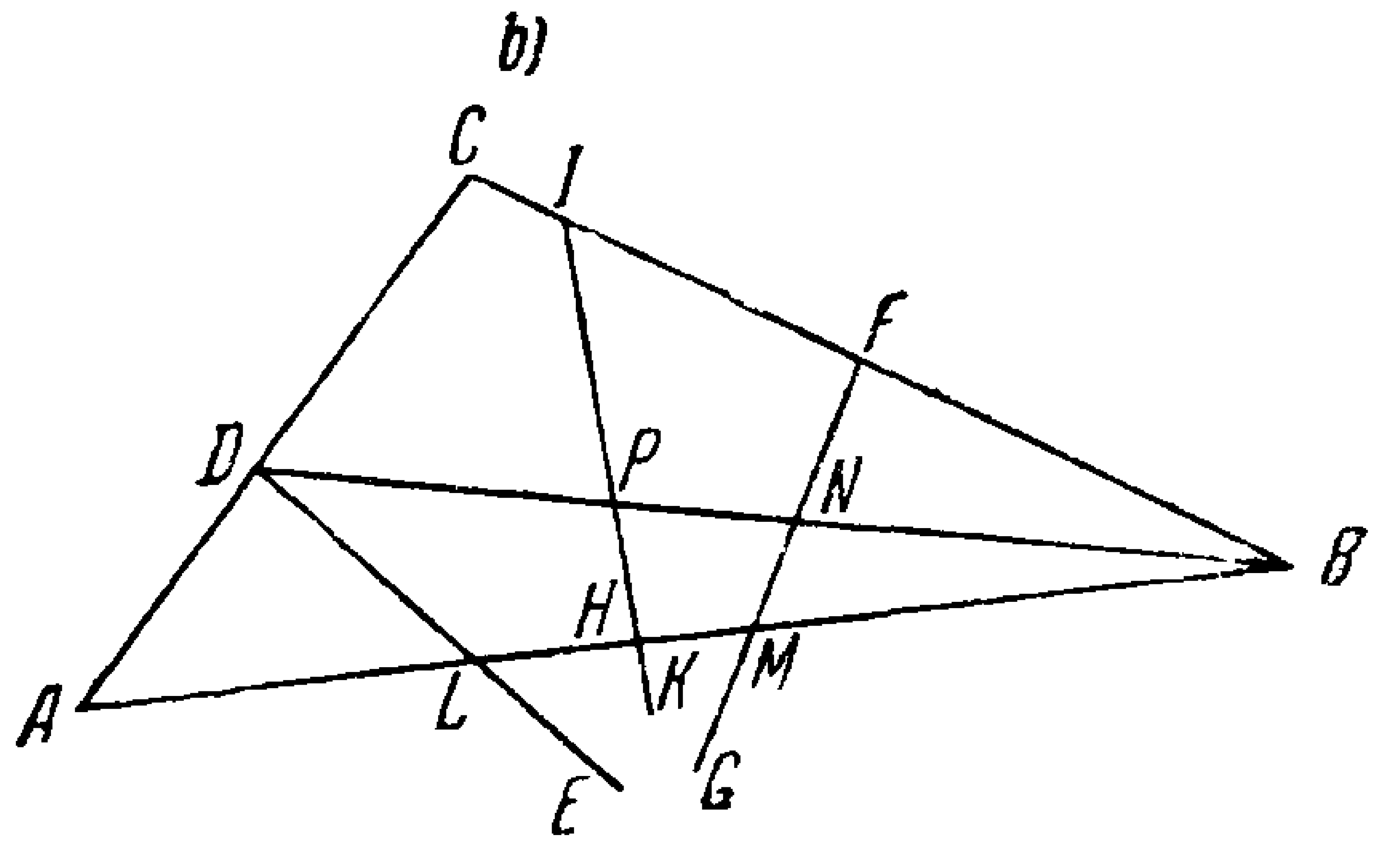
Допустим, следовательно, что *около всякого треугольника можно описать окружность*. Пусть теперь прямая EE' (черт. 6) перпендикулярна к прямой AB, а другая прямая HF' образует с ней острый угол. Покажем, что при сделанном предположении наклонная HF' неизбежно встречает перпендикуляр EE'; т. е. *имеет место постулат о параллельных линиях*. Для этого отложим на прямой EH по обе стороны от точки E равные отрезки $EA = EB$. Из точки B опустим на прямую HF', перпендикуляр BF, который не может совпасть с BH, потому что последняя прямая к HF' не перпендикулярна. На прямой BF от точки F по другую ее сторону отложим отрезок $FC = FB$. Тогда три точки A, B, C не лежат на одной прямой; согласно допущению, вокруг треугольника ABC можно описать окружность. Центр этой окружности неизбежно ляжет в точке пересечения прямых EE' и FF'.

Положение „через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность“ эквивалентно постулату Евклида; оно представляет собой одну из форм постулата, устанавливающего евклидову геометрию. Различие, которое в этом отношении имеет место в евклидовой и в неевклидовой геометрии, обстоятельно выяснено в Приложении II.



Черт. 7.

[17] На черт. 22 текста, при помощи которого Лобачевский обосновывает все доказательство, оба перпендикуляра DE и FG, восставленные к сторонам треугольника AC и BC из их середин D и F, пересекают третью сторону AB в точках L и M и притом так, что середина H третьей стороны лежит между точками L и M. Эту конфигурацию необходимо прежде всего обосновать. Конечно, могло бы случиться, что перпендикуляр DE действительно встречает сторону треугольника AB, между тем как перпендикуляр FG встречает не AB, а AC, как это имеет место на черт. 7. Однако в предположении, что перпендикуляры DE, FG, HK не пересекаются (как это соответствует условию теоремы), конфигурация, приведенная в тексте, всегда имеет место, если за основание AB взята *наибольшая* сторона треугольника ($AB \geqslant AC$, $AB \geqslant BC$), (см. черт. 8). В самом деле, перпендикуляр HI к стороне AB, выходя из треугольника, пересекает бо́льшую из двух других сторон треугольника, скажем, сторону CB, в некоторой точке I. Так как $AB \geqslant CB$, то $HB \geqslant FB$, а потому во всяком случае $IB > FB$ (предложение 9). Точка F лежит, следовательно, внутри стороны IB треугольника IHB. Перпендикуляр FM, входя внутрь треугольника IHB, должен пересечь еще одну его сторону; но сторону IH он встретить не может,



Черт. 8.

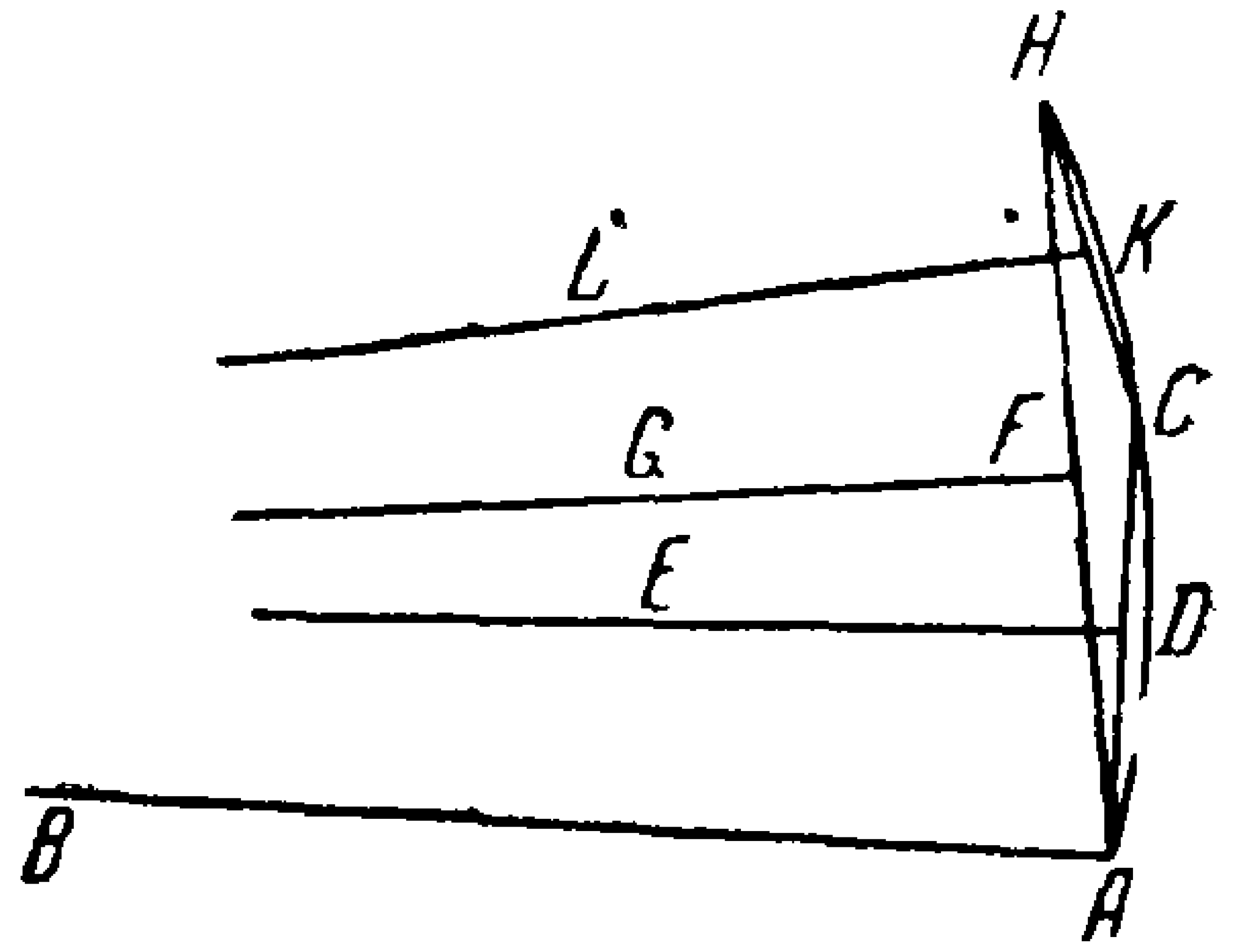
так как перпендикуляры HK и FG по условию не пересекаются. Следовательно, он встречает сторону HB, т. е. точка M лежит между H и B.

Заметим, что случай $AB = CB$ теперь нужно считать исключенным. В самом деле, медиана DB, входя внутрь треугольника FBM, должна встретить сторону FM в некоторой точке N.

Если бы $AB = CB$, то перпендикуляр DE совпал бы с медианой DB и, следовательно, пересек бы перпендикуляр FG, что противно условию. Итак, $AB > CB$. Но в таком случае в треугольниках ADB и CDB при общей стороне DB и при $AD = DC$ третьи стороны неравны ($AB > CB$). Следовательно, $\angle ADB > \angle CDB$ (предложение I, 24 „Начал" Евклида, не зависящее от постулата о параллельных). Следовательно, угол ADB тупой. Поэтому перпендикуляр DE входит внутрь четырехугольника $ADPH$; выходя из него, он не может встретить сторону PH, потому что он вообще не пересекается с перпендикуляром HK. Он встречает, таким образом, сторону AH в некоторой точке L.

[18]. Изложим указанное в тексте построение предельной линии подробнее.

Лобачевский предполагает сначала, что предельная линия задана некоторой определенной своей точкой A (черт. 9) и проходящей через эту точку осью AB (см. черт. 24 текста). Под произвольным *острым* углом BAC к оси он проводит прямую AC, на ней откладывает отрезок $AD = a$, для которого $\Pi(a) = BAD$, так что перпендикуляр к нему DE параллелен AB; затем он удваивает этот отрезок, откладывая $DC = AD$. При непрерывном изменении угла CAB от $\frac{1}{2}\pi$ до 0 точка C образует предельную линию, определяемую „началом" A и „осью" AB. Перпендикуляр DE к хорде AC, выходящей из начала, в ее середине D параллелен оси AB по самому построению кривой. Совершенно так же перпендикуляр FG к хорде AH в ее середине F параллелен AB, а следовательно, и DE. Таким образом в треугольнике ACH перпендикуляры, восставленные к двум его сторонам из их середин, параллельны. В силу предложения 30 перпендикуляр KL к хорде HC в ее середине также параллелен AB; иначе говоря, все перпендикуляры, восставленные из середин хорд кривой в надлежащую сторону, параллельны между собой в соответствии с определением предельной линии. Вместе с тем ясно, что ту же кривую получим, если будем исходить, скажем, из точки H и примем за ось луч, проходящий через H параллельно AB. Таким образом, каждая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось. Это может быть выражено в следующем виде.



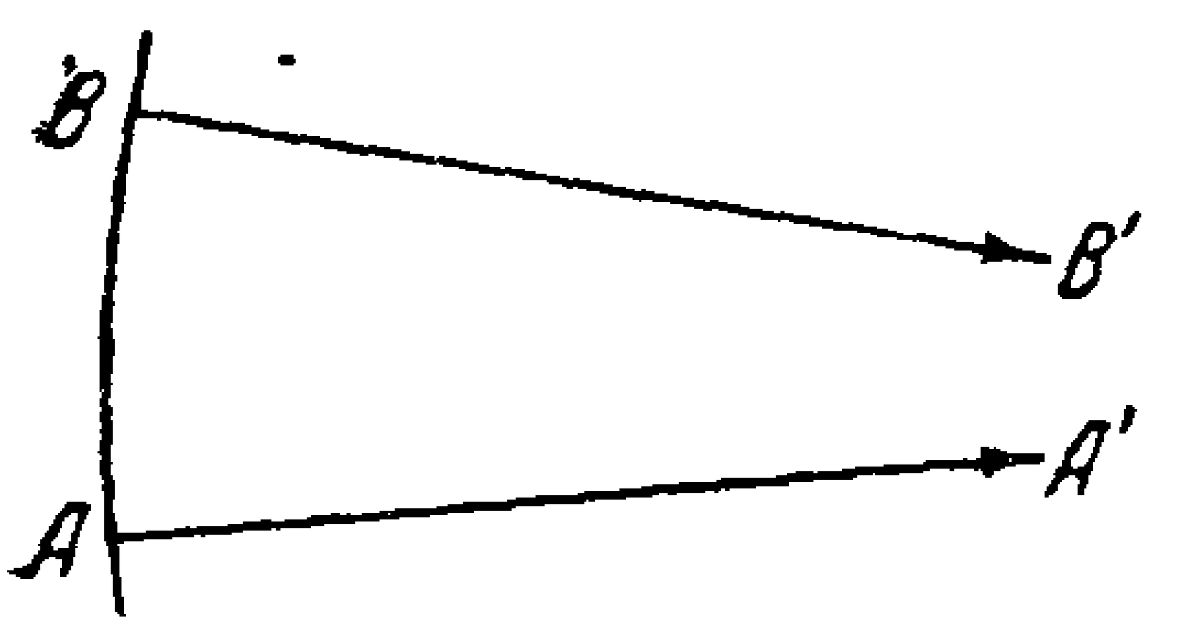
Черт. 9.

Т е о р е м а 1. *Предельная линия вполне определяется любой своей точкой и осью.*

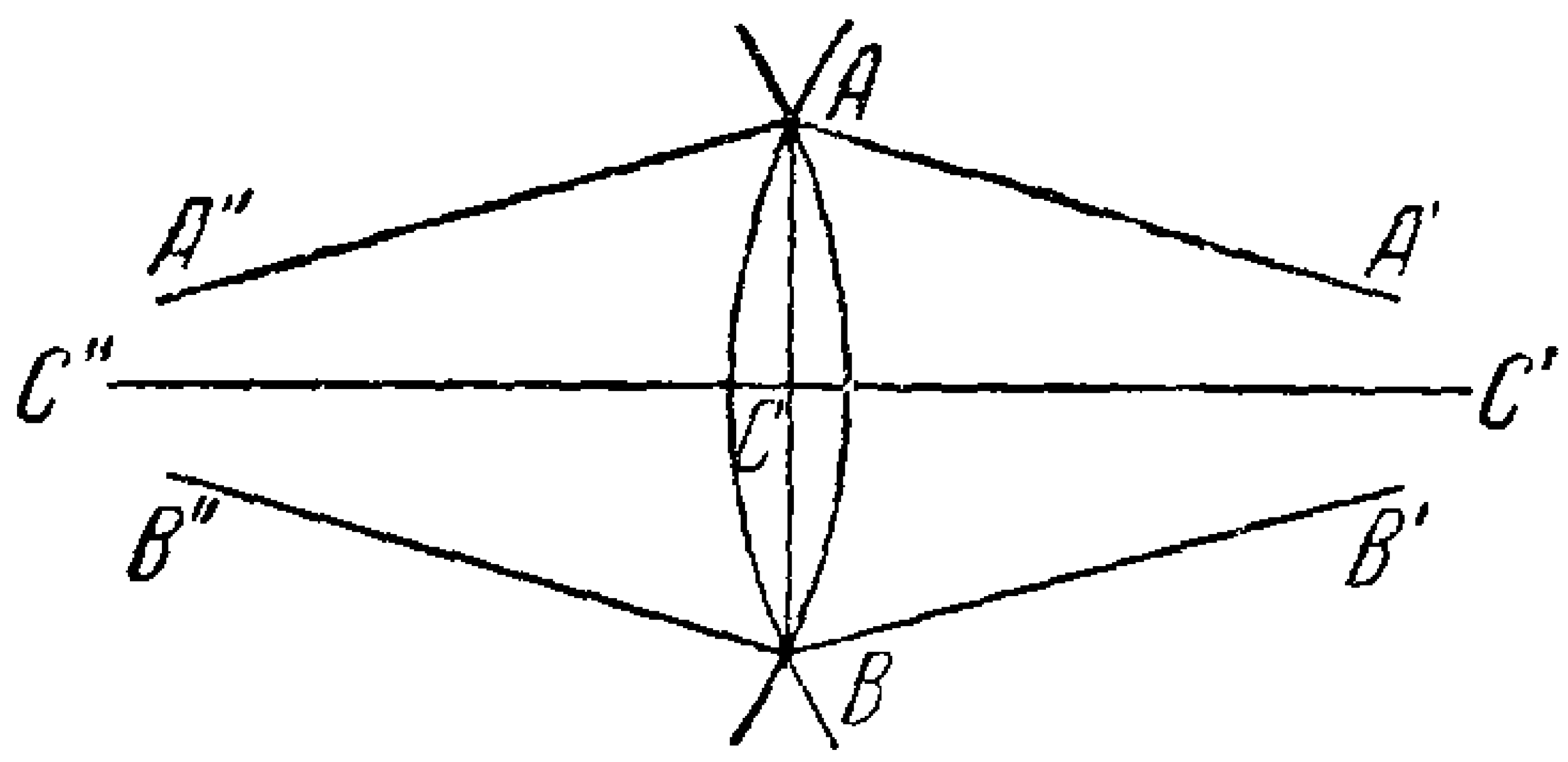
В тесной связи с этим находится еще одно важное свойство предельной линии. Передвинем предельную линию AB (черт. 10) так, чтобы точка A совместилась с точкой B, а луч AA' — с лучом BB'. Тогда предельная линия совместится с самой собой, потому что она так же определяется точкой B и осью BB', как и точкой A и осью AA'. Так как точку B можно взять сколь угодно близко к A, то можно этому результату дать следующее выражение:

Т е о р е м а 2. *Предельная линия может скользить по себе самой подобно тому, как может скользить по себе самой прямая и окружность.*

Изложенное рассуждение обнаруживает также, что перпендикуляры, восставленные к хордам предельной линии из их середин, не только параллельны между собой, но параллельны осям кривой; они могут рассматриваться как ее оси. Отсюда еще следующий вывод:



Черт. 10.



Черт. 11.

Т е о р е м а 3. *Предельная линия определяется двумя своими точками до симметрии относительно прямой, соединяющей эти точки.*

В самом деле, если A и B (черт. 11) суть две точки предельной линии, то мы найдем ее ось, восставив перпендикуляр к отрезку AB из его середины C. Однако эта ось может быть направлена либо в сторону CC', либо в противоположную сторону CC''. В силу предыдущей теоремы отсюда следует, что через точки A и B проходят две (и только две) предельные линии; они симметричны относительно прямой AB. Третья точка уже определяет и сторону, в которую ось обращена.

Т е о р е м а 4. *Оси предельной линии, проведенные через две ее точки, одинаково наклонены к хорде, соединяющей эти точки.*

В самом деле, как мы видели, $\angle A'AB = \angle B'BA = \Pi\left(\frac{1}{2} AB\right)$. Это свойство предельной линии Гаусс и Больай принимали за ее определение и основывали на нем ее построение (см. следующее примечание [19]).

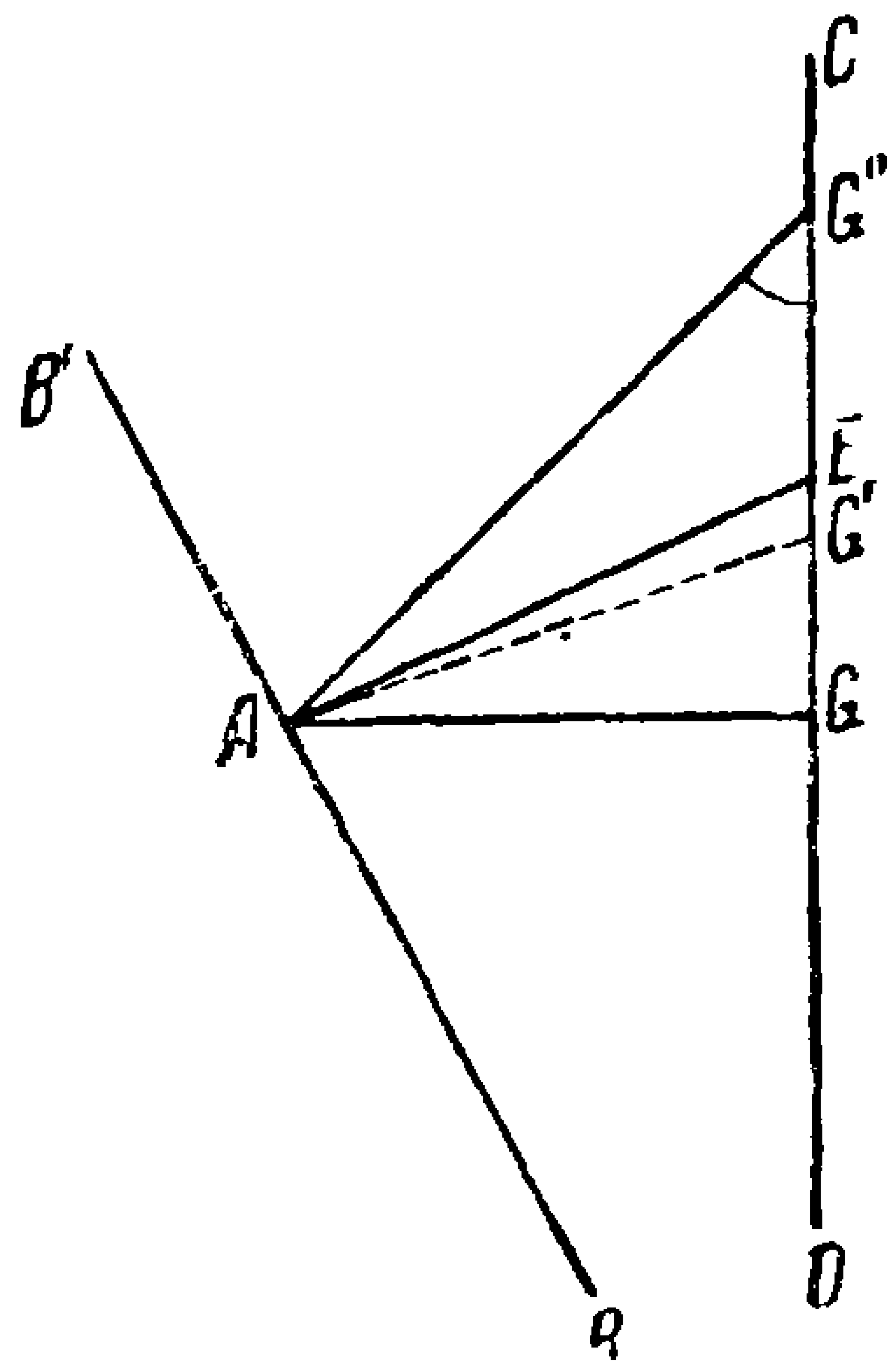
Если хорда AB стремится к нулю, то прямая AB обращается в пределе в касательную; угол $\Pi\left(\frac{1}{2} AB\right)$ при этом стремится к $\frac{1}{2}\pi$. Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Касательная к предельной линии перпендикулярна к оси, проходящей через точку касания.*

[19] Определение (и построение) предельной линии, данное Гауссом (см. предыдущее примечание), им только намечено. Но оно имеет большие достоинства. Мы дадим здесь подробное обоснование этого построения. Это требует некоторых предварительных предложений.

Лемма 1. *Как бы ни были расположены две прямые AB и CD на плоскости, через каждую точку A одной из них можно провести одну и только одну прямую AE таким образом, чтобы она образовала с обеими данными прямыми равные внутренние односторонние углы, т. е. чтобы имело место равенство (черт. 12)*

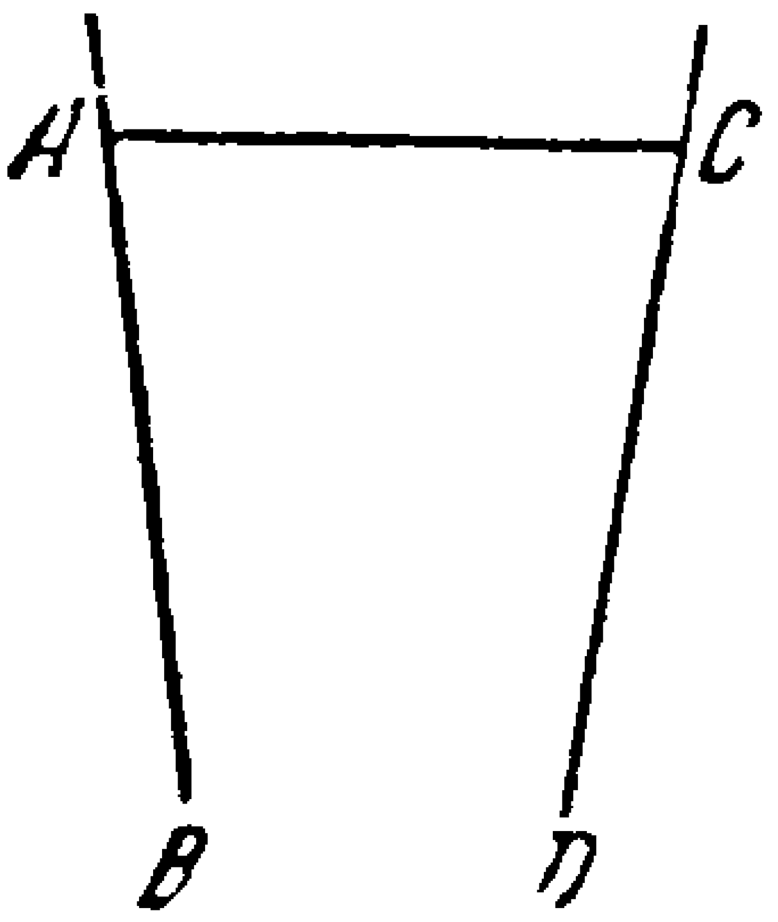
$$\angle AED = \angle EAB.$$



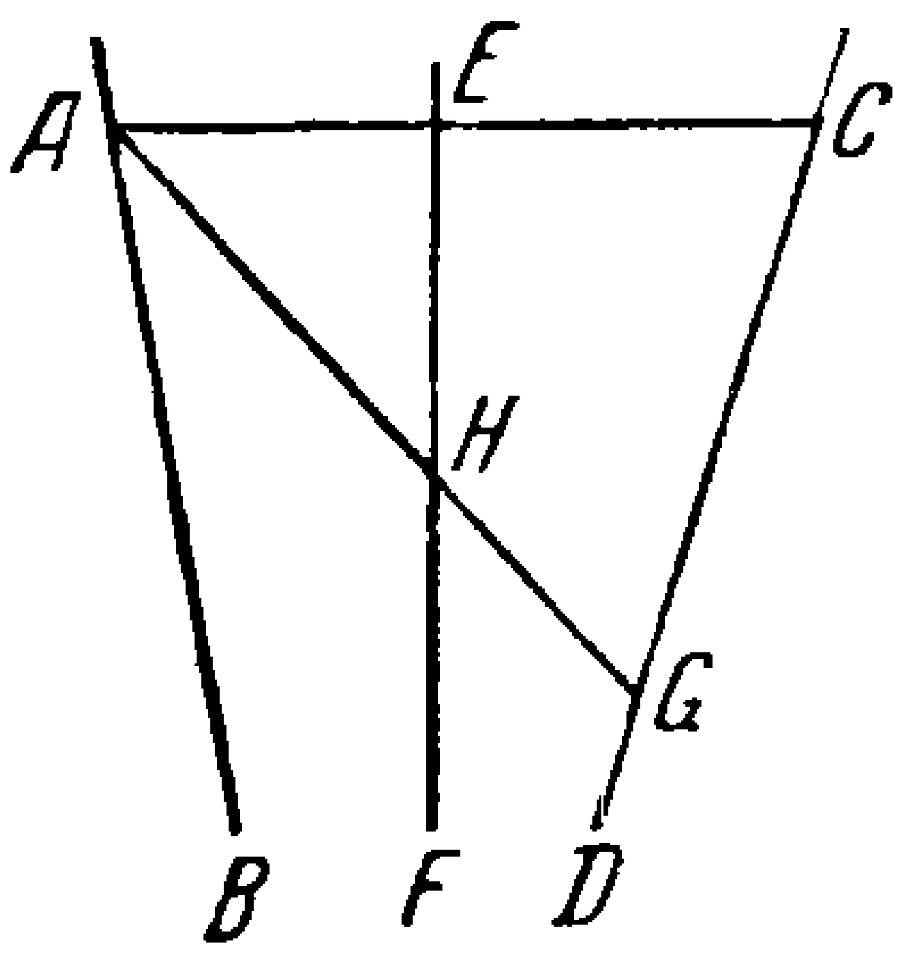
Черт. 12.

Чтобы это доказать, опустим из точки A перпендикуляр AG на прямую CD. Если бы оказалось, что прямая AG перпендикулярна также к AB, то это и была бы требуемая прямая. Положим поэтому, что AG образует с AB с одной стороны острый угол BAG, а с другой стороны — тупой угол $B'AG$. Со стороны AB, таким образом, угол BAG меньше внутреннего угла DGA, который секущая AG образует с той же стороны со второй прямой GD. Если точка G передвинется в противоположную сторону GC в точку G', т. е. если секущая AG повернется в положение AG', то угол, который она образует с лучом AB, возрастет: $\angle BAG' > \angle BAG$. Напротив, соответствующий односторонний угол при прямой CD уменьшится: $\angle AG'D < \angle AGD$. Отложим в сторону GC отрезок $GG'' = AG$. Тогда $\angle GAG'' = \angle GG''A$, а потому $\angle BAG'' > \angle AG''D$. Это значит, что когда секущая AG, вращаясь вокруг A, перейдет из положения AG в AG'', то угол, который она образует с лучом AB, бывший сначала меньше соответствующего ему одностороннего угла при второй прямой, в положении AG'' станет больше его ($\angle BAG'' > \angle AG''D$). Между точками G и G'' в силу непрерывности изменения угла $AG'D$ будет поэтому существовать точка E, при которой $\angle BAE = \angle DEA$; AE и есть искомая прямая. При дальнейшем вращении секущей угол при луче AB возрастает, соответствующий же односторонний с ним угол уменьшается; равенство их нарушается. Через точку A проходит, следовательно, только одна прямая, обладающая требуемым свойством.

Эту прямую можно называть *секущей равного наклона* прямых AB и CD. Особенное значение имеет тот случай, когда лучи AB и CD параллельны (черт. 13). Если в этом случае AC есть секущая равного наклона, то Гаусс называет точку C *соответственной точке* A на параллели CD. Каждой точке луча соответствует, таким образом, одна и только одна точка на любом параллельном луче.



Черт. 13.



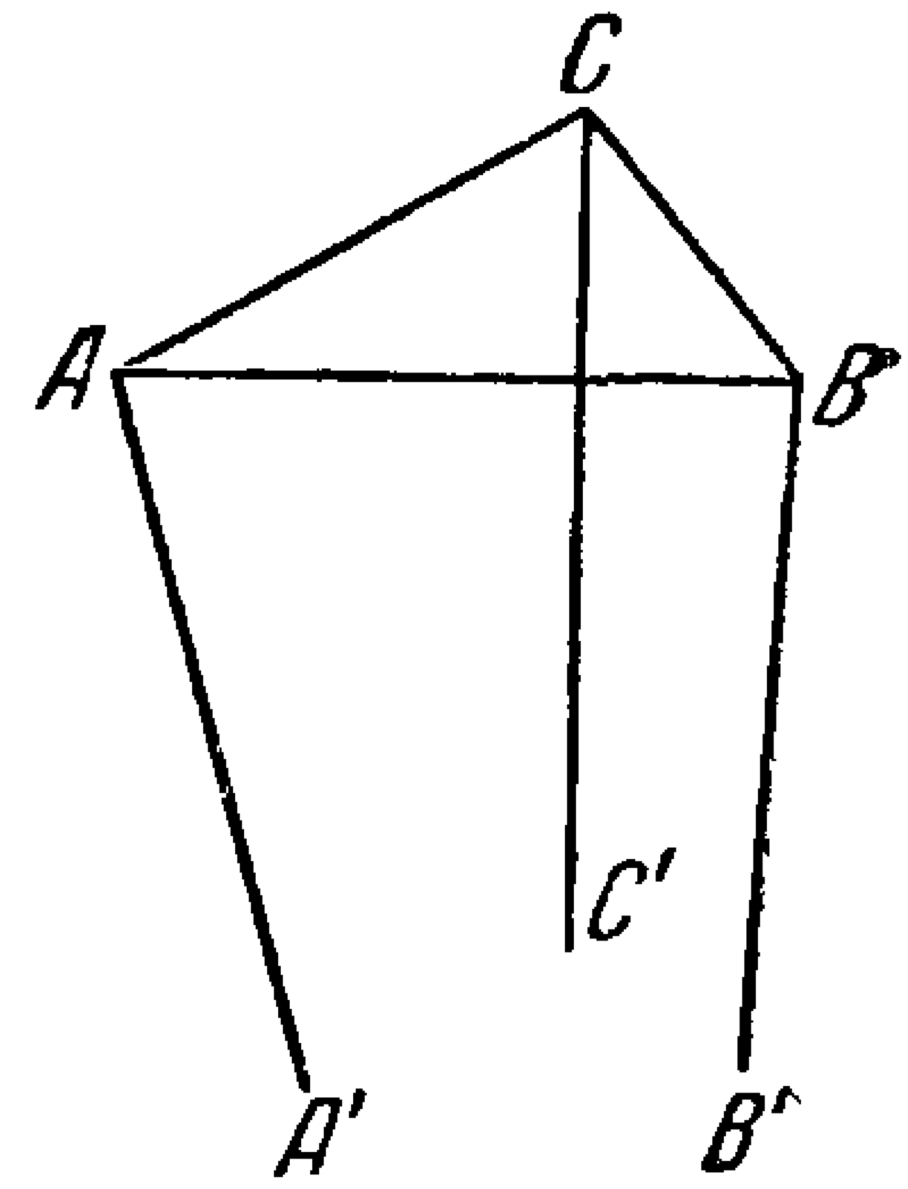
Черт. 14.

В развитие леммы 1 приведем еще следующее предложение:

Лемма 2. *Перпендикуляр, восставленный к секущей равного наклона AC двух параллельных лучей AB и CD из ее середины E, параллелен этим лучам* (черт. 14).

В самом деле, ни одного из этих лучей он не может встретить, ибо через точку пересечения, если бы таковая существовала, вследствие равенства углов BAC и DCA, неизбежно проходила бы вторая параллель. Всякий же луч AG, проходящий внутри угла EAB, непременно встретит луч CD, а потому, переходя с одной стороны прямой EF на другую, необходимо пересечет луч EF в некоторой точке H (предложение 5 Лобачевского). Это рассуждение Лобачевский собственно и приводит при доказательстве предложения 30 (черт. 22). Самое предложение 30 может быть в терминологии Гаусса формулировано следующим образом.

Лемма 3. *Если через вершины A, B, C треугольника ABC в его плоскости проведем параллельные между собой лучи AA', BB', CC' и притом так, что точки A и B соответствуют друг другу на параллелях AA' и BB', а точки B и C соответствуют друг другу на параллельных BB' и CC', то точки A и C друг другу соответствуют на параллелях AA' и CC'* (черт. 15).

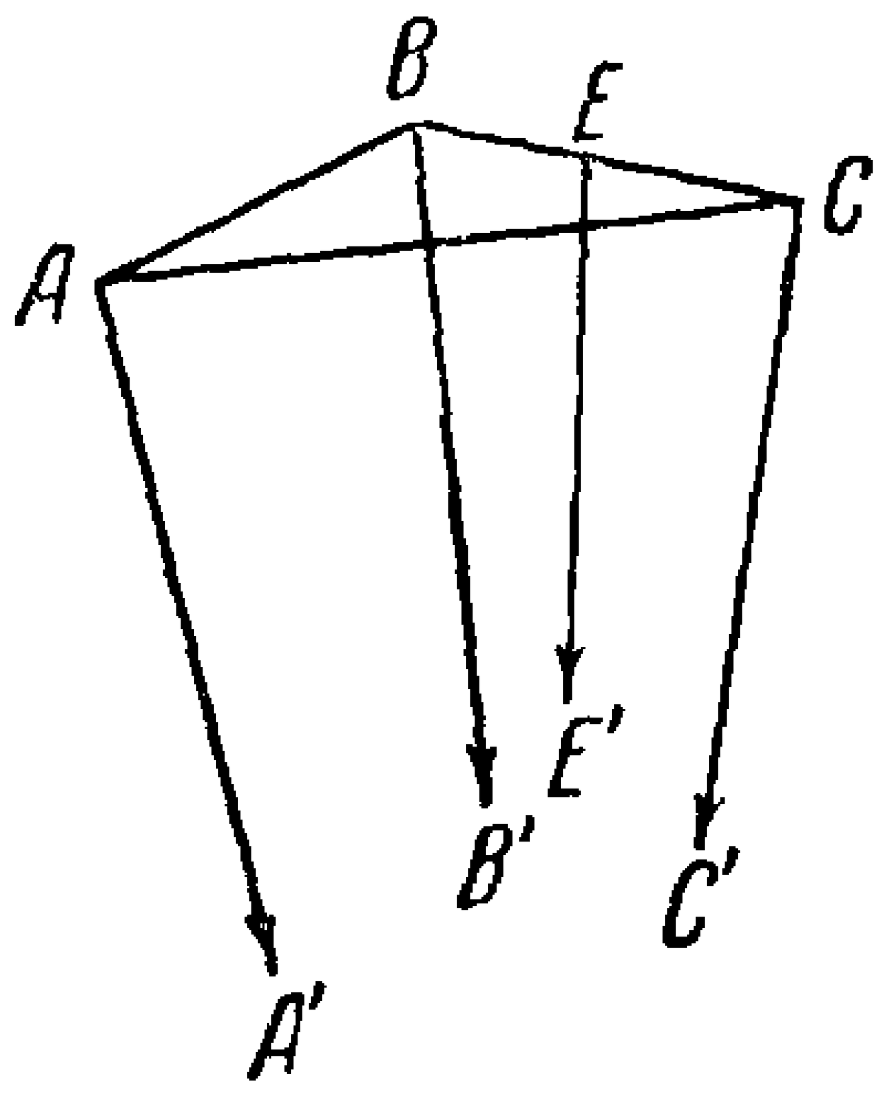


Черт. 15.

Еще иначе: *если через вершины A, B, C треугольника ABC в его плоскости проведем параллельные лучи AA', BB', CC'* и *при этом две стороны треугольника служат секущими равного наклона по отношению к соответствующим параллелям, то и третья сторона треугольника служит секущей равного наклона по отношению к параллелям, проходящим через ее концы.*

Обратимся теперь к той роли, которую эти предложения играют в геометрии Лобачевского или, лучше, в том определении предельной линии, которую дает Гаусс.

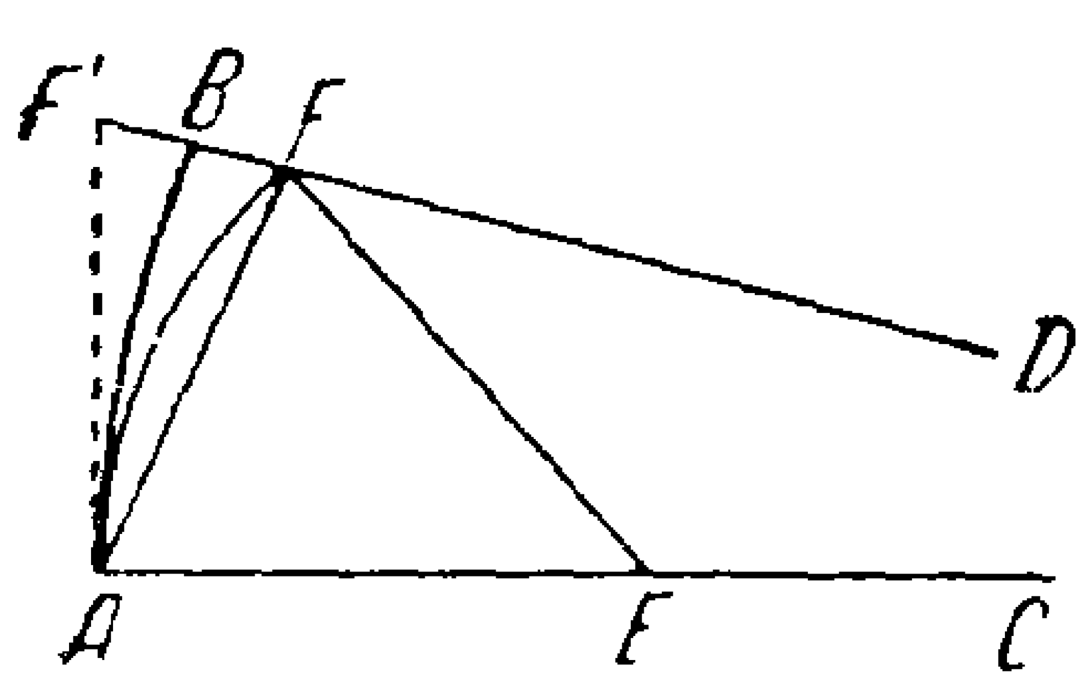
В некоторой плоскости представим себе луч AA' и совокупность всех ему параллельных лучей (пучок параллельных лучей, мы будем говорить короче: „пучок AA'“). Если будем исходить от определенной точки A на AA', то ей на каждом луче BB' пучка соответствует в установленном значении слова определенная точка B. *Геометрическое место точек B на всех лучах* и есть *предельная линия Лобачевского.*



Черт. 16.

В самом деле, если B и C (черт. 16) суть две точки этой линии, т. е. если они соответствуют точке A на параллелях BB' и CC', то в силу леммы 3 (т. е. предложения 30 в тексте Лобачевского) они и друг другу соответствуют на своих параллелях, т. е. BC есть секущая равного наклона по отношению к параллелям BB' и CC'. Согласно лемме 2 перпендикуляр EE', восставленный из середины хорды BC, параллелен лучам BB', CC', т. е. принадлежит пучку AA'. Кривая обладает основным свойством, которым Лобачевский определяет предельную линию. Обратно, построение Лобачевского устанавливает, что его предельная линия обладает свойством, содержащимся в этом новом определении. В самом деле, если B есть точка предельной линии, определяемой началом A и осью AA', а хорда $AB = 2a$, то по построению Лобачевского $\angle A'AB = \angle B'BA = \Pi(a)$.

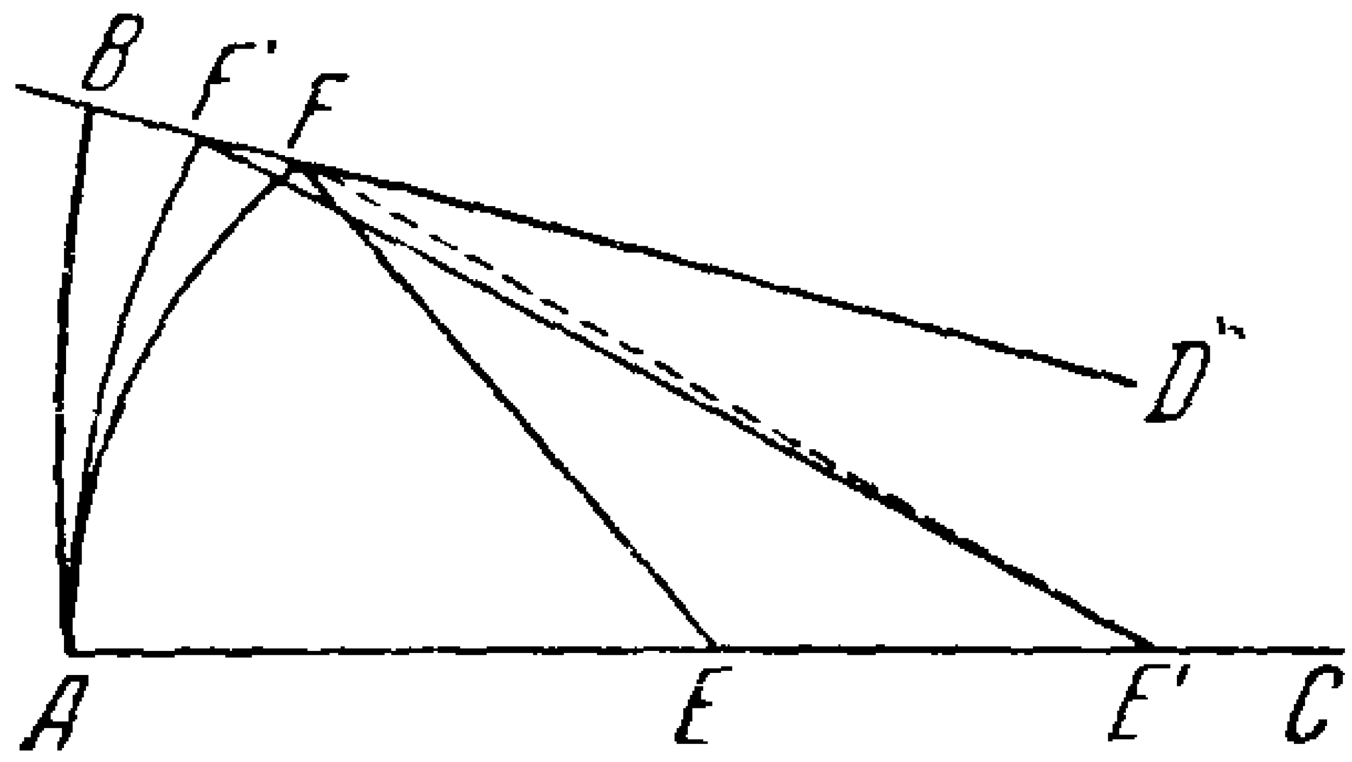
Если бы мы исходили при построении предельной линии не от точки A, а от другой точки B, то точка A, как соответствующая B на параллели BB', оказалась бы на предельной линии, определяемой точкой B и лучом BB'; на ней оказалась бы и каждая точка C той же линии. Это значит, что *любая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось*; результат, к которому приводит также построение Лобачевского, как это было указано в предыдущем примечании.



Черт. 17.

[20] Приведенное в тексте рассуждение несколько сжато, но по существу совершенно безукоризненно. Мы здесь четко доведем его до конца.

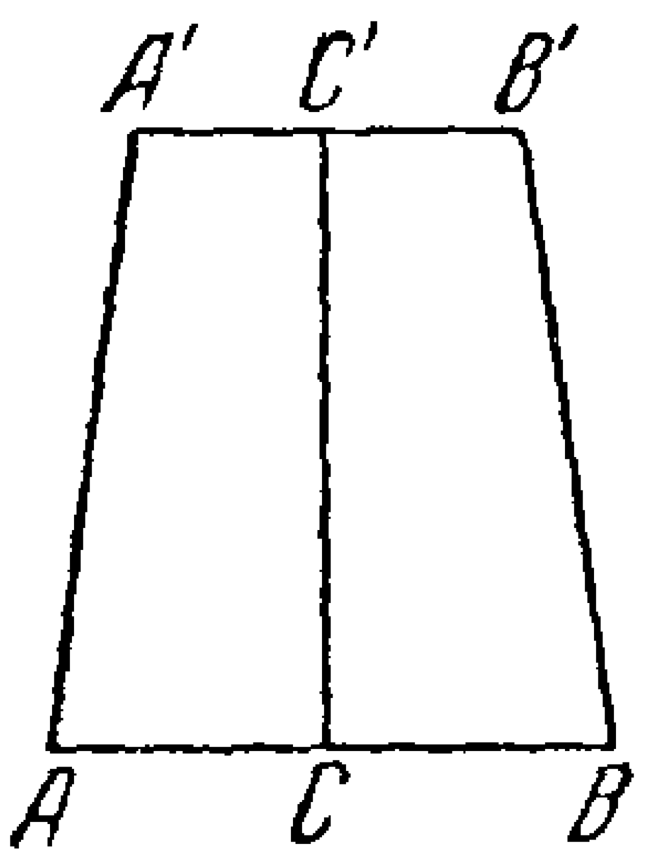
Черт. 17 воспроизводит черт. 25 текста. Здесь AF есть дуга окружности, описанной из точки E радиусом EA и встречающей прямую BD в точке F. Покажем прежде всего, что точка F при этом неизбежно лежит на луче BD, т. е. расположена относительно B со стороны точки D. Это следует из того, что $\angle AFD > \angle AFE$, а так как $\angle AFE = \angle FAE$, то $\angle AFD > \angle FAE$; между тем, если бы точка пересечения падала в F' по другую сторону от B (черт. 18), то $\angle AF'B$ был бы меньше угла ABD, который по свойству предельной линии равен углу BAE. В тексте отчетливо доказано, что при этом $\angle BAF < \frac{1}{2} \angle DFE$.



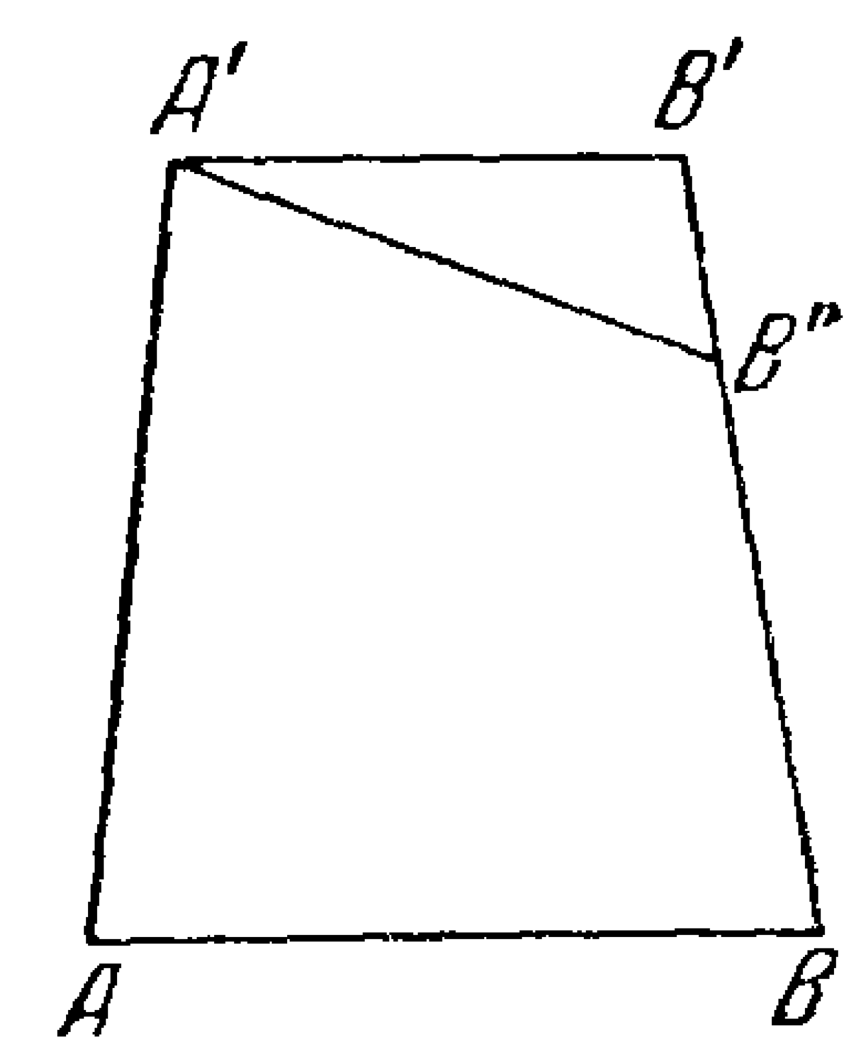
Черт. 18.

Теперь, после того как центр E уже выбран и точка F таким образом зафиксирована, возьмем произвольно малый угол ε и из точки F проведем луч FE', образующий с FD угол $DFE' < \varepsilon$. Этот луч встретит луч AC (вследствие параллельности лучей FD и AC) в некоторой точке E'. Примем теперь точку E' за центр и проведем окружность радиусом $E'A$. Эта окружность встретит ось BD в точке F', лежащей относительно B также со стороны точки D, но между B и F. Вместе с тем $\angle BAF' < \frac{1}{2} \angle DF'E'$, а $\angle DF'E' < \angle DFE'$, а потому $\angle BAF' < \frac{1}{2} \varepsilon$. Так как угол ε произвольно мал, то точка F' с увеличением радиуса неограниченно приближается к B.

[21] Сущность этого рассуждения вряд ли может представить затруднение. Тем не менее точное обоснование этих заключений требует предварительного установления нескольких простых теорем.



Черт. 19.



Черт. 20.

Лемма 1. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$* (черт. 19) *равны углы при „нижнем основании“ ($\angle A = \angle B$) и „боковые стороны“ ($AA' = BB'$), то равны также углы при верхнем основании ($\angle A' = \angle B'$), а средняя линия (т. е. прямая CC', соединяющая середины обоих оснований) перпендикулярна к основаниям.*

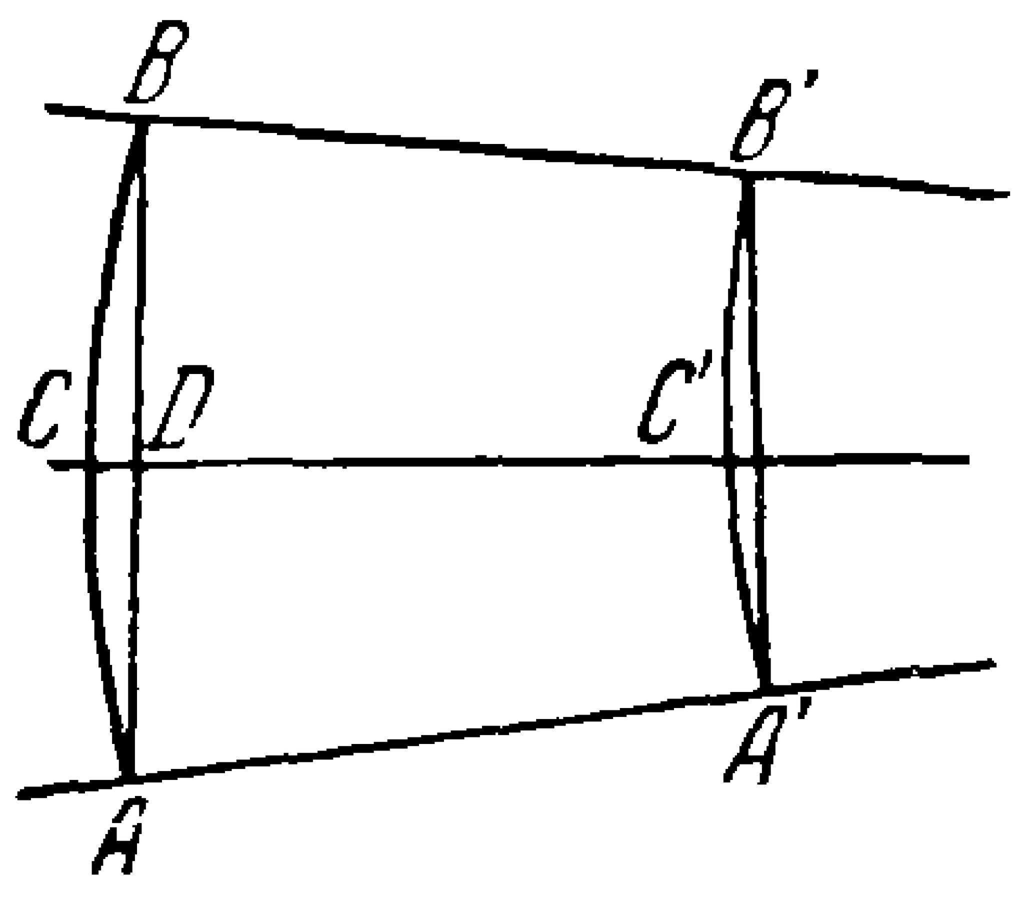
Доказательство осуществляется наложением чутырехугольника самого на себя, так что AB совмещается с BA, BB' с AA', и обратно, а средняя линия CC' совмещается с самой собой.

Лемма 2. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$ равны углы при верхнем и при нижнем основаниях ($\angle A = \angle B$ и $\angle A' = \angle B'$), то равны и боковые стороны ($AA' = BB'$)* (черт. 20).

Доказательство от противного. Допустим, что $AA' < BB'$. Отложим на BB' отрезок $BB'' = AA'$. Теперь в четырехугольнике $ABB''A'$ углы при верхнем основании в силу предыдущей теоремы должны быть равны: $\angle AA'B'' = \angle BB''A'$, что несовместимо с равенством углов $AA'B'$ и $A'B'B$.

Теорема 1. *Отрезки осей, которые содержатся между предельными линиями, имеющими общие оси, равны между собой.*

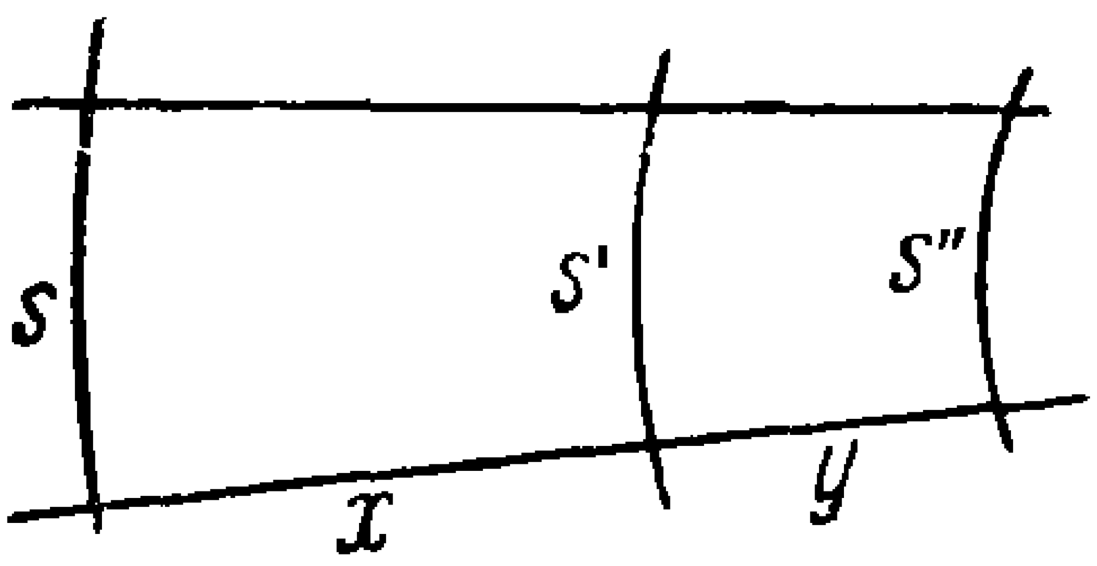
На чертеже 21 AA' и BB' суть общие оси предельных линий AB и $A'B'$. Вследствие этого угол $A'AB$ равен углу $B'BA$ (см. на стр. 88—90 подробное примечание 19 к предложению 31); по той же причине равны также углы $AA'B'$ и $BB'A'$; в силу леммы 2 поэтому равны отрезки AA' и BB'.



Черт. 21.

Теперь мы можем с полным основанием говорить о расстоянии x между двумя „параллельными" (т. е. имеющими общие оси) предельными линиями: это расстояние можно отсчитывать по любой оси: $AA' = BB' = x$.

Перпендикуляр BD, опущенный из точки B на ось CC', называется *высотой предельной дуги* BC. Таким образом, высота предельной дуги есть перпендикуляр, опущенный из одного ее конца на ось, проходящую через другой ее конец. Ясно, что *предельная дуга* (по своей длине) вполне *определяется своей высотой.* В самом деле, если дан отрезок BD, то, продолжив его на расстояние $DA = DB$, проведем дугу BCA, проходящую через точки A и B (см. [18], теор. 3). Половина этой дуги BC удовлетворяет требованию.



Черт. 22.

Теорема 2. *Равным дугам предельной линии отвечают равные дуги на параллельной предельной линии.*

Если $AC = CB$, то мы совместим дугу AC с CB (см. примечание [18], теорема 2): дуга AC может скользить по CB. Тогда оси AA' и CC' пойдут по осям CC' и BB' (теорема 3 в том же примечании); равные отрезки AA' и CC', а также CC' и BB' соответственно совместятся; вместе с тем дуга $A'C'$ совместится с дугой $C'B'$ (та же теорема 3).

Теорема 3. *Соответствующие дуги s и s', t и t' двух параллельных предельных линий пропорциональны.*

Эта теорема доказана в тексте на основе теоремы 2.

[22] Как показано в тексте, отношение $\frac{s}{s'}$ есть функция расстояния x между предельными дугами, от величин же дуг s и s' оно не зависит. Эту функцию обозначим через $f(x)$.

Возьмем три предельные дуги s, s', s'' (черт. 22), содержащиеся между теми же двумя осями. Пусть x будет расстояние между дугами s и s', y — расстояние между дугами s' и s''. Тогда

$$s = s'f(x), \quad s' = s''f(y),$$
$$s = s''f(x+y).$$

Следовательно, функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x+y)=f(x)f(y):$$

так как $f(x)$ есть непрерывная функция от x, то это уравнение характеризует показательную функцию a^x. Так как по условию $f(1)=e$, то $a=e$, т. е. $s=e^x$, где e, однако, остается еще неопределенным. Лобачевский замечает, что надлежащим выбором единицы длины можно привести к тому, что основание e совпадет с основанием неперовых логарифмов. При выяснении этого для большей отчетливости будем исходить из формулы $s=s'a^x$.

Если мы увеличим единицу длины в k раз, то отношение $\frac{s}{s'}$ сохранит свое значение, число же x заменится числом $x=\frac{x}{k}$. Поэтому мы будем иметь

$$s=s'a^{k\bar{x}}=s'(a^k)^{\bar{x}}.$$

Число k можно выбрать так, чтобы $a^n=e$, где e — основание неперовых логарифмов. Вместе с тем

$$s=s'e^{\bar{x}} \text{ или } s'=se^{-\bar{x}}. \qquad (!)$$

Черта над x означает, что длина отрезка выражена в специфической единице, при которой формула (!) имеет место. Лобачевский раз навсегда устанавливает, что единица меры выбрана именно так, а потому пишет просто $s'=se^{-x}$. Нужно, однако, твердо помнить, что этим зафиксирована единица длины (см.прим.[29]).

В связи с этим нужно обратить внимание на следующее весьма важное обстоятельство. В гиперболической геометрии, как обнаруживают эти соображения, существует некоторая специфическая длина, выбор которой в качестве единицы меры имеет абсолютное преимущество: говорят, что в гиперболическом пространстве возможна „абсолютная мера длины“. Эта единица меры определяется математически и на основе этого определения может быть фактически установлена только экспериментально. Абсолютная мера длины гиперболического пространства есть та, в которой имеет место соотношение $s'=se^{-x}$; это — ее математическое определение.

Какова же эта единица фактически? Этот вопрос может быть разрешен только прямым измерением. Дальнейшие соображения по этому вопросу читатель найдет ниже, в примечании [36] к предложению 37.

Отрезок, служащий при установленных соглашениях единицей длины, в настоящее время часто называют *радиусом кривизны пространства.* Возможность абсолютной единицы длины долго вызывала возражения против признания гиперболической геометрии. В евклидовом пространстве такой абсолютной единицы не существует: все прямолинейные отрезки здесь равноправны, и единица меры может быть установлена только заданием стандарта — зафиксированного стержня. Однако на сфере абсолютная мера длины в том смысле, как понимается этот термин, возможна: за таковую можно, например, принять длину окружности большого круга или определенную ее часть. Такой абсолютной единицей меры является также радиан, т. е. π-я часть полуокружности большого круга; в этой именно абсолютной единице обыкновенно пишутся все метрические соотношения сферической геометрии.

Если в гиперболическом пространстве за единицу меры принять не радиус кривизны пространства, а другой отрезок, в $\varkappa$ раз меньший, то основное соотношение предложения 33 принимает вид

$$s' = se^{-\frac{x}{\varkappa}} \qquad (!!)$$

Теперь радиус кривизны выражается числом $\varkappa$. Если радиус сферы выражается числом R, то кривизна сферы выражается числом $\frac{1}{R^2}$; по аналогии с этим при соотношении (!!) говорят, что кривизна гиперболического пространства выражается отрицательным числом $-\frac{1}{\varkappa^2}$. Этот выбор отрицательного числа имеет дополнительные основания, указанные ниже, в примечании [38] к предложению 37.

Лобачевский всегда полагает $\varkappa = 1$; нужно, однако, снова отметить, что при этом условии единица длины уже зафиксирована.

[23] Предельную поверхность Лобачевский определяет как такую поверхность, которая образуется вращением предельной линии вокруг одной из своих осей. Это определение, таким образом, существенно отличается от определения предельной линии. Между тем, эти определения могут быть сближены. Все элементы для такого объединения содержатся и в предложении 34 настоящего сочинения.

Предположим, как в тексте, что предельная поверхность образована вращением предельной линии вокруг ее оси AA' (черт. 27). Лобачевский отмечает прежде всего, что во всякой точке B поверхности ось BB' наклонена к хорде AB под тем же углом, под которым к этой хорде наклонена ось вращения AA'. В терминологии Гаусса это означает, что точка B на луче BB' соответствует точке A на луче AA'; оно и естественно, так как B есть точка предельной линии, которая в плоскости осей AA' и BB' определяется началом A и осью AA' (см. предложение 31, примечание [17]). Но так как этим свойством обладает каждая точка предельной поверхности, то это приводит к следующему определению последней.

Представим себе все лучи *в пространстве,* параллельные лучу AA', — „связку параллелей“ $\{AA'\}$. Каждый луч BB' этой связки лежит с AA' в одной плоскости, и на нем существует одна и только одна точка B, соответственная (см. примечание [18]) точке A луча AA'. *Геометрическое место точек B на всех лучах связки и есть предельная поверхность, определяемая точкой A и осью AA'.* Это определение предельной поверхности явно аналогично определению предельной линии в плоскости. Исследование предельной линии основывается главным образом на предложении, приведенном в примечании [18] в виде леммы 3. Это предложение остается в силе и в том случае, когда параллельные лучи AA', BB', CC' расположены не в плоскости ABC, а как угодно в пространстве. Именно доказательство этой теоремы и составляет главное содержание предложения 31 в тексте. Формулируем ее в этом виде.

Если AA', BB' и CC' суть параллельные между собой лучи, которые не расположены в одной плоскости, причем как точка B на луче BB', так и точка C на луче CC' соответствуют точке A на луче AA', то точки B и C соответствуют друг другу на лучах BB' и CC'.

Самое доказательство, приведенное в тексте, устанавливает прежде всего, что около треугольника ABC при условиях задания всегда можно описать окружность. Это не находится в противоречии с тем, что в гиперболической геометрии около данного треугольника не всегда возможно описать окружность. Дело в том, что рассматриваемый здесь треугольник не произвольный: две его вершины *соответствуют* третьей на трех параллелях, проходящих через его вершины и не расположенных в одной плоскости. Это есть уже треугольник специфического строения, при котором описанная окружность всегда существует.

Доказательство заключается в том, что на перпендикуляре DF, восставленном в плоскости треугольника к стороне AB из ее середины D, устанавливается точка F, через которую проходит также перпендикуляр EF, восставленный из середины E стороны AC. При этом оказывается, что перпендикуляр, восставленный из точки F к плоскости треугольника, параллелен связке лучей AA', BB', CC'. Проведя через этот перпендикуляр и середину G третьей стороны BC плоскость, получим в сечении с плоскостью параллелей BB' и CC' луч GG', параллельный им и перпендикулярный к BC. Поэтому $\angle B'BC = \angle C'CB = \Pi\left(\frac{1}{2} CB\right)$, т. е. точки B и C соответствуют друг другу на параллелях BB' и CC'.

Если теперь за начало предельной поверхности примем точку B и луч BB' — за начальную ось, то точки A и C, как соответствующие ей на лучах AA' и CC', окажутся на поверхности. Это значит:

Каждая точка предельной поверхности может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось.

Предельную поверхность можно, таким образом, рассматривать как поверхность вращения вокруг любой оси (подобно тому, как это имеет место в случае сферы и плоскости).

Теперь уже не трудно показать совершенно так же, как это было сделано в примечании [18] (теорема 2), что предельная поверхность может передвигаться по самой себе так, чтобы каждая ее точка пришла в совмещение с любой другой ее точкой, а вращением поверхности вокруг любой ее точки можно любой выходящий из этой точки предельный луч поверхности привести в совмещение с любым другим предельным лучом, выходящим из той же точки. На предельной поверхности, таким образом, возможны движения тех же типов, что и на плоскости или на сфере.

[24] Евклидова двумерная геометрия, так называемая *планиметрия*, может быть построена рассуждениями, относящимися только к плоскости, т. е. без обращения в трехмерное пространство. Такое построение евклидовой планиметрии осуществляется на основе возможных в плоскости движений и постулатов, характеризующих ее основные образы, главным образом прямую. Движения в евклидовой плоскости характеризуются следующими „постулатами движения":

a) *Плоскость может быть перемещена в самой себе таким образом, чтобы любая ее точка A пришла в совмещение с любой другой ее точкой A' (принцип транзитивности движения).*

b) *Плоскость может быть повернута в самой себе вокруг любой ее точки A таким образом, чтобы любой луч AB, выходящий из центра вращения, совместился с любым другим лучом AB', также выходящим из центра вращения („принцип вращения").*

Этими двумя постулатами устанавливаются возможные в плоскости движения. С присоединением к ним постулатов Евклида о прямой линии — постулатов, характеризующих расположение точек на прямой, постулата непрерывности, постулата Паша (см. примечание [3] на стр. 83), наконец, постулата о параллельных линиях, получается база, на которой строится плоская геометрия Евклида.

Двумерная геометрия может быть в том же порядке идей построена и на другой поверхности, допускающей движения с теми же степенями свободы. Такими поверхностями в евклидовом пространстве являются только сферы. На сфере возможны движения, удовлетворяющие принципу транзитивности и принципу вращения. Но роль прямых линий здесь играют окружности больших кругов, роль лучей — соответствующие полуокружности.

Однако постулаты, характеризующие окружности больших кругов на сфере, существенно отличаются от постулатов, характеризующих прямые на плоскости. Прямая вполне определяется любыми двумя точками, так что две прямые на плоскости могут пересекаться только в одной точке; окружности больших кругов на сфере всегда пересекаются в двух точках. Прямая может быть неограниченно продолжена в обе стороны; окружность большого круга есть замкнутая кривая конечного размера. Это порождает глубокое различие в геометриях плоскости и сферы. В евклидовом пространстве существуют два типа поверхностей, на которых может быть построена геометрия по принципу „свободной подвижности“ [1] — плоскости и сферы; им соответствуют два типа двумерной геометрии — плоская и сферическая, как теперь часто говорят, *евклидова* и *риманова.*

Обращаемся к „пространству Лобачевского“, т. е. к пространству, в котором имеют место установленные им постулаты неевклидовой геометрии. Здесь на плоскости имеет место своеобразная „гиперболическая“ геометрия, отличная от евклидовой. На сфере в гиперболическом пространстве имеют место те же движения, что и на сфере евклидова пространства; сферическая геометрия в гиперболическом пространстве не отличается от обычной, как она была построена в евклидовом пространстве. Лобачевский ниже обнаруживает (см. предложение 35), как далеко идет это совпадение.

Но в гиперболическом пространстве существует, кроме того, замечательный тип поверхностей, на которых имеет место свободная подвижность. Мы видели (заключительный абзац примечания [[23]]), что на предельной поверхности возможны движения, удовлетворяющие тем же основным двум постулатам.

При построении геометрии предельной поверхности роль прямых играют предельные линии. Предельная линия на предельной поверхности вполне определяется двумя точками. Действительно, если через точки A и B предельной поверхности проведем ее оси AA' и BB' и через них проведем плоскость, то она пересечет предельную поверхность по той единственной предельной линии, которая на этой поверхности проходит через точки A и B. Далее, предельную линию можно неограниченно продолжить в обе стороны. На предельной поверхности остаются в силе постулаты, определяющие расположение точек на предельной линии, постулат непрерывности, постулат Паша. Лобачевский еще даже не владел точно перечнем постулатов геометрии; но из 15 предложений, приведенных им в начале настоящего сочинения в качестве базы для всего дальнейшего построения геометрии, 10 относятся к двумерной геометрии и как бы составляют принимаемую им аксиоматику плоской геометрии. Все эти 10 предложений остаются в силе на предельной поверхности, если в них заменить прямые предельными линиями. Поэтому для окончательного решения вопроса о характере геометрии остается только решить, как обстоит дело с постулатом о параллельных линиях. Но мы знаем, что этот постулат эквивалентен предложению, что сумма углов в треугольнике равна π. В предельном треугольнике на предельной поверхности сумма внутренних углов действительно равна π. Следовательно, *на предельной поверхности имеет место евклидова геометрия.* Этот замечательный результат, таким образом, обнаруживает, что с отказом от постулата Евклида о параллельных

[1] Этот термин принадлежит Софусу Ли („freie Beweglichkeit“).

линиях двумерная евклидова геометрия не прекращает своего существования: она только переносится с плоскости на предельную поверхность. В предельном треугольнике сохраняются соотношения евклидовой геометрии, что служит точкой отправления для построения метрики неевклидова пространства.

Полезно отметить, что в гиперболическом пространстве существуют поверхности еще одного типа, на которых возможно движение фигур без деформации с тремя степенями свободы; это — *эквидистантные поверхности*. Под эквидистантной поверхностью разумеют геометрическое место точек, отстоящих от заданной плоскости (базы поверхности) на одно и то же расстояние h (параметр поверхности). На плоскость можно смотреть как на эквидистантную поверхность с параметром $h=0$. Таким образом в гиперболическом пространстве существует три типа поверхностей, на которых возможны движения с тремя степенями свободы: сферические, эквидистантные и предельные поверхности.

[25] В евклидовой геометрии угол обычно измеряется либо в градусах (прямой угол измеряется числом 90 или 100), либо в радианах (прямой угол измеряется числом $\frac{\pi}{2}$). Оба эти способа измерения угла применяются и в неевклидовой геометрии; но здесь возможен и своеобразный *линейный* способ выражения угла. Каждому острому углу φ отвечает отрезок, выражаемый в установленной единице меры числом x, для которого $\Pi(x)=\varphi$; это число x и представляет своеобразное, только в неевклидовой геометрии существующее, выражение угла; его поэтому можно назвать *гиперболическим значением угла;* нужно, однако, иметь в виду, что гиперболическое значение угла не пропорционально величине угла. Этим гиперболическим значением угла Лобачевский уже и выше пользовался для выражения угла (см., например, предложение 34; двугранный угол выражен своим гиперболическим значением a); в дальнейшем он пользуется им систематически. Заметим еще, что $\Pi(x)$ выражает в радианах тот угол, гиперболическое (линейное) значение которого есть x.

Здесь, однако, Лобачевский вводит дополнительное соглашение, заключающееся в следующем. Обозначая через x гиперболическое значение некоторого угла, он обозначает через x' гиперболическое значение дополнительного угла. Таким образом, углы $\Pi(x)$ и $\Pi(x')$ всегда дополняют друг друга до $\frac{1}{2}\pi$; это и выражено уравнением, приведенным в тексте.

[26] Действительно, положим, что существует сферический треугольник kmn (черт. 28) со сторонами $mn=\Pi(c)$, $kn=\Pi(\beta)$, $mk=\Pi(a)$ и противолежащими им углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$. На луче Bn отложим отрезок BA, равный c, и из точки A опустим перпендикуляр AC на прямую Bk. Полученный таким образом треугольник ABC будет удовлетворять требованию. Действительно, из точки A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треуголь-

ника ABC; луч Bm обозначим через BB' и прямую пересечения плоскостей $B'BC$ и $A'AC$ обозначим через CC'. Угол $B'BA$ измеряется стороной mn сферического треугольника, а потому равен $\Pi(c)=\Pi(AB)$; следовательно, луч BB' параллелен AA'; вместе с тем луч CC' параллелен AA' и BB' (см. заключительный абзац предложения 25). С другой стороны, по самому построению плоскость $CC'AA'$ перпендикулярна к плоскости треугольника ABC; прямая BC перпендикулярна к плоскости $CC'AA'$, а вследствие этого она перпендикулярна и к прямой CC'; поэтому $\angle B'BC = \Pi(BC)$; но этот угол измеряется дугой mk сферического треугольника, а потому равен $\Pi(a)$; следовательно, $BC=a$. Далее, $\angle C'CA=\Pi(AC)$; но этот угол совпадает с углом k сферического треугольника, а потому равен $\Pi(b)$; следовательно, $AC=b$. Угол B прямоугольного треугольника ABC измеряется дугой kn, а потому равен $\Pi(\beta)$. Далее, двугранный угол (CC') прямой, двугранный угол (BB') совпадает с углом m сферического треугольника, а потому равен $\Pi(\alpha')$. Наконец, двугранный угол $(AA') = \frac{1}{2}\pi-(BB')$; но угол (BB') совпадает с углом $m=\Pi(\alpha')$ сферического треугольника, поэтому $(AA')=\Pi(\alpha)$; а так как угол (AA') измеряется линейным углом A, то $A=\Pi(\alpha)$. Итак, в треугольнике ABC стороны и углы имеют значения a, b, c, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, т. е. существование сферического треугольника со сторонами $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ обусловливает существование прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$.

Заменим теперь обозначения, к которым привели предшествующие соображения, более общими. Именно положим

$$c=x,\ \beta=y,\ a=z;\quad b=\xi,\ \alpha'=\eta. \tag{!}$$

Тогда стороны и углы сферического треугольника можно будет представить таблицей

$$\begin{matrix} \Pi(x), & \Pi(y), & \Pi(z), \\ \Pi(\xi), & \Pi(\eta), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix} \tag{A}$$

Мы можем смотреть на x и y как на линейные аргументы, определяющие катеты этого сферического треугольника, на z — как на аргумент его гипотенузы, на ξ и η — как на линейные аргументы его острых углов. Теорема, установленная в тексте и доказанная здесь, сводится к тому, что существование сферического прямоугольного треугольника (A) влечет за собой существование прямолинейного прямоугольного треугольника со сторонами и углами

$$\begin{matrix} z, & \xi, & x, \\ \Pi(\eta'), & \Pi(y), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix} \tag{B}$$

Это станет совершенно ясным, если заметим, что при

$$\Pi(\alpha)+\Pi(\alpha')=\frac{\pi}{2}, \qquad \Pi(\eta)+\Pi(\eta')=\frac{\pi}{2} \text{ и } \eta=\alpha',$$

необходимо $\eta'=\alpha$.

Но в сферическом треугольнике (A) мы можем транспонировать катеты z и y, транспонируя в то же время аргументы острых углов, т. е. ξ и η. Иначе говоря, тот же сферический треугольник (A) мы можем, конечно, представить таблицей

$$\begin{array}{ccc} \Pi(y), & \Pi(x), & \Pi(z), \\ \Pi(\eta), & \Pi(\xi), & \frac{1}{2}\pi, \end{array} \qquad (A')$$

в таком случае он влечет за собой прямолинейный треугольник

$$\begin{array}{ccc} z, & \eta, & y, \\ \Pi(\xi'), & \Pi(x), & \frac{1}{2}\pi. \end{array} \qquad (B')$$

В применении к треугольнику, о котором идет речь в тексте, при обозначениях (!) это приводит к треугольнику

$$\begin{array}{ccc} a, & \alpha' & \beta, \\ \Pi(b'), & \Pi(c), & \frac{1}{2}\pi. \end{array} \qquad (C)$$

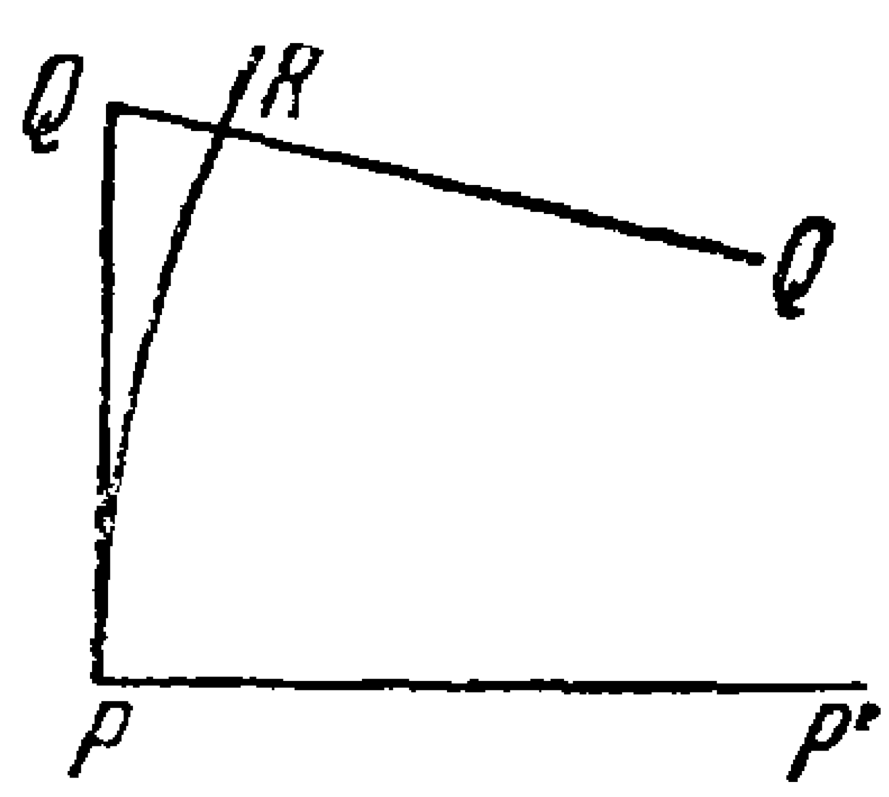
Итак, существование прямолинейного прямоугольного треугольника

$$\begin{array}{ccc} a, & b, & c, \\ \Pi(\alpha), & \Pi(\beta), & \frac{1}{2}\pi \end{array} \qquad (C')$$

влечет за собой существование сферического треугольника

$$\begin{array}{ccc} \Pi(c), & \Pi(\beta), & \Pi(a), \\ \Pi(b), & \Pi(\alpha'), & \frac{1}{2}\pi; \end{array}$$

это же влечет за собой, обратно, не только существование треугольника (C′), но и треугольника (C); эти два прямолинейных треугольника поэтому всегда существуют одновременно.



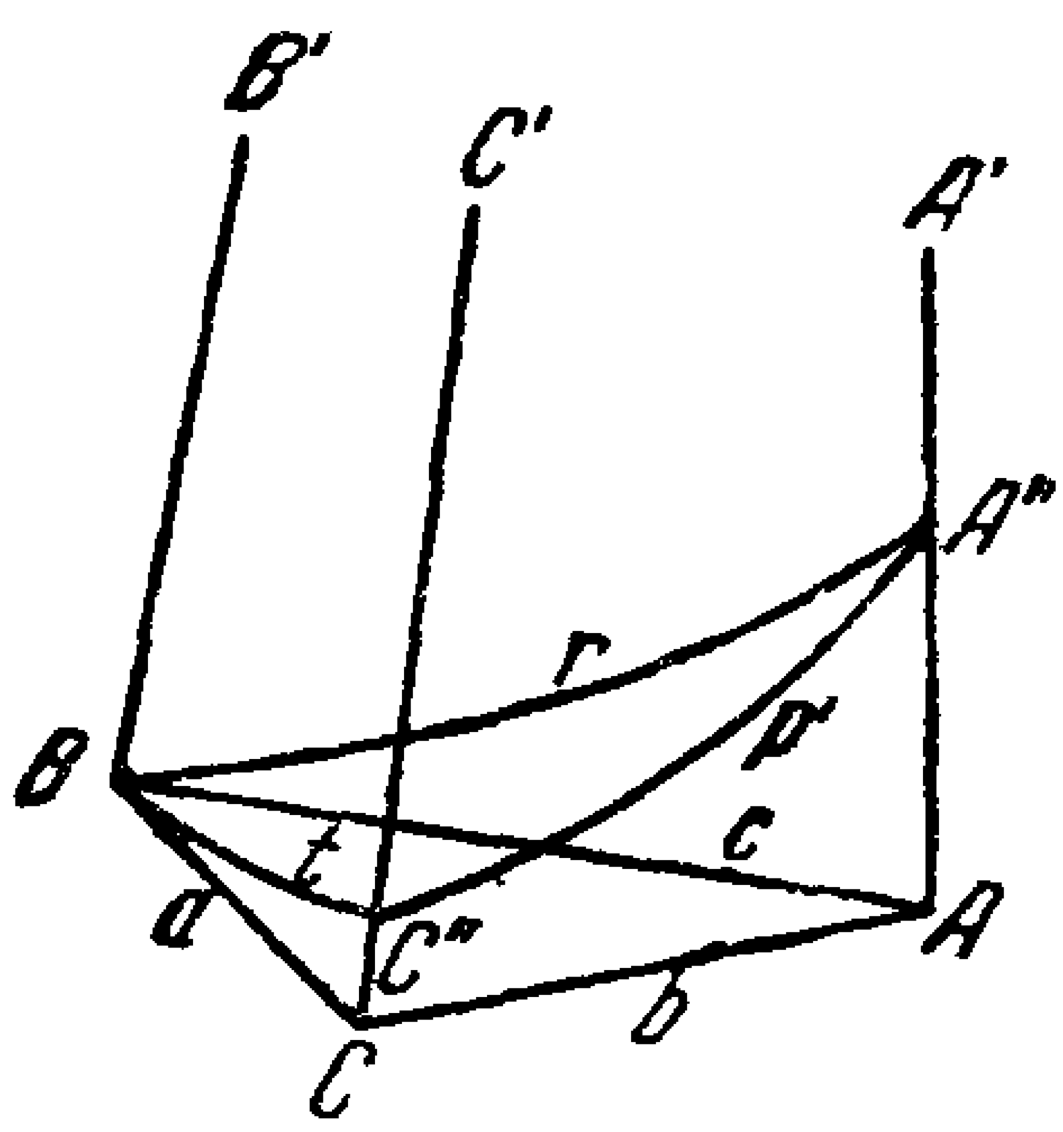
Черт. 23.

[27] Воспроизводим чертежи и рассуждения, соответствующие этой второй конфигурации. Заметим предварительно следующее: если из точки P предельной линии PR (черт. 23) проведем касательную PQ, на ней отложим отрезок PQ и из точки Q проведем луч QQ', параллельный оси PP', которая встретит предельную линию в точке R, то дуга PR вполне определяется длиной отрезка PQ. Если этот отрезок назовем *тангенциальной высотой* предельной дуги PR, то можно будет сказать, что *предельная дуга*

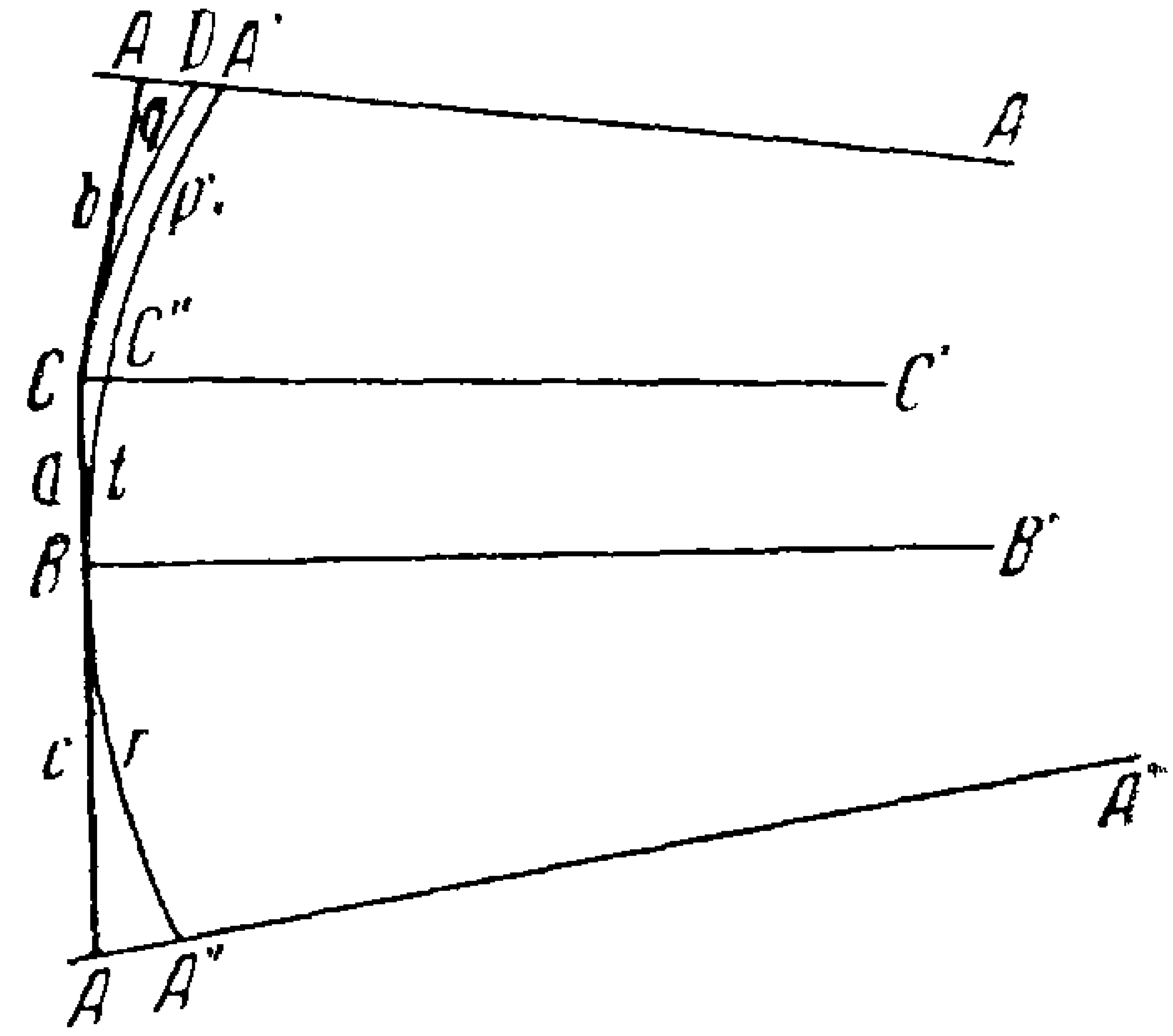
определяется своей тангенциальной высотой. [1] На черт. 28 и 30 текста r, q и t суть предельные дуги, которые соответственно определяются тангенциальными высотами c, b и a.

Теперь воспроизведем второе построение Лобачевского.

Перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника восставим не из точки A, а из вершины B; из вершин же C и A проведем лучи CC' и AA', параллельные BB' (черт. 24). Далее, принимая B за начало, луч BB' за ось, построим предельную поверхность, которая пересечет плоскости параллелей по предельным дугам BA'', BC'', $C''A''$. Тангенциальной высотой дуги BA'' служит отрезок c, а потому ее длина имеет то же значение r, что и в прежней конфигурации. Дуга



Черт. 24.



Черт. 25.

BC'' имеет тангенциальную высоту a, поэтому ее длина равна t (по прежней конфигурации). Дугу $C''A''$ обозначим через p'. Из предельного прямоугольного треугольника $A''BC''$ теперь получим

$$p' = r \sin B = r \sin \Pi(\beta); \quad t = r \cos \Pi(\beta). \qquad (!)$$

Теперь разрежем трехгранную поверхность по прямой AA' и развернем ее на плоскость (черт. 25), подобно тому как это делает Лобачевский. В этом случае, как мы видим, $BA'' = r$, $BC'' = t$; предельная же дуга CD, имеющая тангенциальную высоту b, равна q, r остается без изменения, а места дуг q и t занимают дуги t и q.

Теперь, аналогично прежней конфигурации, $CC'' = f(a)$. Поэтому

$$CD = q = p'e^{f(a)}.$$

Подставляя же сюда вместо p' выражение (!), получим

$$q = r \sin \Pi(\beta) e^{f(a)},$$

как в тексте Лобачевского.

[1] См. приложение VII, рубр. 2.

[28] Предложение 35 — наиболее важное во всем сочинении. Главное его содержание заключается в том, что в нем устанавливаются соотношения между сторонами и углами как в прямолинейном, так и в сферическом прямоугольном треугольнике. Вывод этих соотношений представляет собой образец тонкой, изумительно искусной цепи умозаключений, может быть наиболее характерных синтетических рассуждений Лобачевского. Вывод нельзя не признать довольно сложным при всей элементарности отдельных его приемов. Но наиболее ценной его стороной является совместное получение уравнений как плоской, так и сферической тригонометрии неевклидова (гиперболического) пространства. Сделаем краткий обзор этих рассуждений.

Предложение 35 разбивается на три части. Первая часть устанавливает, что каждому прямолинейному прямоугольному треугольнику соответствует некоторый сферический прямоугольный же треугольник; это соответствие взаимное: сферический треугольник, в свою очередь, определяет тот же прямолинейный треугольник. Если в этом сферическом треугольнике транспонируем катеты и противолежащие им углы, а затем воспроизводим соответствующий ему прямолинейный треугольник, то последний, как оказывается, получается из исходного прямолинейного треугольника не перестановкой катетов, а особой подстановкой, которую справедливо назвать *преобразованием Лобачевского*. Таким образом, от каждого прямолинейного прямоугольного треугольника можно в неевклидовой плоскости двояким путем перейти к другому прямолинейному же прямоугольному треугольнику: один получается транспонированием катетов и острых углов; этот прямоугольный треугольник отличается от исходного только расположением катетов, — он ему конгруэнтен; другой получается из исходного преобразованием Лобачевского, которое приводит к существенно отличному треугольнику. Вместе с тем всякое соотношение в прямоугольном треугольнике приводит в неевклидовой плоскости к ряду новых соотношений, которые получаются либо перестановкой катетов и острых углов, либо подстановкой Лобачевского.

Таким образом, достаточно получить одно соотношение между элементами прямоугольного треугольника, чтобы из него получить и остальные соотношения, алгебраически от него не зависящие. Этому и посвящена вторая часть этого предложения. Здесь Лобачевский строит предельную поверхность, проходящую через вершину одного из острых углов прямоугольного треугольника ABC и имеющую осью перпендикуляр к этой плоскости из той же вершины. Вместе с осями, выходящими из других вершин треугольника, эта ось определяет трехгранную поверхность, которая вырезывает на предельной поверхности предельный прямоугольный треугольник, определяемый исходным треугольником. Стороны и углы этого предельного треугольника связаны уравнениями евклидовой геометрии. Углы предельного треугольника выражаются очень просто через углы данного треугольника. Поэтому уравнения, связывающие стороны и углы прямолинейного треугольника, содержат элементы как прямолинейного, так и предельного треугольника; стороны предельного треугольника нужно исключить; в этом главная задача дальнейшего исследования.

Вершины B и C треугольника отстоят от предельной поверхности по осям на расстояниях BB'' и CC''. Длины этих отрезков, очевидно, представляют собой определенную функцию c и b сторон треугольника. Лобачевский обозначает их поэтому через $f(c)$ и $f(b)$. Развернув трехгранную поверхность на плоскость, Лобачевский без труда доказывает, что три отрезка $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ связаны соотношением

$$f(c) = f(a) + f(b). \qquad (!)$$

По существу это уже и есть соотношение, связывающее гипотенузу и катеты прямоугольного треугольника; нужно только разыскать функцию $f(x)$.

Лобачевский вторично строит предельную поверхность, исходя из вершины второго острого угла. Сопоставляя евклидовы соотношения между сторонами предельных треугольников, полученных один на первой, другой на второй предельных поверхностях, и их развертки, Лобачевский получает новые соотношения:

$$\sin \Pi(a)\, e^{f(a)} = \sin \Pi(b)\, e^{f(b)} = \sin \Pi(c)\, e^{f(c)}.$$

Но a и b суть независимые величины; все три части этих равенств представляют собой постоянные; полагая аргумент равным нулю, находим, что эта постоянная равна единице. Функция $f(x)$, таким образом, найдена:

$$e^{f(x)} = \frac{1}{\sin \Pi(x)}.$$

Написав теперь соотношение (!) в виде

$$e^{f(c)} = e^{f(a)} \cdot e^{f(b)},$$

получаем соотношение между катетами и гипотенузой уже в более конкретной форме:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b).$$

Из этого уравнения он получает еще четыре при помощи подстановок, указанных в первой части этого предложения.

Наконец, в третьей части предложения 35, переходя от прямолинейного треугольника к связанному с ним сферическому, Лобачевский устанавливает уравнения сферической тригонометрии прямоугольного треугольника и обнаруживает, что они совпадают с соответствующими уравнениями евклидовой геометрии, т. е. не зависят от постулата о параллельных линиях.

[29] В предыдущем основном соотношении, где было введено обозначение „e", о нем говорилось только, что e есть некоторое

положительное число, большее единицы. Значение этого числа остается произвольным в том смысле, что постулаты, на которых построена геометрия Лобачевского, совместимы с любым значением числа e. Но самое установление этого числа, очевидно, связано с единицей меры, в которой выражается длина x. С изменением единицы меры значение e будет меняться; при надлежащем выборе единицы число e совпадает с основанием натуральных логарифмов (см. примечание [22]). При всем том, в этом рассуждении есть некоторая неувязка с предыдущим. Дело в том, что совершенно аналогичное рассуждение уже было проделано в предложении 33 в примечании [22] к соотношению $s' = se^{-x}$, связывающему длины предельных дуг, содержащихся между двумя осями. И там число e зависело от единицы меры, в которой выражено расстояние x между дугами. Единица меры была уже там установлена так, чтобы e имело значение основания неперовых логарифмов. Стало быть, вновь устанавливать единицу так, чтобы и в новой показательной функции привести основание e к неперову числу, безоговорочно нельзя. Больай в своих замечаниях к „Геометрическим исследованиям" подвергает это место резкой критике. В действительности дело обстоит так, что обе экспоненциальные функции приводятся к неперову основанию при одной и той же единице меры. Лобачевский сам обнаружил этот дефект и исправил его в „Пангеометрии".

В виду важности этого момента на нем необходимо остановиться несколько подробнее. В предложении 33 установлено, что отношение двух предельных дуг $s'/s = e^{-x}$; при надлежащем выборе единицы длины здесь под e следует разуметь неперово число. При произвольном же выборе единицы длины и при том же обычном значении e, как выяснено в примечании [22], та же формула имеет вид

$$s' = se^{-x/\varkappa},$$

где $\varkappa$ — постоянное число, зависящее только от выбора единицы длины.

Совершенно независимо от этого в предложении 36 установлено, что

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x};$$

при надлежащем выборе единицы длины и здесь под e можно разуметь неперово число. Если же выбор единицы длины остается произвольным, а e имеет свое обычное значение, то формула принимает вид

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x\,k}.$$

Возникает вопрос, имеют ли при общем выборе единицы длины постоянные $\varkappa$ и k то же значение; иначе, можно ли выбрать единицу длины так, чтобы обе формулы имели вид

$$s' = se^{-x}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}.$$

Лобачевский здесь это молчаливо принимает и в „Пангеометрии" это строго доказывает. Мы приводим ниже (Приложение VI, рубр. 2) несколько упрощенное доказательство этого утверждения.

[50] Если перейти к обычным обозначениям углов, т. е. вместо $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$ писать A и B, то два уравнения, приведенные в начале настоящего предложения, примут вид

$$\sin\Pi(c)=\sin\Pi(a)\sin\Pi(b), \tag{1}$$

$$\sin A=\sin\Pi(b)\cos B. \tag{2}$$

Транспонируя в последнем уравнении углы A и B и заменяя соответственно этому катет b катетом a, получим третье уравнение, о котором говорит Лобачевский:

$$\sin B=\sin\Pi(a)\cos A. \tag{3}$$

Перемножая уравнения (2) и (3) и учитывая (1), получаем

$$\sin\Pi(c)=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B. \tag{4}$$

Исключая B из уравнений (2) и (3), получаем

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\Pi(b)}+\sin^2\Pi(a)\cos^2 A=1.$$

Освобождая это уравнение от знаменателя и заменяя в силу уравнения (1) произведение $\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)$ через $\sin\Pi(c)$, получаем

$$\sin^2\Pi(c)\cos^2 A=\sin^2\Pi(b)-\sin^2 A$$

и, следовательно, $\cos^2\Pi(c)\cos^2 A=\cos^2\Pi(b)$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей и принимая во внимание, как на это указывает Лобачевский, что все углы A, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ острые, получаем

$$\cos\Pi(c)\cos A=\cos\Pi(b). \tag{5}$$

Если из уравнений (2) и (3) исключим не угол B, а угол A, то таким же образом получим

$$\cos\Pi(c)\cos B=\cos\Pi(a). \tag{6}$$

Это и есть уравнение, приведенное в тексте под номером 2. Оно приведено и в предыдущем предложении. Теперь исключим угол A из уравнений (5) и (4). Если для этого напишем эти уравнения в виде

$$\cos A=\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(c)},\quad \operatorname{tg}A=\sin\Pi(c)\operatorname{ctg}B,$$

то исключение дает:

$$\frac{\cos^2\Pi(c)}{\cos^2\Pi(b)}=1+\sin^2\Pi(c)\operatorname{ctg}^2 B.$$

Вычисляя отсюда $\operatorname{ctg}^2\Pi(b)$, получим:

$$\operatorname{ctg}\Pi(b)=\operatorname{ctg}\Pi(c)\sin B. \tag{7}$$

Таким же образом, исключая из уравнения (4) и (5) угол B, получим

$$\operatorname{ctg}\Pi(a)=\operatorname{ctg}\Pi(c)\sin A. \tag{8}$$

Это и есть уравнение 1, приведенное в тексте.

Наконец, перемножая уравнения (5) и (8), получим

$$\operatorname{ctg}\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos A=\operatorname{ctg}\Pi(c)\sin A\cos\Pi(b).$$

Так как $\cos\Pi(c)\neq 0$, то мы можем сократить уравнение на $\cos\Pi(c)$. Заменяя после этого в силу соотношения (1) $\sin\Pi(c)=\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)$, получим

$$\cos\Pi(a)=\operatorname{ctg}\Pi(b)\operatorname{tg}A \tag{9}$$

и аналогично этому $\cos\Pi(b)=\operatorname{ctg}\Pi(a)\operatorname{tg}B$. (10)

Уравнения (7) и (8) отличаются от соответствующих уравнений евклидовой геометрии

$$a=c\sin A,\quad b=c\sin B$$

тем, что стороны треугольника a, b, c заменены через $\operatorname{ctg}\Pi(a)$, $\operatorname{ctg}\Pi(b)$, $\operatorname{ctg}\Pi(c)$.

Как известно, Непером было указано мнемоническое правило, дающее возможность без труда запомнить соотношения между сторонами и углами сферического треугольника. Проф. А. П. Котельников показал, что это правило в несколько измененном виде может служить и для записывания тригонометрических уравнений прямоугольного треугольника в гиперболической плоскости.

[31] В предложении 36 было найдено основное соотношение $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-x}$, устанавливающее функцию $\Pi(x)$. Сообразно этому Лобачевский прежде всего по известной гониометрической формуле выражает $\cos\Pi(c-x)$ через $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-x)$ и получает вторую часть комментируемого равенства. Затем по упомянутой формуле он заменяет $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-x)$ через e^{x-c} и получает третью часть равенства. Теперь он представляет член e^{2x-2c} в виде $e^{2x}\cdot e^{-2c}$, выражает обратно оба множителя через $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)^2$ и $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)^2$ и, таким образом, получает четвертую часть равенства; наконец, выражая тангенсы половинных углов по хорошо известной формуле через косинусы целых углов, он получает последний член равенства. Это имеет двоякое значение. Во-первых, формула

$$\cos\Pi(c-x)=\frac{\cos\Pi(c)-\cos\Pi(x)}{1-\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}$$

устанавливает для функции $\Pi(x)$ теорему сложения. Она остается в силе и для отрицательных значений x, что дает:

$$\cos\Pi(c+x)=\frac{\cos\Pi(c)+\cos\Pi(x)}{1+\cos\Pi(c)\cos\Pi(x)}$$

[см. „Новые начала", ст. 137 (64)].

Во-вторых, выражая здесь $\cos\Pi(x)$ и $\cos\Pi(c-x)$ по формулам [!], Лобачевский получает основные формулы [! !!], связывающие в гиперболическом пространстве стороны и углы любого прямолинейного треугольника. Однако подобно так называемым неперовым аналогиям сферической тригонометрии, каждое из этих уравнений содержит пять элементов треугольника; между тем для решения треугольника их должно быть только четыре. Лобачевский переходит поэтому к установлению уравнений, связывающих четыре элемента треугольника.

[32] Написав предыдущее соотношение в виде

$$1-\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A=\frac{\cos\Pi(c)-\cos A\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(a)\cos B}, \qquad [!]$$

мы транспонируем в нем стороны a и b, а также противолежащие им углы A и B; получим:

$$1-\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos B=\frac{\cos\Pi(c)-\cos B\cos\Pi(a)}{\cos\Pi(b)\cos A}.$$

Перемножая эти равенства, получим

$$[1-\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)\cos B]\,[1-\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A]=$$
$$=\frac{[\cos\Pi(c)-\cos B\cos\Pi(a)]\,[\cos\Pi(c)-\cos A\cos\Pi(b)]}{\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B}.$$

Выполнив в числителе правой части умножение и разделив член, не содержащий $\cos\Pi(c)$, на знаменатель, приведем правую часть к виду:

$$1+\frac{\cos\Pi(c)\,[\cos\Pi(c)-\cos A\cos\Pi(b)-\cos B\cos\Pi(a)]}{\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B}=$$
$$=\sin^2\Pi(c)+\frac{\cos\Pi(c)\cdot R}{\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B},$$

где через R обозначено выражение

$$\cos\Pi(c)\,[1+$$
$$+\cos A\cos B\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)]-\cos\Pi(a)\cos B-\cos\Pi(b)\cos A.$$

Вследствие соотношения [!] R обращается в нуль, и мы получаем уравнение, приведенное в тексте.

[33] Вычисление протекает в следующем порядке:

$$1-\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)=$$
$$=1-\frac{\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(a)\sin C}{\sin A\sin\Pi(b)+\cos A\sin C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)}=$$
$$=\frac{\sin A\sin\Pi(b)}{\sin A\sin\Pi(b)+\cos A\sin C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)}.$$

Вместе с тем уравнение, выражающее $\sin^2\Pi(b)$, после подстановки и сокращения на $\sin\Pi(b)$ примет вид

$$\sin\Pi(b)=\frac{\sin A\,\{1-\cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\}}{\sin A\sin\Pi(b)+\cos A\sin C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)}$$

или же

$$\sin A - \sin A \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) = \sin A \sin \Pi(b)^2 + \\ + \sin \Pi(b) \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b).$$

Заменив теперь разность первых членов обеих частей через $\sin A \cos^2 \Pi(b)$ и разделив обе части на $\sin A \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)$, получим уравнение, приведенное в тексте.

[34] Первое из этих соотношений получаем непосредственно из первого уравнения (8), написав его в виде

$$\operatorname{ctg} \Pi(b) \sin A = \operatorname{ctg} \Pi(a) \sin B$$

и заменяя $\operatorname{ctg} \Pi(b)$ и $\operatorname{ctg} \Pi(a)$ приведенными их приближенными значениями a и b. Второе уравнение (8) после подстановки в него приближенных значений принимает вид

$$bc \cos A + \frac{\left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right)}{1 - \frac{a^2}{2}} = 1.$$

Освобождаясь от знаменателя и отбрасывая члены, порядок которых выше двух, получим второе уравнение, приведенное в тексте.

Третье уравнение (8) после такой же подстановки примет вид

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{Sin} C \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) + \cos C = \frac{b}{a}.$$

Освобождая от знаменателя, отбрасывая члены, порядок которых выше двух, и умножая обе части уравнения на $\sin A$, получим третье уравнение текста. Аналогично получаем и четвертое.

[35] Это соотношение, строго говоря, вытекает уже из последнего уравнения. Чтобы получить его, однако, как указывает Лобачевский, опираясь на предыдущие уравнения, проведем вывод в следующем порядке:

$$\sin(A + B + C) = \sin A \cos(B + C) + \cos A \sin(B + C).$$

Заменяя здесь согласно последней формуле $\cos(B + C)$ через $-\cos A$, получаем

$$\sin(A + B + C) = \cos A \{\sin(B + C) - \sin A\}.$$

Заменяя теперь $\sin(B + C)$ его значением, заимствованным из предпоследнего уравнения той же группы (с заменой A на B), получим

$$\sin(A + B + C) = \frac{\cos A}{b} \{a \sin B - b \sin A\}.$$

Согласно же первому уравнению той же группы выражение, стоящее в скобках в правой части этого равенства, равно нулю. Поэтому $\sin(A + B + C) = 0$; а так как $A + B + C$ больше нуля и не превышает π, то $A + B + C = \pi$.

[36] Очень важное предложение, согласно которому гиперболическая геометрия бесконечно малого совпадает с евклидовой геометрией, нуждается в пояснении. Содержание теоремы в более

точной формулировке выражается следующим образом: если стороны треугольника выражаются настолько малыми числами, что их степенями, выше второй, можно пренебречь, то уравнения, связывающие стороны и углы треугольника, не отличаются от тех, которые имеют место в евклидовой геометрии. Но числа, которыми выражаются длины отрезков, зависят от принятой единицы меры. Эта единица меры, однако, не произвольна: она зафиксирована тем требованием, чтобы в уравнении $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^x$ число e представляло собой основание неперовых логарифмов (см. предложение 36 и примечание [29] на стр. 107); это имеет место при строго определенном размере отрезка. Как уже было указано выше, этот отрезок часто называют теперь *радиусом кривизны гиперболического пространства*. Итак, гиперболическая геометрия совпадает с евклидовой на протяжении, весьма малом по сравнению с радиусом кривизны пространства. С этим и связываются соображения, относящиеся к устройству вселенной. Уже Лобачевский в очень осторожной форме высказывал предположение, что в нашем пространстве в действительности, может быть, имеет место гиперболическая геометрия, но что размеры той части вселенной, в которой мы производим наши измерения, настолько малы по сравнению с радиусом кривизны пространства, что отклонения наблюдаемых нами метрических соотношений от евклидовых весьма ничтожны, и мы этих отклонений вовсе не замечаем: они падают за пределы точности наших измерений [см. „О началах геометрии“, выводы из формул (17)]. Вычисления суммы углов в некотором космическом треугольнике (см. там же) не дали оснований к подтверждению такого предположения. В настоящее время выяснилось, что размеры вселенной неизмеримо больше, чем это себе представляли в эпоху, когда жил Лобачевский. Протяжения, доступные точному измерению, действительно совершенно ничтожны по сравнению с размерами вселенной. В связи с этим, а также с некоторыми течениями в физике и космологии в последнее время чаще высказываются предположения, что действительная геометрия космоса не евклидова (Эйнштейн, Эддингтон). При этом есть основание предполагать, что эта геометрия эллиптическая (риманова), а не гиперболическая. Нужно, однако, сказать, что на эти соображения можно смотреть только как на весьма проблематические предположения, требующие еще тщательной проверки.

[37] Лобачевский имеет в виду сочинения: „О началах геометрии“, напечатанное, правда, не в „Ученых записках“, а в „Казанском Вестнике“ (1829—1830), „Воображаемая геометрия“, напечатанное в „Ученых записках Казанского университета“ за 1835 г., „Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам“, напечатанное в „Ученых записках“ за 1836 г.

[38] Функция $\Pi(x)$ определена Лобачевским геометрически, а затем установлено ее аналитическое выражение, содержащееся

в заключительной формуле предложения 36; в сноске на стр. 76 это же соотношение приведено в других видах.

Если функции, этими формулами определяемые, распространить и на мнимые значения аргумента a, то получим

$$\operatorname{ctg} \Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} = i \sin x,$$

$$\sin \Pi(xi) = \frac{2}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos \Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = i \operatorname{tg} x.$$

Эти именно формулы Лобачевский и приводит в тексте. Если в уравнения (8) вместо a, b, c подставить ai, bi, ci и выразить тригонометрические функции от $\Pi(ai)$, $\Pi(bi)$, $\Pi(ci)$ по приведенным выше формулам, то получим заключительные уравнения текста. Это суть соотношения между сторонами и углами сферического треугольника. Можно сказать, что и обратно формулы сферической тригонометрии переходят в уравнения гиперболической тригонометрии, если заменить стороны треугольника a, b, c через $\frac{a}{i}$, $\frac{b}{i}$, $\frac{c}{i}$. С другой стороны, в сферической тригонометрии под a, b, c разумеют угловые значения сторон; если под a, b, c разуметь длины этих сторон, то угловые их значения будут $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, где R — радиус сферы. Уравнения сферической тригонометрии, содержащие эти формулы, переходят в гиперболические, если заменим $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ через $\frac{a}{Ri}$, $\frac{b}{Ri}$, $\frac{c}{Ri}$, т. е. если заменить R через Ri. Можно сказать, что уравнения гиперболической тригонометрии имеют место на мнимой сфере. В этом именно смысле слова Ламберта: „гипотеза острого угла должна иметь место на какой-либо мнимой сфере“, высказанные им еще в 1766 г., действительно имеют характер замечательного предвидения.

Сфера радиуса R имеет кривизну $\frac{1}{R^2}$. С другой стороны, формулы гиперболической тригонометрии получаются, если в формулах сферической тригонометрии заменить R через ki; в этом смысле на гиперболическую плоскость можно формально смотреть как на сферу с кривизной $K = -\frac{1}{k^2}$; это и служило основанием для присвоения гиперболическому пространству кривизны $-\frac{1}{k^2}$. Более глубокое обоснование этот термин получает в римановой геометрии в широком смысле этого слова (см., например, В. Каган, Геометрические идеи Римана и их современное развитие. М. — Л., 1933, стр. 14).

ПРИЛОЖЕНИЯ

ВВОДНЫЕ УКАЗАНИЯ

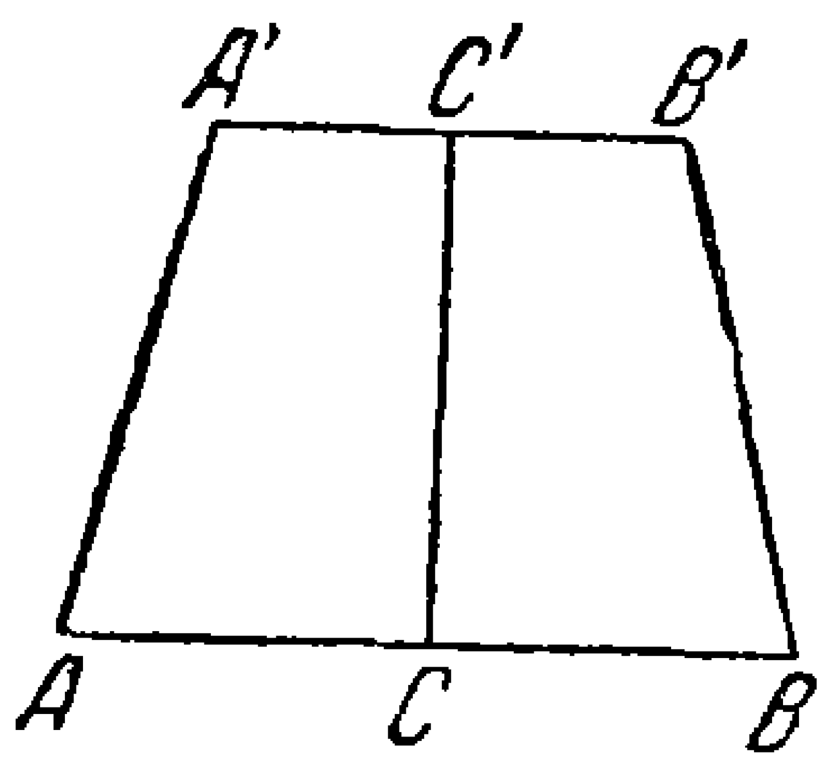
В „Геометрических исследованиях“ Лобачевский изложил тот материал, который абсолютно необходим для того, чтобы составить себе представление о созданной им неевклидовой геометрии. Между тем ряд предложений, существенно важных, в этом сочинении не нашел себе места главным образом потому, что Лобачевский, очевидно, не хотел увеличивать размеры этой небольшой брошюры. Помещаемые здесь приложения имеют двоякую цель. Во-первых, они дополняют материал, содержащийся в „Геометрических исследованиях“, небольшим числом предложений, не только очень полезных, но, мы сказали бы, необходимых для уяснения структуры гиперболического пространства. Во-вторых, сто лет, прошедшие со времени опубликования „Геометрических исследований“, принесли с собой, конечно, разработку самых методов Лобачевского, упрощающую его рассуждения. Мы прилагаем здесь более поздние выводы основных соотношений, имеющих место в гиперболическом пространстве.

Мы отметили в примечании [[29]] к „Геометрическим исследованиям“ дефект, проскользнувший в „Геометрические исследования“ и исправленный Лобачевским позже в „Пангеометрии“. Необходимо показать, как это исправление осуществляется.

Конечно, наиболее существенным в построении Лобачевского является вывод тригонометрических уравнений. Мы даем два других вывода, один из которых принадлежит автору настоящей статьи; он значительно проще того, который помещен в „Геометрических исследованиях“, но построен на том же принципе — на использовании орисферы как поверхности, несущей на себе евклидову геометрию. Второй вывод принципиально отличается от того, который дает Лобачевский: это вывод чисто планиметрический; в предельной поверхности он вовсе не нуждается. Этот вывод принадлежит Либману и Гильберту.

I. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Исходные предложения. Как сказано выше, „Геометрические исследования“ содержат лишь весьма скудный материал, минимум, дающий некоторое представление о том, что такое новая „воображаемая“ геометрия, гиперболическая геометрия, как ее называют в настоящее время. Так во II части (предл. 16—18) установлено, что в гиперболической плоскости две прямые могут быть либо сходящимися, либо параллельными, либо расходящимися. В IV и V частях это уточняется: в предложении 24 устанавливается, что две параллельные линии сближаются в сторону параллелизма и удаляются одна от другой в противоположную сторону. Как идет это сближение в одну сторону и расхождение в другую сторону, не выяснено (см. прим. [[13]]); совершенно не затронут вопрос о том, какое взаимное расположение имеют две сходящиеся или расходящиеся прямые. Читатель мог бы, правда, найти это в другом сочинении Лобачевского — „Новые начала геометрии“, опубликованном раньше. Но сочинение это очень обширное, чтение его представляет затруднения.[1] Разъяснению этого вопроса посвящено приложение I. Чтобы читателю было легче следить, напомним простые предложения, установленные в тексте „Г. И.“ и в примечаниях к ним.



Черт. 1.

Четырехугольник $AA'B'B$ называется *равнобочным* (черт. 1), если в нем углы при основании равны и прилегающие боковые стороны также равны, т. е. если $\angle A'AB = \angle B'BA$, $AA' = BB'$. Мы уже встречались с таким четырехугольником („Г. И.“, прим. [[21]], лемма 1). При этом было доказано, что так называемая средняя линия CC', т. е. прямая, соединяющая середины верхнего и нижнего оснований, перпендикулярна к обоим основаниям и делит четырехугольник на два равных четырехугольника $AA'C'C$ и $BB'C'C$, каждый из которых имеет три прямых угла. Такой четырехугольник называют *трипрямоугольником* или *четырехугольником Ламберта*, по имени геометра, который первый занимался такими четырехугольниками[2] при своих попытках доказать постулат о параллельных линиях. Четвертый угол в четырехугольнике Ламберта всегда острый. Равнобочный четырехугольник, в котором углы при одном (так называемом „нижнем“) основании прямые, называется четырехугольником Саккери („Г. И.“, прим. [[13]]). В таком четырехугольнике углы при верхнем основании также равны, а потому оба острые. В четырехугольнике Ламберта каждая из сторон, содержащих острый угол, больше противоположной стороны. Стороны четырехугольника Ламберта, к которым прилегают два прямых угла, обыкновенно называют *основаниями*, а две другие стороны, образующие острый угол, *высотами*. Предыдущее предложение можно поэтому формулировать так:

---

[1] Сочинение это было выпущено отдельным изданием в Харькове профессором Д. М. Синцовым. Н. И. Лобачевский. Новые начала геометрии с полной теорией параллелей (Харьков, 1912). Оно будет помещено в ПСС во 2-м томе.

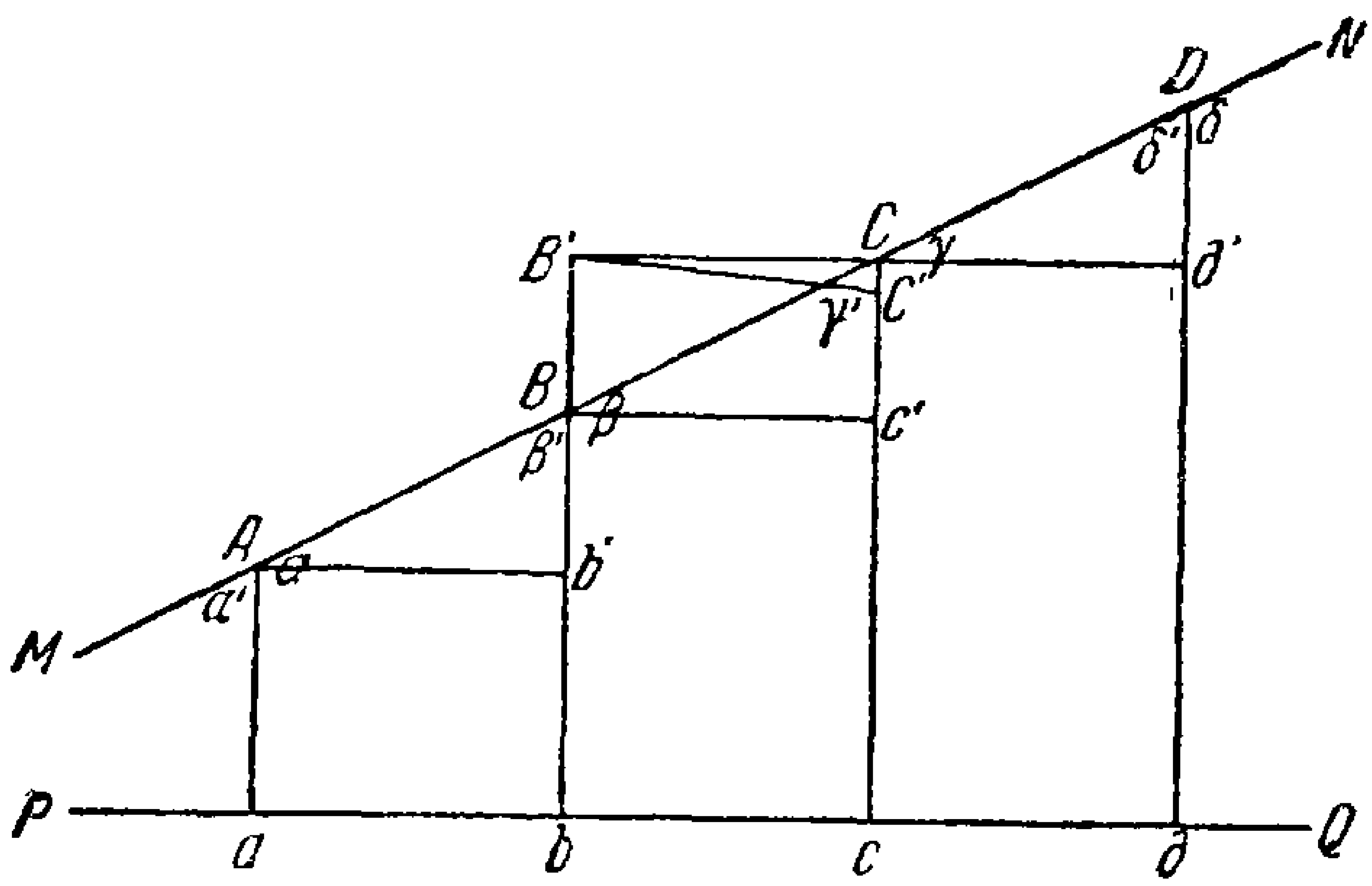
[2] J. H. Lambert (1728—1777). Сочинение, в котором рассматриваются четырехугольники этого типа, называется „Theorie der Parallellinien“ (Leipziger Archiv, 1786).

в четырехугольнике Ламберта каждая высота больше противолежащего основания. В связи с этим в четырехугольнике Саккери верхнее основание больше нижнего.

2. *Основная лемма.* Учение о расположении прямых на гиперболической плоскости основано Лобачевским на следующей лемме („Новые начала", ст. 106):

Лемма. *Если на одной из двух прямых, лежащих в одной плоскости, нанесем ряд точек, удаленных одна от другой на одно и то же расстояние, и спроектируем их на другую прямую, то проектирующие перпендикуляры в сторону тупых углов возрастают и притом быстрее, нежели в арифметической прогрессии.*

На прямой MN (черт. 2) наносим ряд точек $A, B, C, D, \ldots$, отстоящих одна от другой на равных расстояниях $AB = BC =$



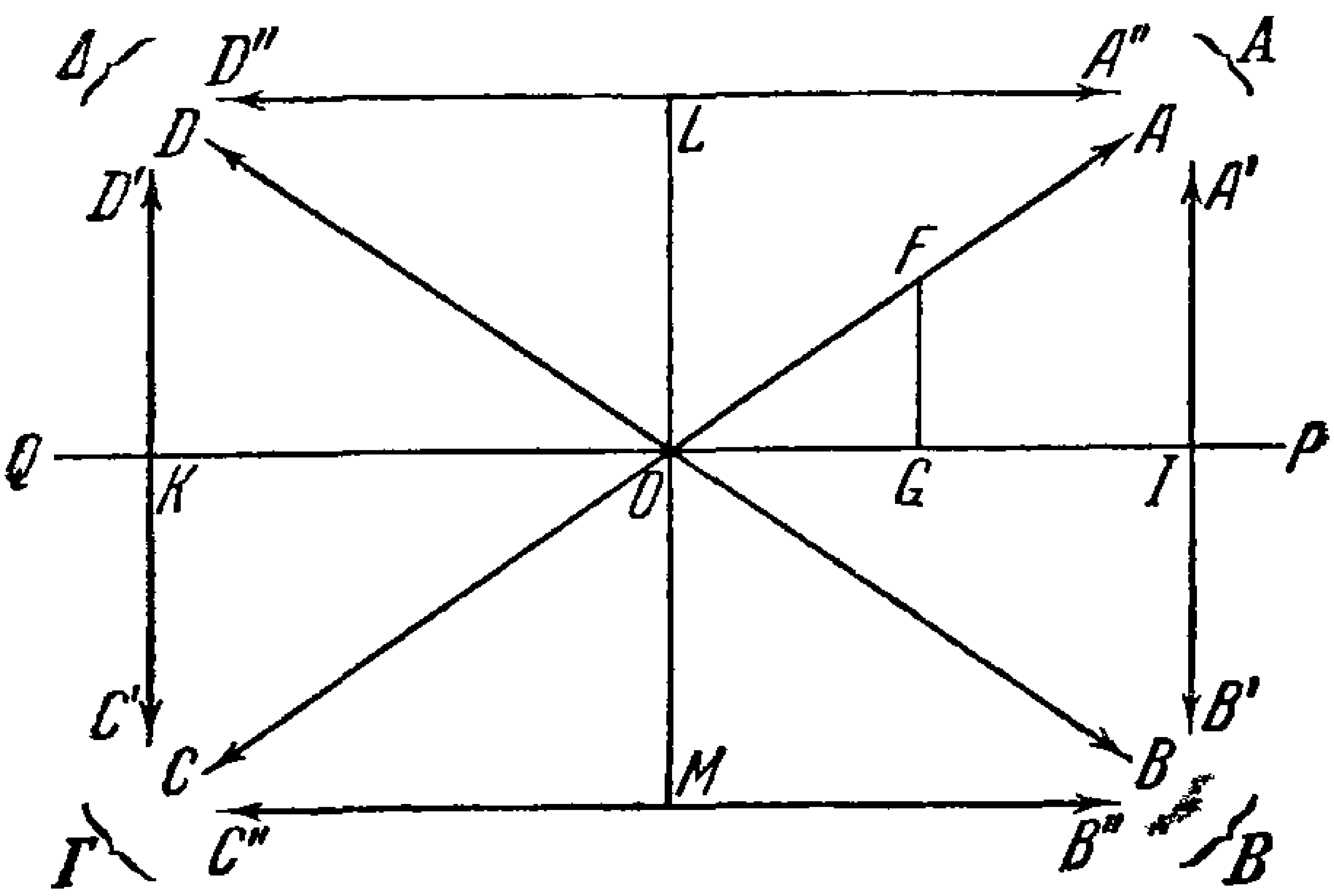
Черт. 2.

$= CD \ldots$, и проектируем их на прямую PQ; пусть $a, b, c, d \ldots$ будут проекции этих точек; пусть α', α; β', β; γ', γ; $\delta', \delta \ldots$ будут углы, которые прямая MN в этих точках образует с проектирующими перпендикулярами. Не трудно видеть, что углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ возрастают, а углы $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$ убывают. В самом деле, в четырехугольнике $AabB$ сумма углов $\alpha + \beta' < 2d$; между тем $\beta + \beta' = 2d$; следовательно $\beta > \alpha$; таким же образом $\alpha + \alpha' = 2d$ и потому $\beta' < \alpha'$.

Если перпендикуляр Aa образует с прямой MN острый угол α' и тупой α, то возрастающие углы $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ будут все тупые. Теорема утверждает, что в сторону этих тупых углов перпендикуляры $Aa, Bb, Cc, Dd \ldots$ возрастают и притом быстрее, нежели в арифметической прогрессии. Чтобы это обнаружить, откладываем на перпендикуляре Bb отрезок $bb' = aA$. Так как $aAb'b$ будет четырехугольником Саккери, то в нем углы при верхнем основании острые. Следовательно, прямая Ab' пройдет внутри тупого угла aAB, а потому точка b' ляжет между b и B, т. е. $Bb > Aa$. Таким же образом $Cc > Bb$, $Dd > Cc$ и т. д.

Теперь продолжаем перпендикуляр Bb на расстояние $BB' = Bb'$, а на перпендикуляре cC откладываем отрезки $cc' = bB$ и $cC' = bB'$. Так как угол $Ab'b$ острый, то угол $Ab'B$ тупой. Треугольник BCB' равен треугольнику ABb'; поэтому и угол $BB'C$ тупой. В четырехугольнике Саккери $B'bcC'$ угол $bB'C'$ острый; поэтому прямая $B'C'$ проходит внутри угла $BB'C$ и $cC' < cC$. А так как $bB' = cC'$, $bB = cc'$, то $c'C > BB' = b'B$, что и требовалось доказать.

Отсюда прежде всего ясно следующее: *если прямая MN* (черт. 2) *в точке A образует тупой угол aAN с перпендикуляром Aa, опущенным на прямую PQ, то ее точки в сторону тупого угла, т. е. в сторону AN, неограниченно удаляются от PQ.*



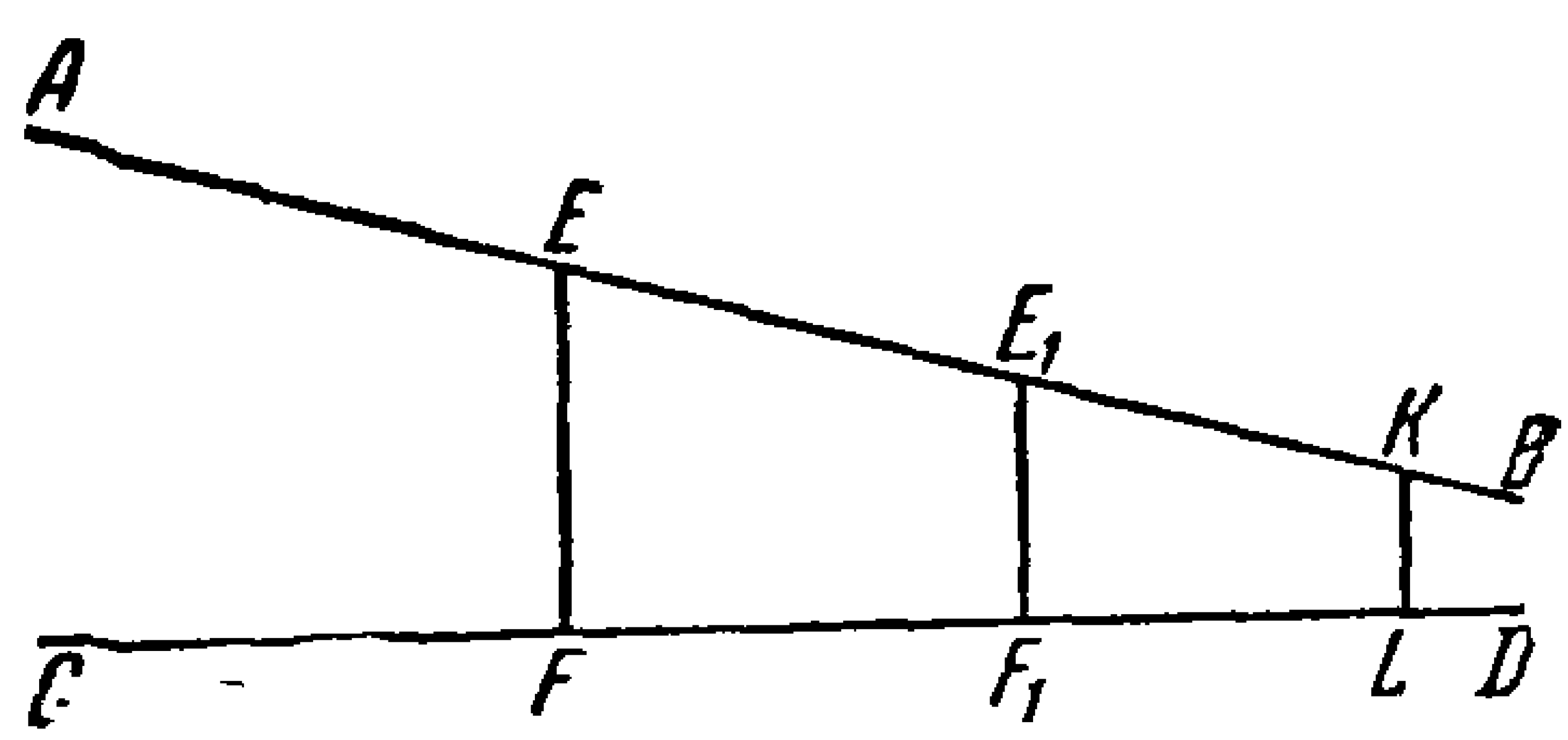
Черт. 3.

На этом основано все учение о взаимном расположении двух прямых на гиперболической плоскости.

3. Взаимное расположение двух пересекающихся прямых. Положим, что прямые OA и OP, пересекаясь в точке O, образуют острый угол AOP (черт. 3). Если из какой-либо точки F прямой OA опустим на OP перпендикуляр FG, то он упадет со стороны острого угла AOP, и угол AFG будет тупым. Поэтому точки стороны OA по мере удаления от вершины неограниченно удаляются от другой стороны угла OP. Дело в этом отношении как будто обстоит так же, как в евклидовой плоскости. Однако здесь есть существенная разница. На стороне OP отложим отрезок OI параллельности, соответствующий углу AOP („Г. И.“, предложение 23); из точки I восставим к стороне OP перпендикуляр IA'. Он будет параллелен стороне угла OA. Прямая OA, таким образом, не проникнет за пределы прямой IA'. Сторона нашего угла подымается не над всей стороной OP (как это имеет место в евклидовой плоскости), а только над отрезком OI. Если через A обозначим общую бесконечно удаленную точку лучей OA и IA', то получается своеобразный треугольник IOA, одна из вершин которого лежит в бесконечности.

Если по другую сторону прямой OP построим $\angle POB = \angle POA$ и продолжим луч IA' в другую сторону (IB'), то обе стороны угла AOB будут оставаться по одну сторону „заградительной" прямой $A'IB'$. Если через B обозначим общую бесконечно удаленную точку лучей OB и IB', то образуется треугольник $A\ OB$ с двумя бесконечно удаленными вершинами A и B.

Если возьмем угол COD, вертикальный относительно AOB, на продолжении луча OI отложим отрезок $OK = OI$ и, наконец, через K проведем прямую $C'KD'$, симметричную $B'IA'$, то она будет заградительной для лучей OC и OD. Две прямые AOC и BOD располагаются целиком внутри полосы, содержащейся между прямыми $A'IB'$ и $D'KC'$. Если через Γ обозначим общую бесконечно удаленную точку лучей OC и KC', а через Δ — общую бесконечно удаленную точку лучей OD и KD', то получим треугольник $\Gamma O \Delta$, также имеющий две бесконечно удаленные вершины.



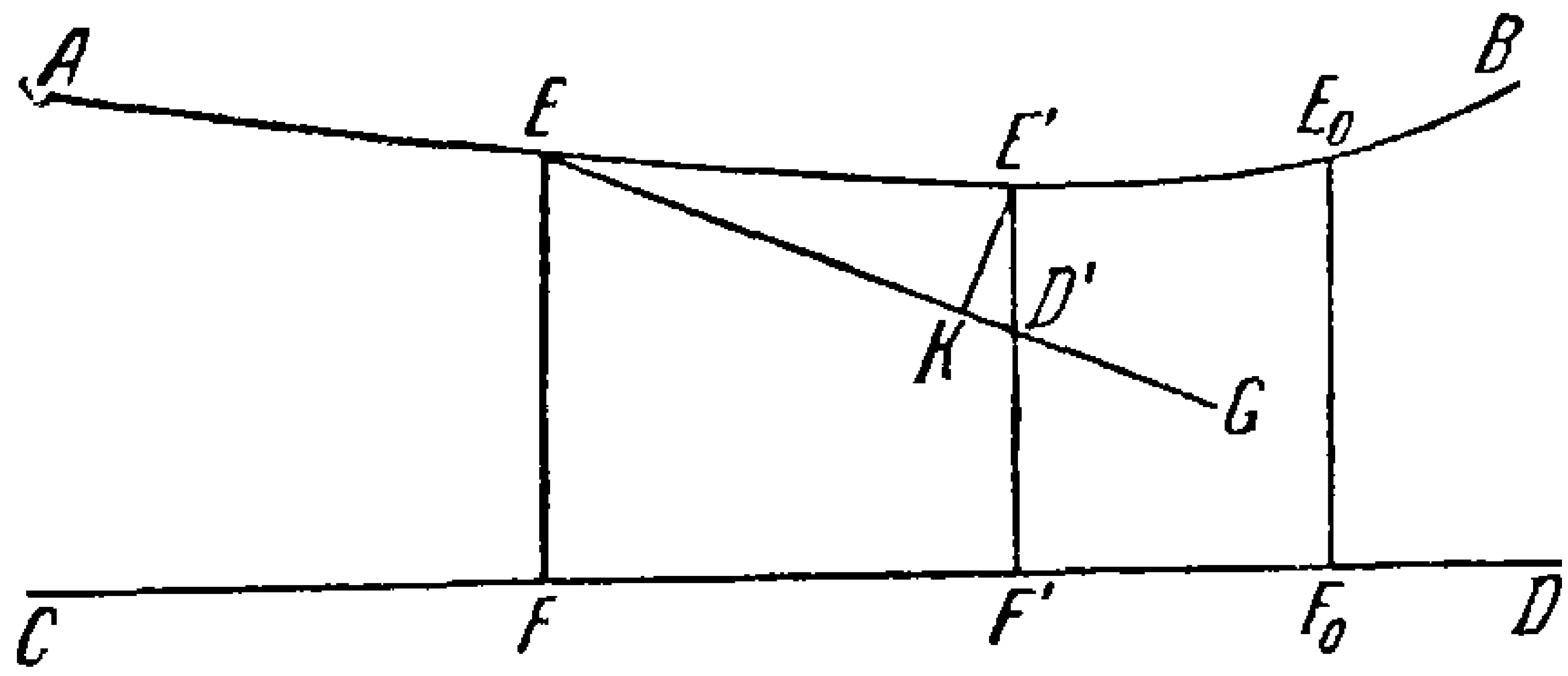
Черт. 4.

Наконец, пусть LOM будет общей биссектрисой вертикальных углов AOD и BOC. Если на ней отложим $OL = OM$ — отрезки параллельности углов $AOL = DOL$ и $BOM = COM$ и через точки L и M проведем перпендикуляры $A''LD''$ и $B''MC''$ к прямой LOM, то они будут параллельны прямым CA и BD; именно, учитывая сторону параллелизма, будем иметь $LA'' \parallel OA$, $LD'' \parallel OD$, $MB'' \parallel OB$, $MC'' \parallel OC$. Образуется четырехугольник $AB\Gamma\Delta$, все вершины которого лежат в бесконечности. Такой четырехугольник называют *четырехугольником Швейкарта* по имени математика, который первый к нему пришел.[1] Прямые AC и BD, образующие две пары вертикальных углов, умещаются внутри этого четырехугольника целиком.

4. *Взаимное расположение двух параллельных прямых.* Положим, что прямая $\overrightarrow{AB}$ (черт. 4) параллельна прямой $\overrightarrow{CD}$ (стрелки указывают сторону параллелизма). Если из какой-либо точки E первой прямой опустим перпендикуляр EF на вторую, то угол FEB будет острый, FEA — тупой. Согласно предложению, установленному в рубр. 2, точки прямой AB в сторону A будут неограниченно удаляться от CD. Если возьмем на AB точку E_1 в сторону параллелизма от E, то угол F_1E_1B будет оставаться острым и потому $EF > E_1F_1$; это значит, в сторону параллелизма точки прямой AB приближаются к CD. Это уже доказано в „Г. И." (предл. 24; см. также прим. [[13]]). Но теперь

[1] F. Schweikart (1780—1859). См. Gauss Werke, Bd. VIII, стр. 180.

показано, что в сторону, противоположную параллелизму, AB удаляется от CD неограниченно; остается еще обнаружить, что в сторону параллелизма она *неограниченно* к ней приближается. С этой целью на произвольной прямой $C'D'$ возьмем произвольную точку L', на перпендикуляре к ней из этой точки отложим произвольно заданный отрезок $L'K'=\varepsilon$. Через точку K' проведем прямую $A'B'$, параллельную $C'D'$. В сторону $K'A'$ она неограниченно удаляется от $C'D'$. Если $EF>\varepsilon$, то в силу непрерывности на $A'B'$ найдется такая точка E', что ее расстояние $E'F'$ от $C'D'$ будет равно EF. Если теперь полосу $B'E'F'D'$ наложим на полосу $BEFD$ так, чтобы отрезок $E'F'$ совместился с EF, то прямые $F'D'$ и $E'B'$ пойдут по FD и EB; точка K' упадет в некоторую точку K прямой AB, которая будет отстоять от CD на расстояние $KL=K'L'=\varepsilon$. За точкой K будут следовать точки, отстоящие от CD на расстояния, меньшие ε.



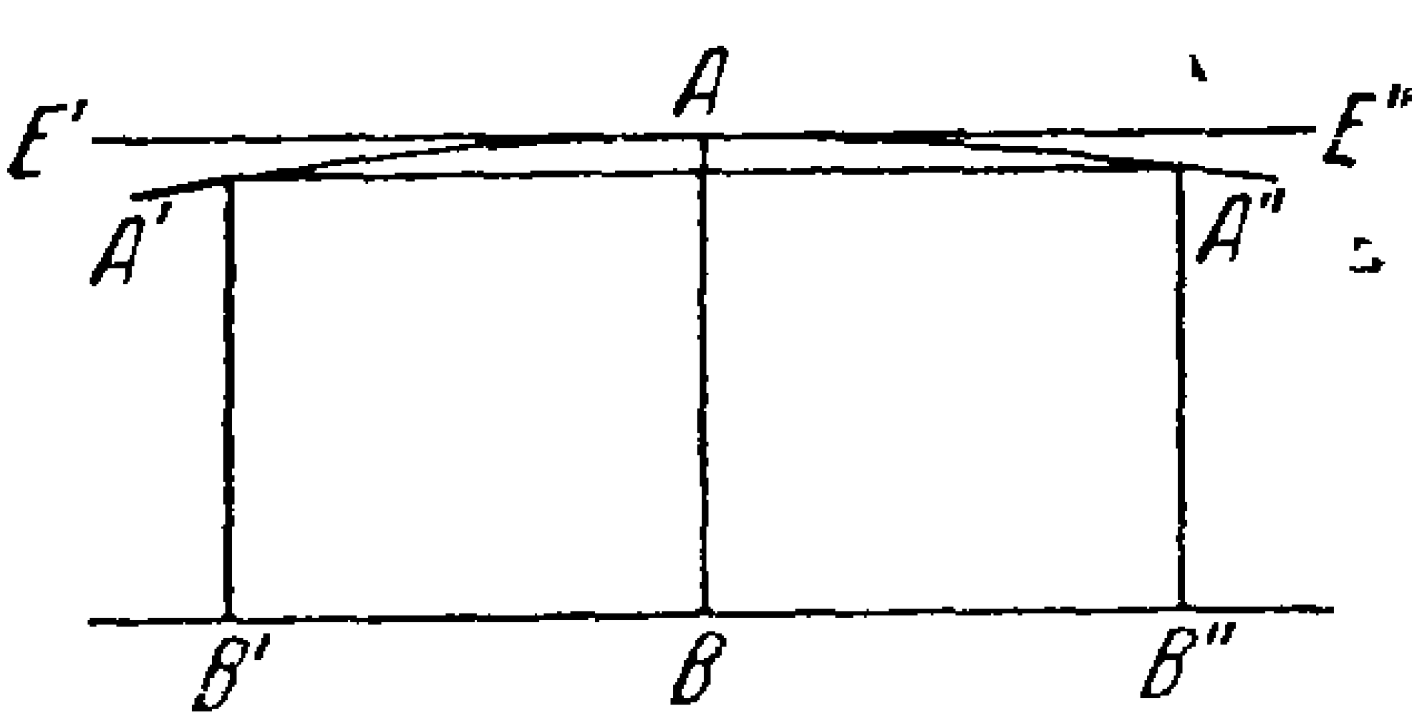
Черт. 5.

5. Взаимное расположение двух расходящихся прямых. Положим теперь, что прямая AB расходится с CD. Покажем, что в этом случае существует общий перпендикуляр к обеим прямым, от которого они неограниченно расходятся в обе стороны. С этой целью из произвольной точки E прямой AB опускаем на CD перпендикуляр EF (черт. 5). Если бы он оказался перпендикулярным к AB, то он был бы общим перпендикуляром. Предположим поэтому, что он образует с AB острый угол BEF и тупой угол AEF. В таком случае в сторону EA прямая AB удаляется от CD и притом неограниченно, в сторону же EB она приближается к CD до тех пор, пока угол FEB остается острым. И так как этот угол постоянно возрастает, то нужно выяснить, остается ли он острым или становится прямым, после чего делается тупым. С этой целью проведем из E луч EG, параллельный FD; так как прямая AB расходится с CD, то луч EG будет ближе к перпендикуляру, чем EB. Вместе с тем образуется острый угол BEG. Из произвольной точки E' луча EB опускаем перпендикуляры $E'K$ на EG и $E'F$ на CD; последний, переходя с одной стороны прямой EG на другую, пересекает ее в некоторой точке D', причем $E'D'>E'K$, а следовательно, $E'F'>E'K$. Но с удалением точки E' от E ее расстояние $E'K$ от второй стороны угла BEG неограниченно возрастает (рубр. 3); следовательно, неограниченно возрастает и расстояние $E'F'$. Это не могло бы иметь места, если бы угол $BE'F'$ все время оставался острым. Он становится поэтому тупым, и по непрерывности в некоторый момент в точке E_0 становится прямым; E_0F_0 будет общим перпендикуляром к прямым AB и CD. За точкой E_0 угол FEB становится тупым, и расстояние EF неограниченно возрастает. Двух общих перпендикуляров, конечно, быть не может, потому что образовался бы четырехугольник с четырьмя прямыми углами.

Изложенные здесь доказательства проведены в стиле Лобачевского. Настоящая статья уже была в наборе, когда появился сборник статей казанских геометров под названием „Николай Иванович Лобачевский“ (Издательство Академии Наук СССР, М. — Л., 1943). В нем помещена статья П. А. Широкова (ныне покойного) „Краткий очерк основ геометрии Лобачевского“, в котором те же предложения изложены в другом („конструктивном“) стиле значительно проще.

II. КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ И ПОСТОЯННАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

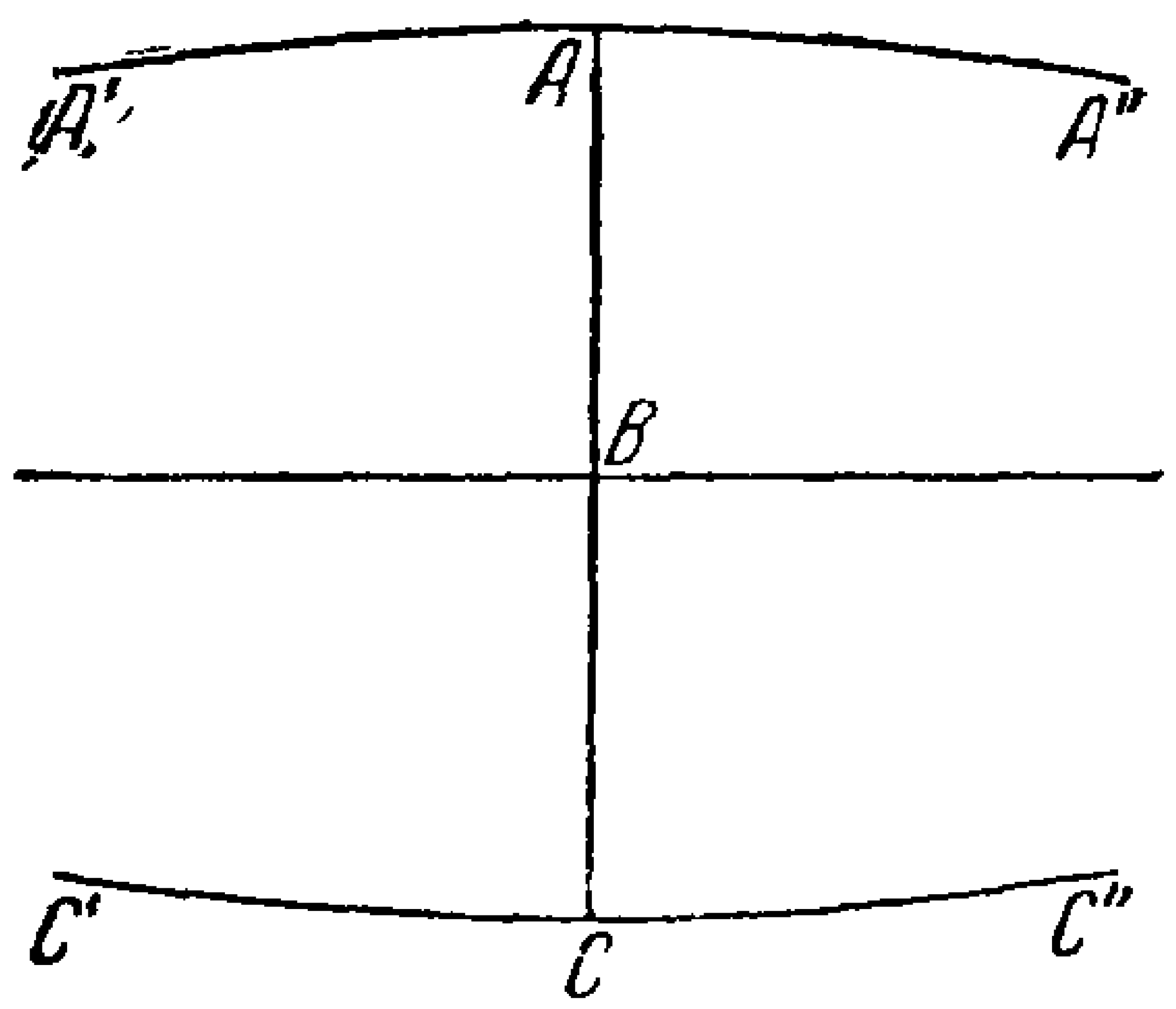
1. Эквидистанты и предельные линии. Плоские кривые постоянной кривизны характеризуются тем, что каждая из них допускает передвижение по себе без деформации. В евклидовой плоскости этим свойством обладают только прямые и окружности. Мы видели („Г. И.“, 31, прим. [18], теор. 2), что в гиперболической плоскости этим свойством обладают также предельные линии. Но в гиперболической плоскости существует еще одна категория кривых, обладающих этим свойством, именно кривые равных расстояний, или *эквидистанты*. Под этим названием разумеют геометрическое место точек на плоскости, отстоящих на одно и то же расстояние от некоторой прямой, лежащей в той же плоскости (так называемой *базисной прямой* этой эквидистанты). Легко видеть, что на гиперболической плоскости три точки A', A, A'' (черт. 6), отстоящие на одном и том же расстоянии от данной прямой $B'BB''$, не могут быть расположены на одной прямой. Действительно, если AB, $A'B'$, $A''B''$ суть перпендикуляры, опущенные из точек A, A', A'' на прямую $B'BB''$, и точка B лежит между B' и B'', то $ABB'A'$ и $ABB''A''$ суть четырехугольники Саккери („Г. И.“, прим. [13]). Углы при верхних основаниях $A'AB$ и $A''AB$ острые, а потому отрезки AA' и AA'' не лежат на одной прямой. Геометрическое место точек, отстоящих от данной прямой на одном и том же расстоянии, образует поэтому кривую линию — *эквиди-*



Черт. 6.

станту. Перпендикуляры AB, $A'B'$, $A''B''$ к базисной прямой называются *осями* эквидистанты. Если в точке A восставим к оси AB перпендикуляр $E'AE''$, то AB будет кратчайшим расстоянием между прямыми $E'AE''$ и $B'BB''$ („Г. И“. прим. [13]); вся эквидистанта расположится под прямой $E'AE''$ и будет обращена к базисной прямой своей вогнутостью. Кривая $A'AA''$, изображенная на чертеже, строго говоря, есть только одна ветка эквидистанты; другая ветка $C'CC''$ расположена по другую сторону базисной прямой (черт. 7).

Совершенно ясно, что эквидистанта также есть кривая постоянной кривизны: когда базисная прямая скользит сама по себе, то и каждая ветка эквидистанты скользит по себе. Различные эквидистанты отличаются одна от другой параметром — расстоянием h ее точек от базисной прямой. Таким образом, в гиперболической плоскости существуют кривые постоянной кривизны четырех типов: окружности, предельные линии, эквидистанты и прямые линии; однако прямые рассматриваются обыкновенно как эквидистанты с параметром $h = 0$. Говорят о трех типах кривых постоянной кривизны. Можно показать, что других кривых постоянной кривизны не существует; это несколько кропотливо, мы здесь этим заниматься не будем. Заметим только, что в связи с тремя типами кривых постоянной кривизны различают и три типа пучков прямых в гиперболической плоскости. Пучок сходящихся прямых (совокупность прямых, проходящих через одну точку) имеет своими ортогональными траекториями окружности; пучок параллельных прямых имеет ортогональными траекториями предельные линии; наконец, пучок расходящихся прямых (т. е. совокупность прямых, перпендикулярных к одной и той же прямой) имеет своими ортогональными траекториями эквидистантные линии. Различные эквидистанты, как и различные окружности, отличаются одна от другой параметром; предельные линии все конгруэнтны.

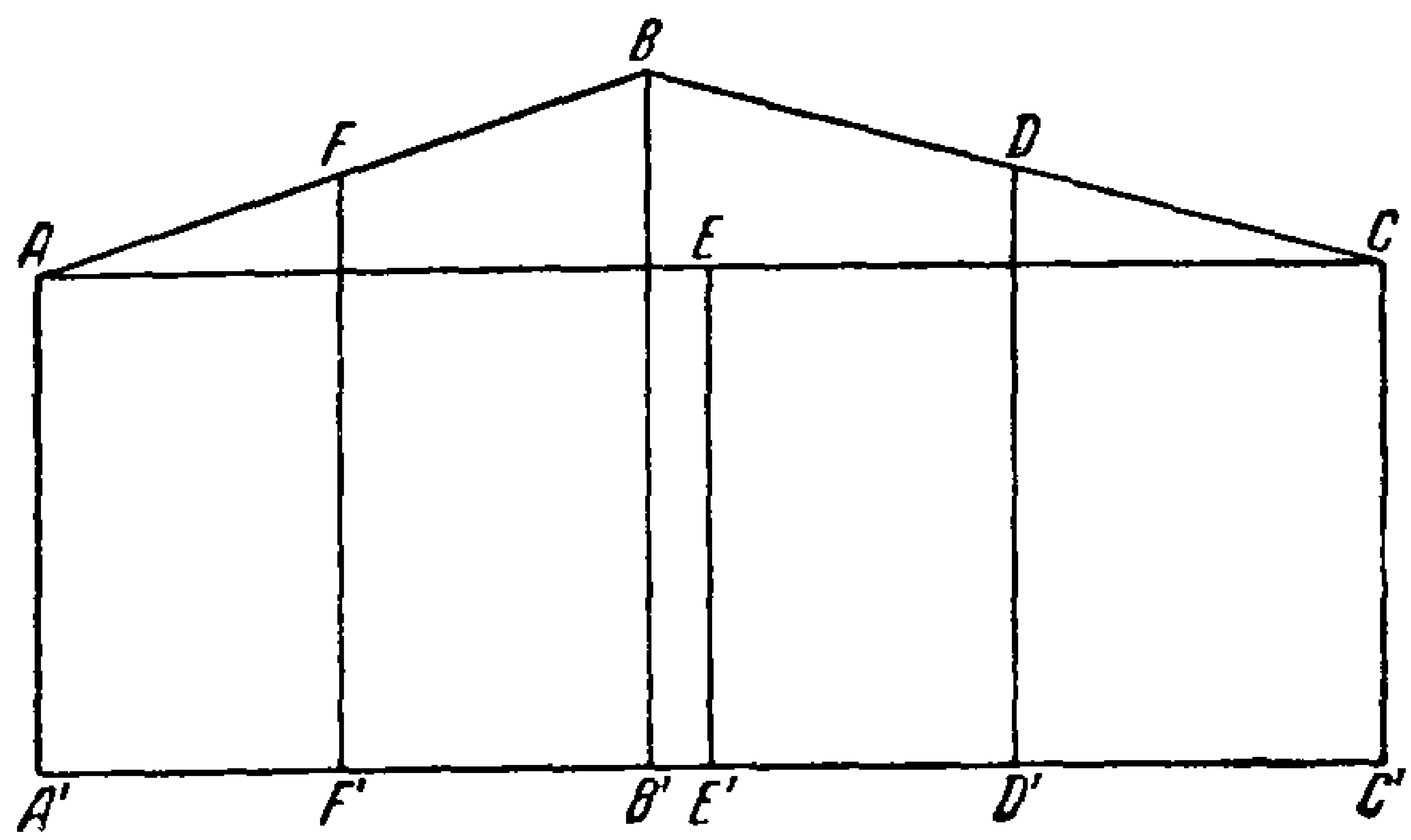


Черт. 7.

2. *Кривая постоянной кривизны, проходящая через три данные точки*. Учение о предельной линии в „Г. И.“ подготовляется предложениями 29 и 30. В этих предложениях и в примечаниях к ним [16] и [17] по существу исследуется вопрос о существовании окружности, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой. В евклидовой геометрии через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда проходит окружность; но этим свойством геометрия Евклида и характеризуется; в геометрии Лобачевского дело обстоит иначе; мы имеем теперь возможность выяснить, что в этом отношении при переходе от евклидовой

геометрии к гиперболической сохраняется (остается инвариантным), что меняется. Это связано с уточнением предложения 29: мы дадим ему теперь следующее выражение.

Теорема 1. В прямолинейном треугольнике перпендикуляры, восставленные из середин трех его сторон, либо встречаются в одной точке, либо параллельны, либо перпендикулярны к одной и той же прямой. Если два серединных перпендикуляра пересекаются, то и третий перпендикуляр проходит через точку их пересечения; это собственно строго доказывается в каждом элементарном учебнике геометрии; это подчеркивается предложением 29 „Геометрических исследований" и еще подробнее примечанием [16] к нему. Три точки лежат в этом случае на одной окружности.



Черт. 8.

Допустим теперь, что перпендикуляры DD' и FF', восставленные из середин D и F сторон треугольника ABC (черт. 8) расходятся. В таком случае существует общий к ним перпендикуляр $D'F'$ (черт. 8). Из вершин треугольника опустим на $D'F'$ перпендикуляры AA', BB' и CC'. Четырехугольники Ламберта $AA'F'F$ и $BB'F'F$ с общим основанием FF' и равными прилежащими боковыми сторонами AF и BF конгруэнтны; вместе с тем $AA' = BB'$. Из таких же соображений следует, что $BB' = CC'$. Отсюда вытекает, что $AA' = CC'$. Поэтому $AA'C'C$ есть четырехугольник Саккери с нижним основанием $A'C'$ и боковыми сторонами AA' и CC'. Если E и E' суть середины верхнего основания AC и нижнего $A'C'$, то EE' есть средняя линия этого четырехугольника; в силу леммы 1 прим. [21] „Г. И." она перпендикулярна к AC и к $A'C'$. Иначе говоря, EE' есть перпендикуляр к стороне AC треугольника в ее середине E, он перпендикулярен к $A'C'$. Вместе с тем прямая $A'B'C'$ перпендикулярна ко всем серединным перпендикулярам треугольника ABC. Так как $AA' = BB' = CC'$, то все три вершины треугольника в этом случае одинаково удалены от этой прямой; три точки A, B, C расположены в этом случае на одной эквидистанте.

Остается рассмотреть тот случай, когда два серединных перпендикуляра параллельны. Из изложенного путем исключения выводим, что в этом случае третий перпендикуляр параллелен первым двум. Три точки лежат в этом случае на одной предельной линии.

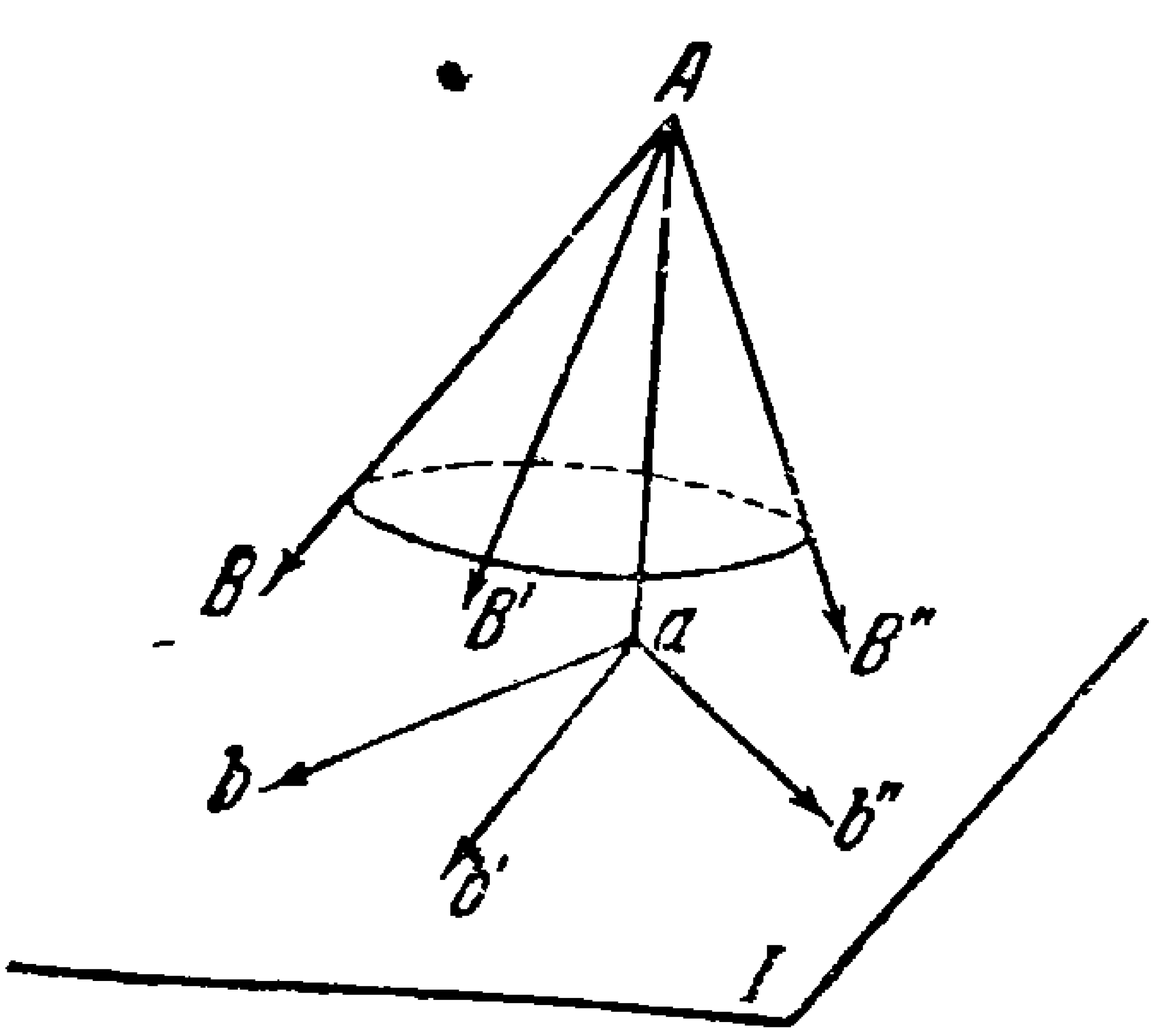
Так как все возможные случаи исчерпаны, то отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Всякие три точки на плоскости лежат на кривой постоянной кривизны. Предыдущее рассуждение как будто обязывало бы сказать, что это имеет место на гиперболической плоскости. Но ведь то же самое имеет место и на евклидовой плоскости, так как в ней три точки лежат либо на одной прямой, либо на одной окружности; других же кривых постоянной кривизны в евклидовой плоскости не существует. Таким образом формулированное предложение представляет собой теорему абсолютной геометрии.

На этом примере хорошо выясняется понятие абсолютной геометрии в более общем смысле, чем мы его понимали вначале. Упоминая о предложениях абсолютной геометрии, разумеют обыкновенно те теоремы, которые не зависят от постулата о параллельных линиях; при этом термины, входящие в эти предложения, также сохраняют те значения, которые они имеют у Евклида. Иначе обстоит дело здесь: кривые постоянной кривизны в гиперболической плоскости отличаются от тех, которые существуют в евклидовой плоскости. Между тем здесь, как и там, через каждые три точки проходит одна и только одна кривая постоянной кривизны.

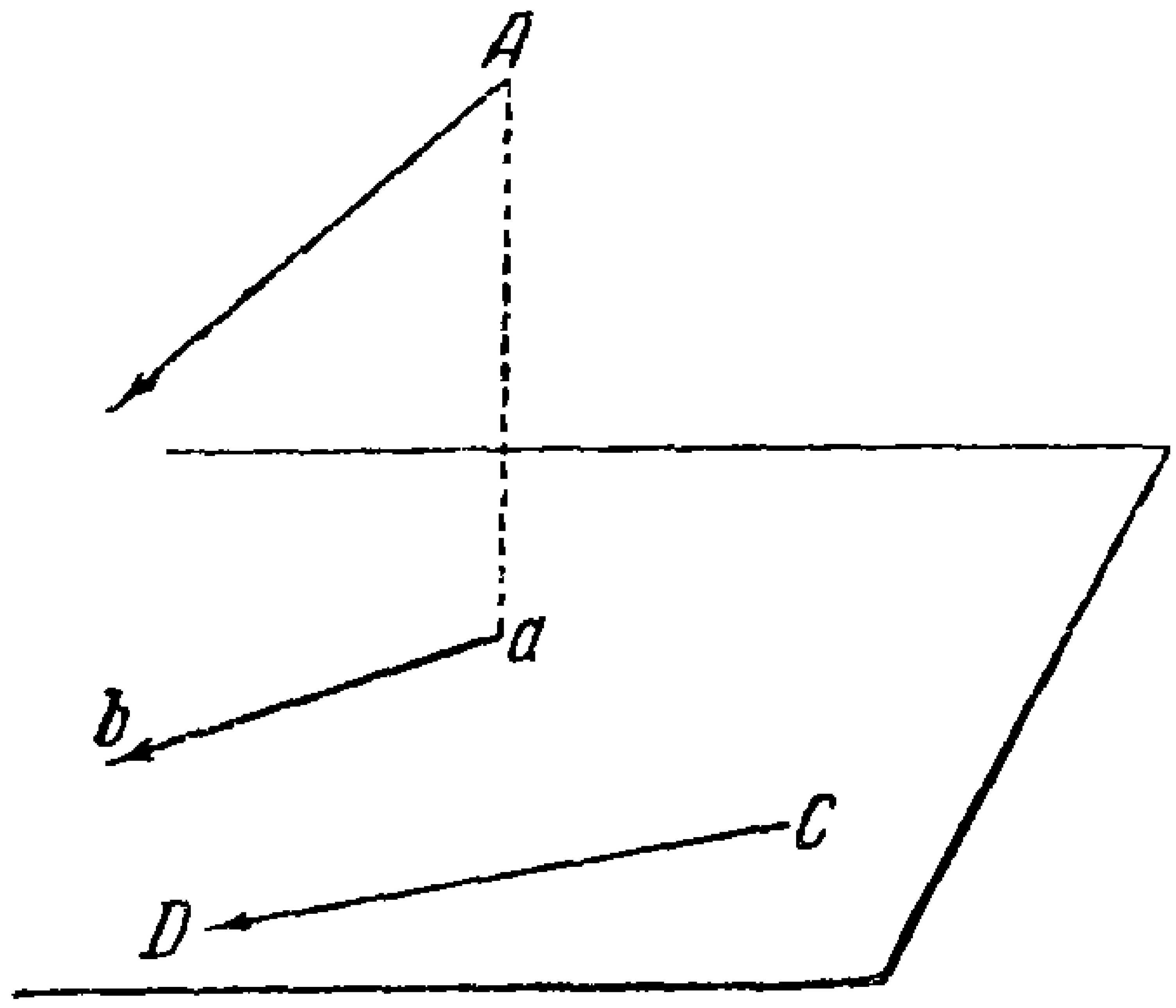
III. РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Конус параллелей. Пусть AB будет прямая, лежащая вне плоскости I (черт. 9). Пусть ab будет ее проекция на эту плоскость. Если прямая AB параллельна своей проекции ab на плоскость, то говорят, что *она параллельна самой плоскости.* Само собой разумеется, что она параллельна плоскости в ту сторону, в которую она параллельна своей проекции.

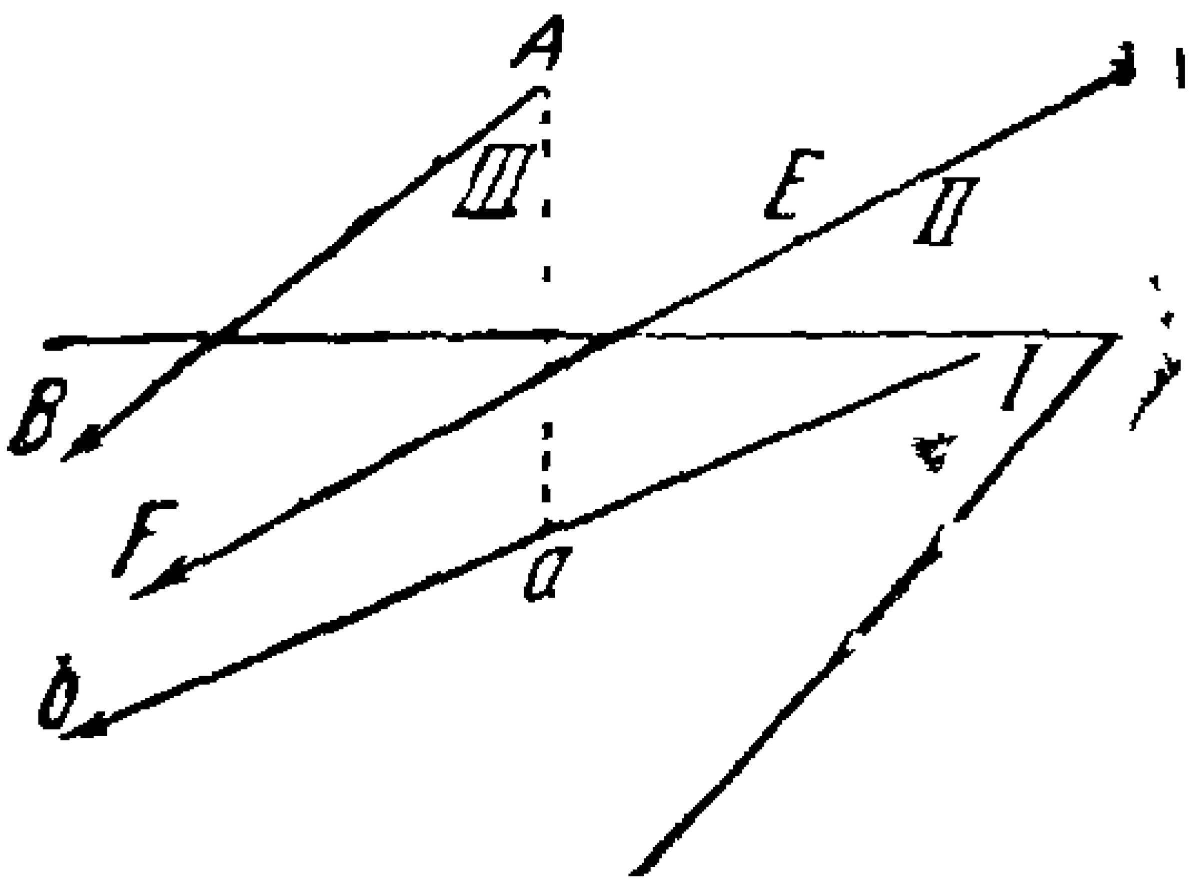


Черт. 9.

Теорема 1. Если прямая параллельна прямой на плоскости, то она параллельна самой плоскости. В самом деле, положим, что прямая AB параллельна прямой CD, лежащей на плоскости *I* (черт. 10). В таком случае они лежат в одной плоскости, которую будем называть плоскостью *II*. Пусть *ab* будет проекция прямой *AB* на плоскость *I*, проектирующую плоскость обозначим *III*. Три плоскости *I*, *II*, *III* пересекаются по прямым *AB*, *CD* и *ab*, из которых первые две параллельны. Согласно заключительному выводу предложения 25 „Г. И.", все три прямые попарно параллельны. Следовательно, прямая *AB* параллельна своей проекции *ab* на плоскость *I*, т. е. параллельна самой плоскости.



Черт. 10.



Черт. 11.

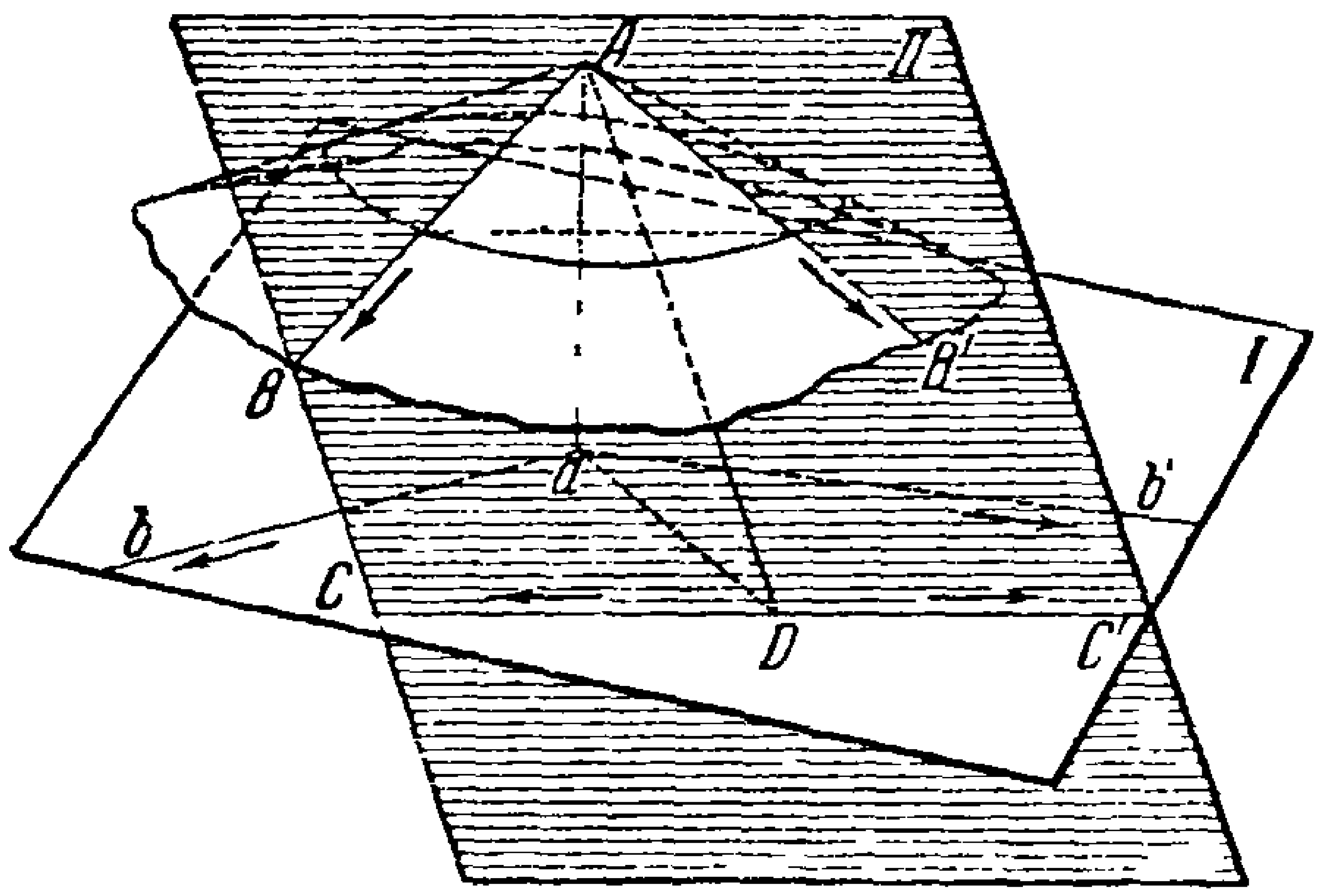
Т е о р е м а 2. *Если прямая AB параллельна плоскости I, то всякая прямая EF, параллельная AB, также параллельна плоскости I.*

Попрежнему обозначим проектирующую плоскость (*AB*, *ab*) через *III* (черт. 11); по условию, прямая *AB* параллельна своей проекции *ab*. Через проекцию *a* какой-либо точки *A* прямой *AB* и прямую *EF* проведем плоскость *II*; она пересечет плоскость *I*, по прямой, которая в силу той же теоремы 25 параллельна *AB*, а потому совпадает с *ab*. По той же причине прямая *EF* параллельна также прямой *ab*; в силу теоремы 1, отсюда следует, что она параллельна плоскости *I*.

Положим теперь, что прямая *AB* вращается вокруг проектирующего перпендикуляра *Aa*. Она опишет при этом круглую коническую поверхность (черт. 10), все образующие которой параллельны плоскости *I*. Эта поверхность называется конусом параллелей плоскости *I* в точке *A*. Всякая прямая, проходящая внутри этого конуса, пересекает плоскость *I*. Всякая плоскость, проходящая через точку *A*, либо пересекает конус параллелей по двум образующим, либо касается по образующей, либо встречает его только в точке *A*.

Т е о р е м а 3. *Если плоскость II, проходя через точку A, пересекает конус параллелей (черт. 12) по двум образующим AB и AB', то она пересекает плоскость I по прямой CC', которая в одну сторону параллельна одной из этих образующих, а в другую параллельна второй из них (C'C || AB, CC' || AB').*

В самом деле, всякая прямая, проходящая в плоскости II внутри угла BAB', лежит внутри конуса и потому пересекает плоскость I. Отсюда следует, что плоскость II пересекает плос-



Черт. 12.

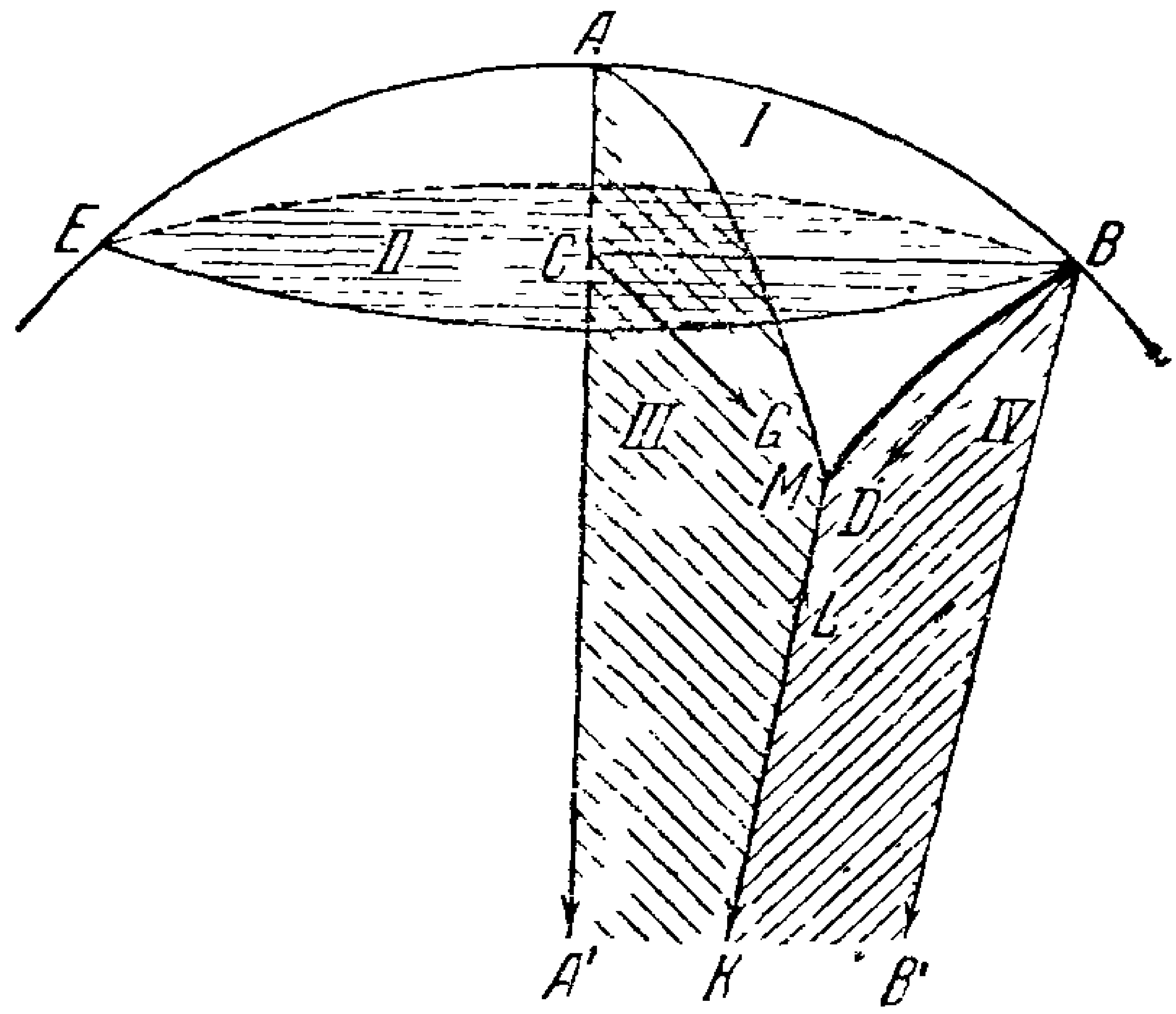
кость I по некоторой прямой CC'. Если ab есть проекция образующей AB на плоскость I, и через III попрежнему обозначим проектирующую плоскость (AB, ab), то три плоскости I, II, III пересекаются по прямым AB, ab и $C'C$, и так как первые две параллельны, то и третья им параллельна в ту же сторону, т. е. $C'C \parallel AB$ и $C'C \parallel ab$. В силу таких же соображений $CC' \parallel AB'$ и $CC' \parallel ab'$. Так как AB и AB' суть две параллели к прямой CC' в плоскости II, то перпендикуляр AD из точки A на прямую CC' делит угол BAB' пополам: $\angle BAD = \angle B'AD = \Pi(AD)$. По так называемой теореме о трех перпендикулярах прямая aD также перпендикулярна к CC'; она делит пополам угол bab'. Доказанной теореме можно дать еще такое выражение.

Теорема 3а. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости пересекаются.

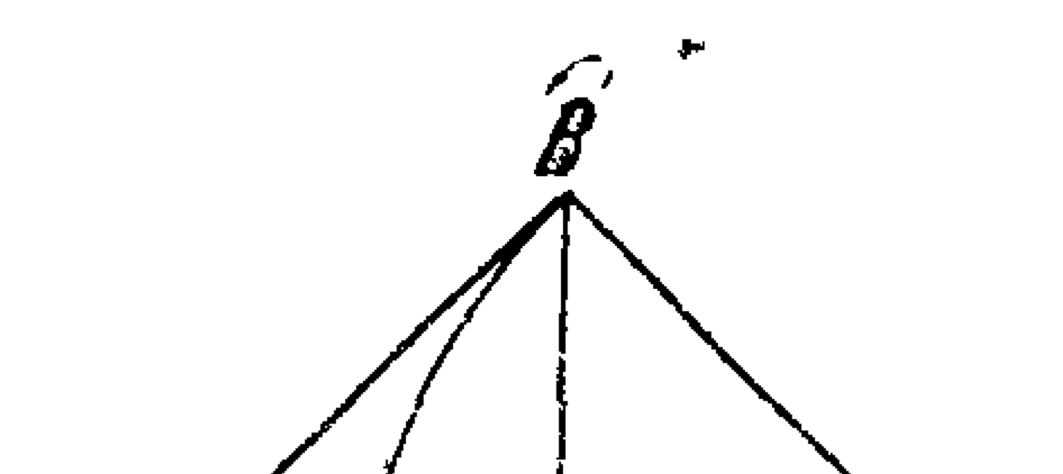
В самом деле, если пересекающиеся прямые AB и AB' плоскости II параллельны двум прямым плоскости I, то в силу теоремы 1 они параллельны плоскости I; плоскость II содержит две образующие конуса параллелей, и мы находимся в условиях теоремы 3.

2. *Гиперболическая постоянная пространства.* На предельной поверхности возьмем произвольную точку A, через неё проведем предельную линию, плоскость которой будем обозначать I (черт. 13). На предельной линии AB возьмем произвольную точку B и проведем через нее плоскость II, перпендикулярную к оси поверхности AA'. Эта плоскость сечет поверхность по окружности, центр которой лежит в точке C на оси AA'. Плоскости I и II пересекаются по прямой CB. Ось поверхности BB', будучи параллельна оси AA', лежит в плоскости I.

В плоскости II через точку B проведем касательную BD к окружности C; ясно, что она будет перпендикулярна к плоскости I. Через точку C проведем луч CG, параллельный касательной BD; он будет, конечно, расположен в плоскости II. Теперь возникают новые две плоскости: одна определяется прямыми CG и CA'; мы обозначим ее III. Другая определяется прямыми BD и BB', мы обозначим ее IV. Легко видеть, что эти плоскости пересекаются; в самом деле, две пересекающиеся прямые CA' и CG плоскости III параллельны двум пересекающимся прямым BB' и BD плоскости IV. Согласно теореме 3а, эти две плоскости пересекаются по прямой KL, которая в одну сторону, скажем LK, параллельна осям поверхности CA' и BB', — в другую сторону KL параллельна прямым BD и CG. Будучи параллельной осям AA' и BB', прямая LK есть ось поверхности и потому пересекает ее в некоторой точке M. Плоскости III и IV пересекают предельную поверхность по предельным линиям AM и BM. Теорема, имеющая в дальнейшем развитии гиперболической геометрии основное значение, заключается в том, что *предельная дуга BM имеет постоянную длину*, т. е. не зависит от выбора точки B на предельной AB.



Черт. 13.



Черт. 14.

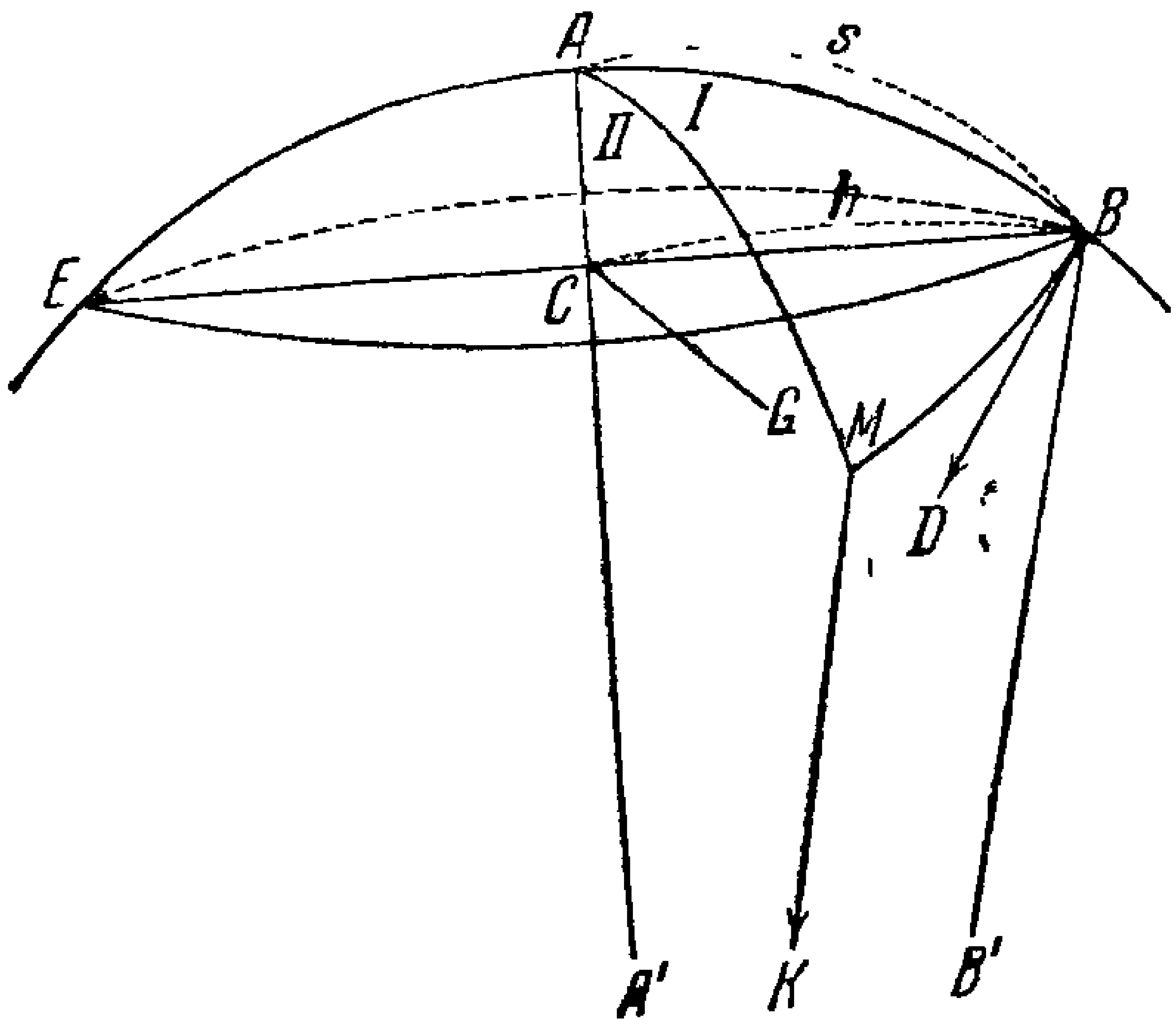
Это одно из тех предложений, которые гораздо легче доказать, чем усмотреть. Чтобы провести доказательство, перенесем на отдельный чертеж все то, что нанесено в плоскости IV (черт. 14). Прежде всего нанесем на этом чертеже прямые BB' и BD; они взаимно перпендикулярны. Далее нанесем прямую KL; она в сторону LK параллельна BB', а в сторону KL параллельна BD. Таким образом BD и BB' суть две параллели к прямой KL, выходящие из точки B; поэтому перпендикуляр BN, опущенный из точки B на прямую KL, делит угол DBB' пополам: каждый из углов DBN и $B'BN$ составляет $\frac{1}{2}$ d. Наконец, через точку B

и точку M прямой KL идет предельная дуга, имеющая параллели BB' и LK осями; это та дуга, которая нас интересует.

Отрезок BN есть отрезок параллельности, соответствующий углу $B'BN = \frac{1}{2}d$. Так как каждому углу соответствует совершенно определенный отрезок параллельности, то BN есть постоянный отрезок — отрезок параллельности угла в $\frac{1}{2}d$. Этот отрезок BN служит высотой предельной дуги BM. А так как предельная дуга вполне определяется своей высотой („Г. И"., прим. [21], за теор. 1), то BM есть постоянная дуга; ее называют *постоянной гиперболического пространства* или *гиперболической постоянной пространства*. Численное значение этой постоянной дуги естественно зависит от выбора единицы меры. В большинстве своих сочинений Лобачевский принимает длину этой дуги за единицу меры; это упрощает некоторые формулы, но часто скрадывает роль этой постоянной. Мы не будем фиксировать единицу меры и будем обозначать численное значение гиперболической постоянной через k.

IV. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Основные соотношения. В „Геометрических исследованиях" показано, что предельная поверхность несет на себе геометрию Евклида: на ней имеют место все геометрические соотношения евклидовой плоскости („Г. И.", 34 и прим. [24]). Имея это в виду, возвратимся к черт. 13, который мы здесь воспроизводим с небольшой модификацией (черт. 15). Геодезический треугольник ABM на предельной поверхности имеет прямой угол при вершине B и катет $BM = k$. Поскольку на предельной поверхности имеет место евклидова тригонометрия



Черт. 15.

$$AB = BM \cot A, \quad (1)$$

где A — угол BAM. Но этот угол (угол между касательными) измеряется двугранным углом между плоскостями $I(BAC)$ и $II(MAC)$; этот же двугранный угол измеряется линейным углом BCG. Но этот последний угол очевидно равен $\Pi(h)$, где h

отрезок BC. Если длину предельной дуги AB обозначим через s, то равенство (1) примет вид

$$s = k \cot \Pi(h). \qquad (I_1)$$

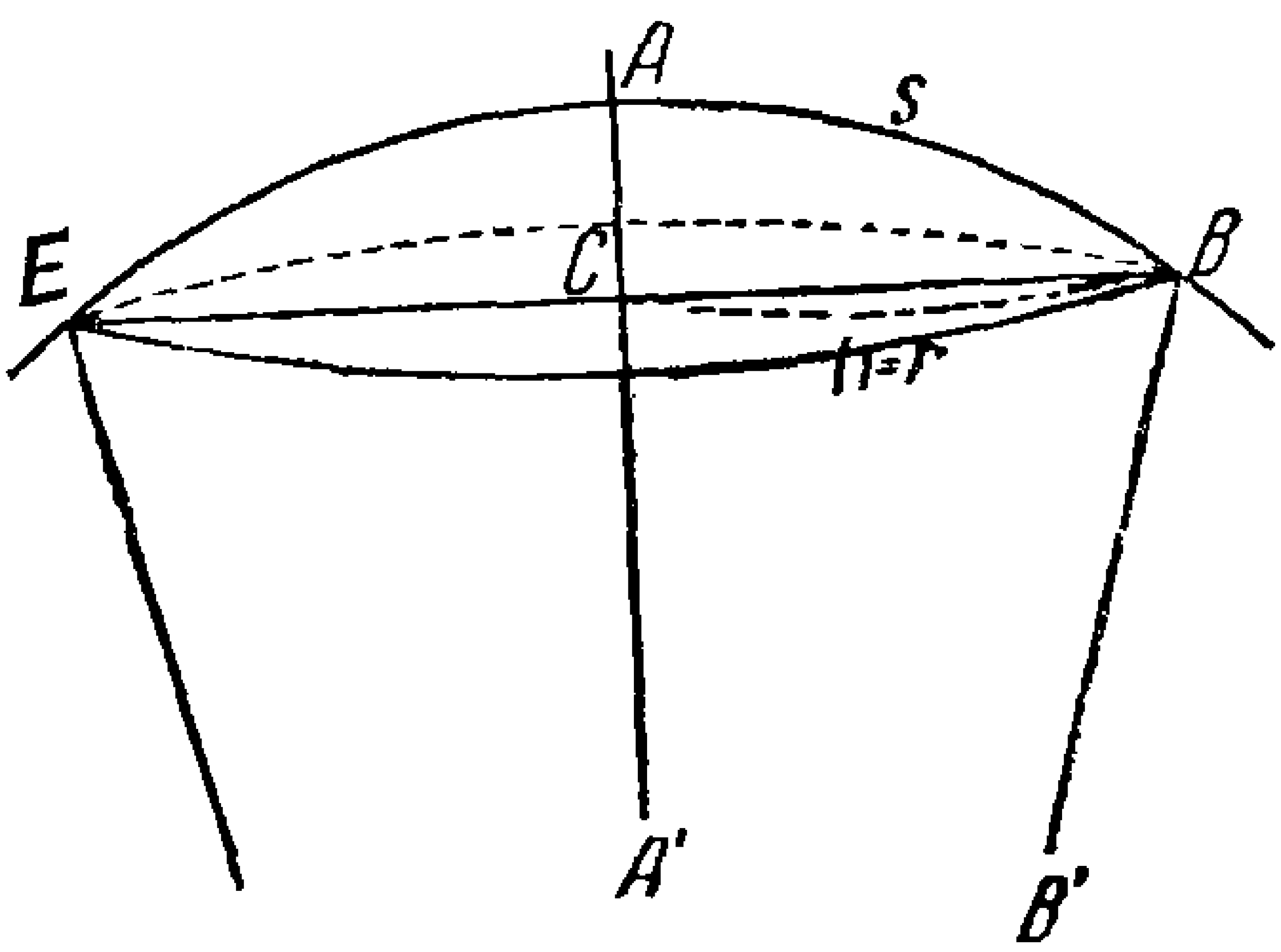
Так как h есть высота предельной дуги $AB = s$, то эта формула дает выражение длины предельной дуги через ее высоту. Мы уже знаем, что длина предельной дуги вполне определяется ее высотой, теперь мы получили аналитическое выражение этой зависимости. При этом, конечно, предполагается, что дуга и гиперболическая постоянная k выражены одной и той же единицей длины.

Некоторую модификацию последнего соотношения можно выразить следующим образом. Обозначим через S длину дуги EAB, так что $S = 2s$; хорду EB этой дуги обозначим через H, т. е. положим $H = 2h$. Уравнение (I_1) поэтому можно написать так:

$$S = 2k \cot \Pi\left(\frac{1}{2} H\right). \qquad (I_2)$$

Это есть выражение длины предельной дуги через ее хорду.

Наконец, окружность C (черт. 16), которую мы получили как пересечение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно к оси AA' предельной поверхности, может быть рассматриваема, либо как окружность на плоскости с прямолинейным радиусом $CB = h$, либо как окружность на предельной поверхности с геодезическим (предельным) радиусом $AB = s$; на предельной поверхности длина окружности C выражается через геодезический радиус формулой



Черт. 16.

$$C = 2\pi s. \qquad (2)$$

Если сюда, вместо s, подставить выражение (I_1), заменив в нем h через r, чтобы отметить, что мы $CB = h$ рассматриваем здесь как радиус окружности, то получим

$$C = 2\pi k \cot \Pi(r). \qquad (II)$$

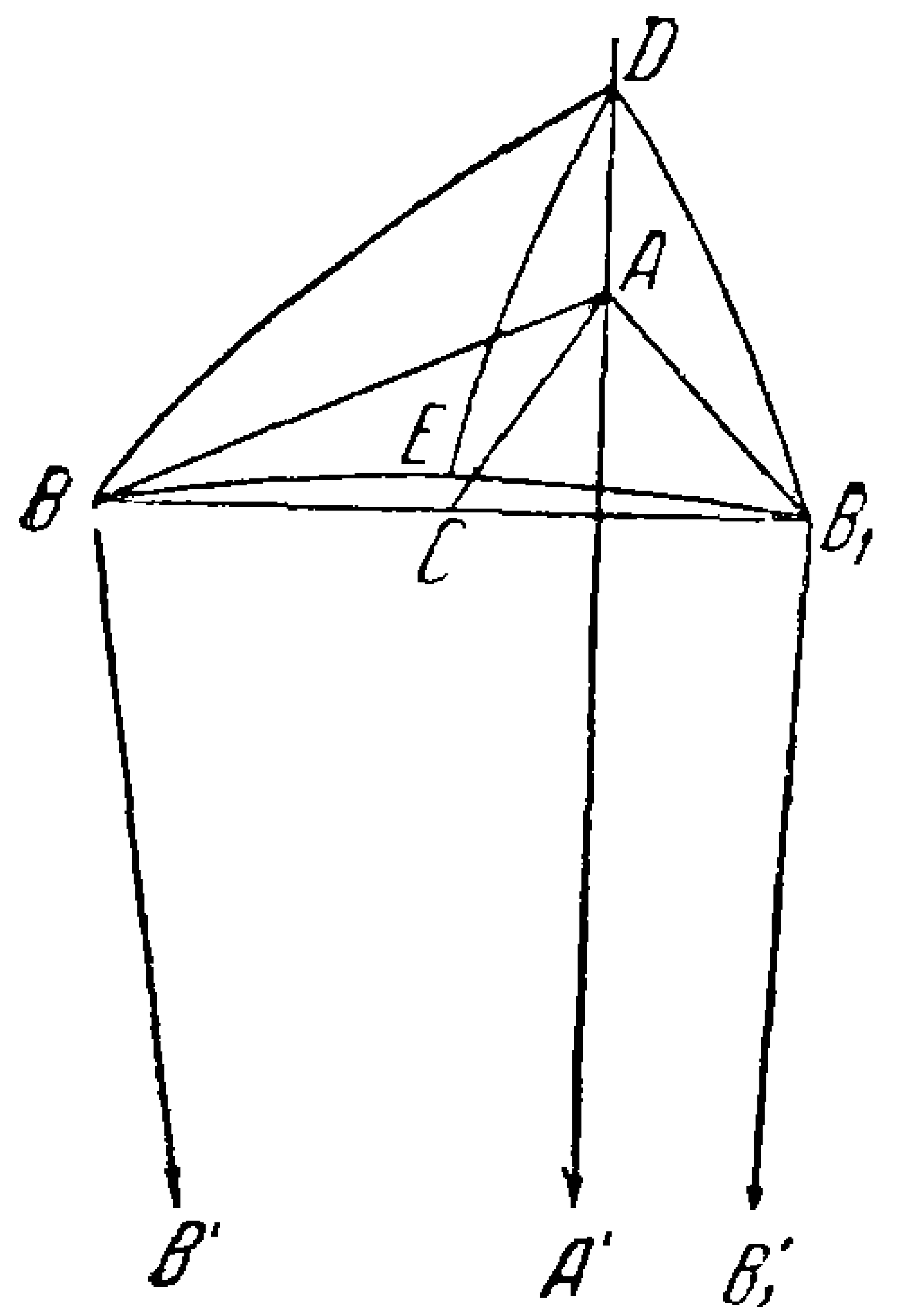
Это и есть выражение длины окружности через ее прямолинейный радиус.

Формулы (I) и (II) представляют собой основные метрические соотношения гиперболического пространства; при их помощи уже без труда устанавливаются уравнеиия, связывающие стороны и углы прямолинейного треугольника.

2. *Тригонометрические уравнения прямоугольного треугольника.* Пусть ABC (черт. 17) будет прямоугольный треугольник

*

с прямым углом при вершине C; на нашем чертеже он изображен в перспективе в горизонтальной плоскости. Из вершины A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника, направив его, скажем, вертикально вниз. Построим теперь предельную поверхность, проходящую через точку B и имеющую оси, параллельные AA'; BB' — ось поверхности, выходящая из точки B. Ось AA' встречает поверхность в некоторой точке D, лежащей выше A. Плоскость параллелей AA', BB' встречает поверхность по предельной линии BD. Поверхность можно рассматривать как образованную вращением предельной BD вокруг оси DAA'. При этом вращении точка B в некоторый момент придет в точку B_1, симметричную B относительно плоскости CAA', дуга DB при этом займет положение DB_1. Если через точки B и B_1 проведем на поверхности предельную дугу BB_1, то плоскость симметрии CAA' рассечет ее пополам в точке E. Предельная линия DE на поверхности будет медианой и высотой равнобедренного геодезического треугольника BDB_1, так что BDE будет прямоугольный геодезический треугольник с прямым углом при вершине E. Так как на поверхности действует евклидова геометрия, то



Черт. 17.

$$BE = BD \sin D, \tag{3}$$

где BE и BD — соответствующие предельные дуги (катет и гипотенуза геодезического треугольника), D — угол BDE. Этот угол измеряется двугранным углом между плоскостями BDA и EDA или его линейным углом BAC. Если, по обыкновению, стороны и углы треугольника ABC обозначим через a, b, c и A, B, C, то BAC есть не что иное, как угол A, а вместе с тем в формуле (3) угол D может быть заменен углом A

$$BE = BD \sin A. \tag{4}$$

Предельная дуга BE составляет половину дуги BB_1, которая имеет хордой $BB_1 = 2a$. Поэтому по формуле (I_2)

$$BE = k \cot \Pi(a). \tag{5}$$

Что касается предельной дуги BD, то она имеет высотой гипотенузу $BA = c$ исходного треугольника ABC. Поэтому по формуле I_1

$$BD = k \cot \Pi(c). \tag{6}$$

Вставляя выражения (5) и (6) в формулу (4), получим, по сокращении на k, окончательно

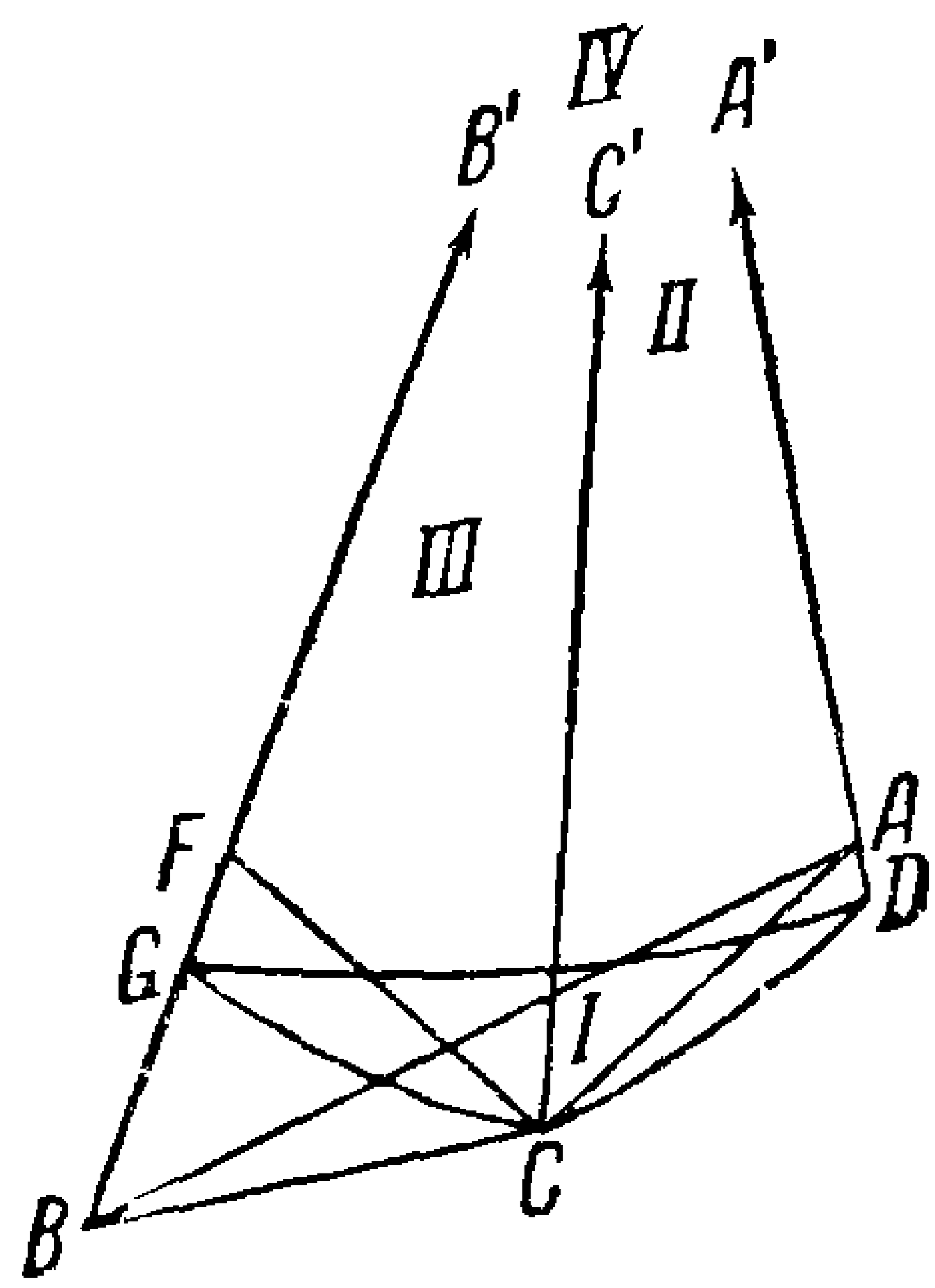
$$\cot \Pi(a) = \cot \Pi(c) \sin A. \tag{III_1}$$

Совершенно ясно, что таким же образом можно получить:

$$\cot \Pi(b) = \cot \Pi(c) \sin B. \qquad (\mathrm{III}_2)$$

Таковы уравнения, связывающие в гиперболической плоскости катет прямоугольного треугольника с гипотенузой и противолежащим острым углом. Они отличаются от уравнений евклидовой тригонометрии только тем, что a, b и c заменены через $\cot \Pi(a)$, $\cot \Pi(b)$ и $\cot \Pi(c)$.

Чтобы получить третье уравнение, связывающее стороны и углы прямоугольного треугольника, произведем построение, аналогичное предыдущему. Из вершины A прямоугольного треугольника (черт. 18) восставим перпендикуляр AA' к его плоскости и построим предельную поверхность, имеющую этот перпендикуляр AA' своею осью; но на этот раз проведем эту поверхность через вершину прямого угла C. Плоскость исходного треугольника ABC обозначим I, плоскости же, проходящие попарно через оси поверхности AA', BB', CC', обозначим последовательно через II, III, IV, как размечено на чертеже. Эти три плоскости пересекут поверхность по трем предельным дугам CG, CD, GD, образующим геодезический треугольник с прямым углом при вершине C.



Черт. 18.

В самом деле, плоскость II, проходя через прямую AA', перпендикулярную к плоскости I, сама к этой плоскости перпендикулярна ($II \perp I$). Прямая BC, будучи перпендикулярна к линии пересечения AC плоскостей I и II, перпендикулярна к плоскости II. Поэтому плоскость III, проходящая через прямую BC, перпендикулярна к плоскости II; это значит плоскости II и III образуют при ребре CC' прямой двугранный угол, т. е. в геодезическом треугольнике GCD угол C — прямой. Применяя к этому треугольнику уравнение евклидовой тригонометрии, имеем:

$$GC = CD \operatorname{tg} D. \qquad (7)$$

Но угол D измеряется углом A исходного прямолинейного треугольника BAC. Далее, так как CA есть высота предельной дуги CD, то формула (I_1) дает:

$$CD = k \cot \Pi(AC) = k \cot \Pi(b). \qquad (8)$$

Чтобы выразить также дугу CG через стороны и углы треугольника ABC, проводим ее высоту CF; тогда, по формуле (I_1)

$$CG = k \cot \Pi(CF). \qquad (9)$$

Но из прямоугольного треугольника BFC по формуле (III_1) имеем:

$$\cot \Pi (CF) = \cot \Pi (BC) \sin (CBF). \tag{10}$$

Но, с одной стороны, CB есть катет a треугольника ABC; с другой стороны, так как $BC \perp CC'$, а $BB' \parallel CC'$, то угол CBF есть $\Pi (BC) = \Pi (a)$. Формулы (9) и (10) поэтому дают:

$$CG = k \cot \Pi (a) \sin \Pi (a) = k \cos \Pi (a). \tag{11}$$

Подставляя выражения (8) и (11) в уравнение (7), по сокращении на k, получаем

$$\cos \Pi (a) = \cot \Pi (b) \operatorname{tg} A. \tag{III_3}$$

Совершенно ясно, что уравнению (III_3) соответствует уравнение

$$\cos \Pi (b) = \cot \Pi (a) \operatorname{tg} B. \tag{III_4}$$

Соотношения, выраженные уравнениями (III_1) и (III_2), обыкновенно называют *теоремой синусов*; соотношения (III_3) и (III_4) — *теоремой тангенсов*. Уравнение III_4 может быть выведено алгебраически из уравнений (III_1) — (III_3); предоставляем это читателю; предоставляем ему также вывести из них уравнения (1) — (10), установленные в примечании [30] к „Геометрическим исследованиям". Приводим их только в новой номенклатуре:

$$\sin \Pi (c) = \sin \Pi (a) \sin \Pi (b), \tag{III_5}$$

$$\sin \Pi (c) = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B, \tag{III_6}$$

$$\sin \Pi (a) \cos A = \sin B, \tag{III_7}$$

$$\sin \Pi (b) \cos B = \sin A, \tag{III_8}$$

$$\cos \Pi (a) = \cos \Pi (c) \cos B, \tag{III_9}$$

$$\cos \Pi (b) = \cos \Pi (c) \cos A. \tag{III_{10}}$$

Соотношения, выражаемые последними двумя уравнениями, называют *теоремой косинусов*.

3. *Мнемоническое правило А. П. Котельникова.* Неперу принадлежит следующее мнемоническое правило для запоминания формул, связывающих элементы прямоугольного сферического треугольника.

Разделим круг радиусами на пять частей (черт. 19) и, пропустив в сферическом треугольнике прямой угол, запишем в каждом секторе катеты, дополнения $\left(\text{до } \frac{\pi}{2}\right)$ гипотенузы и острых углов в том порядке, в котором они встречаются при обходе треугольника. Мы получаем для треугольника с гипотенузой c, катетами a, b и противолежащими углами A и B диаграмму, изображенную на черт. 19. Выберем какую-либо часть, которую будем называть *средней частью*; части, лежащие рядом с ней, будем называть *прилегающими*, а две другие части — *противолежащими*. Тогда правило Непера гласит:

1) Синус средней части равен произведению тангенсов прилегающих частей.

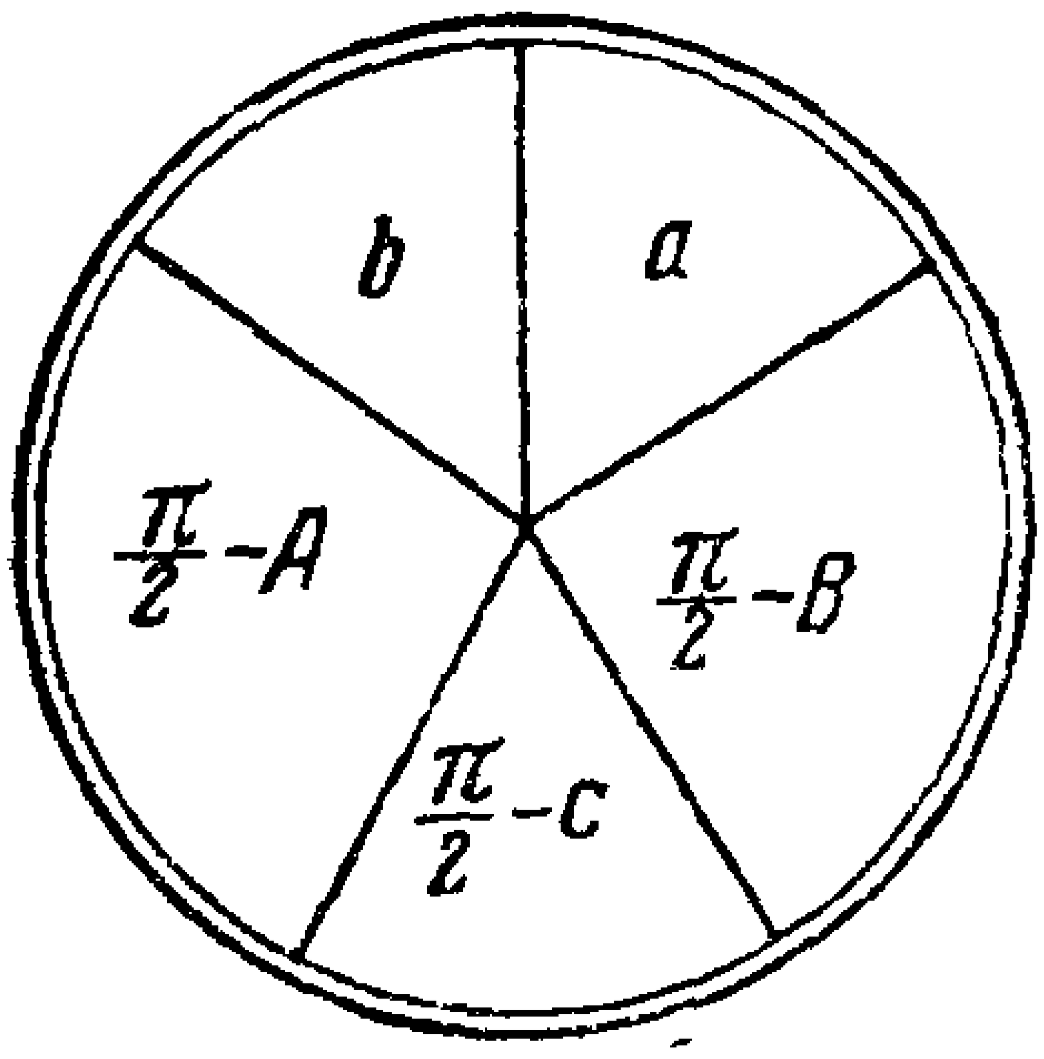
2) Синус средней части равен произведению косинусов противоположных частей.

Если, например, за среднюю часть примем $\frac{\pi}{2}-c$, то это правило даст

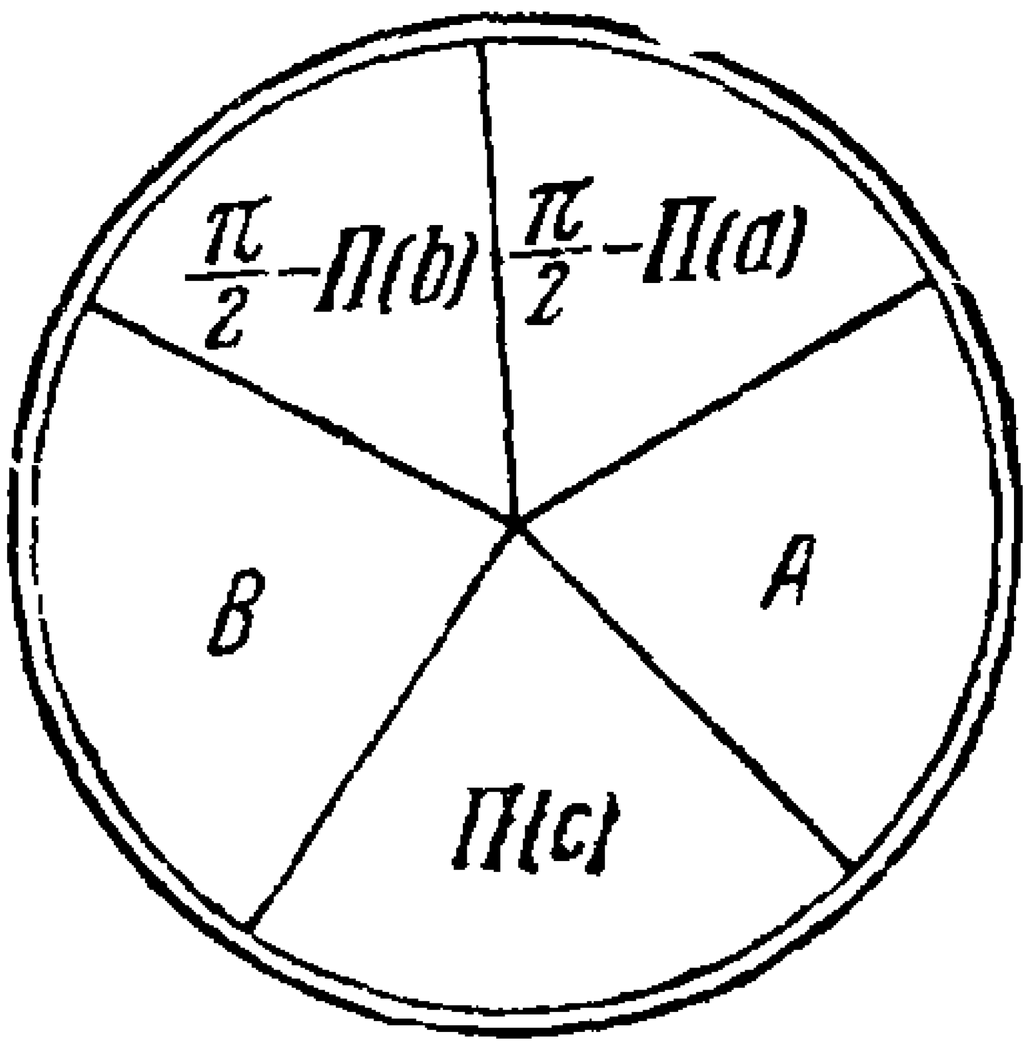
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-B\right), \text{ т. е. } \cos c=\cot A\cot B,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=\cos a\cos b, \text{ т. е. } \cos a\cos b=\cos c$$

(см. „Г. И“., предл. 35).



Черт. 19.



Черт. 20.

То же правило остается в силе в гиперболической плоскости, если схему, изображенную на черт. 19, заменить той, которая изображена на черт. 20. В самом деле, выбрав, например, за среднюю часть $\Pi(c)$, получаем (III_6) и (III_5)

$$\sin\Pi(c)=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B,\quad \sin\Pi(c)=\sin\Pi(a)\sin\Pi(b).$$

4. *Тригонометрические соотношения в четырехугольнике Ламберта.* Напомним, что четырехугольником Ламберта называют четырехугольник с тремя прямыми углами; стороны, к которым прилежат по два прямых угла, называются *основаниями*, а две другие стороны — *высотами* четырехугольника. Обозначим через a, b основания, через h_a, h_b — соответствующие высоты (черт. 21) четырехугольника Ламберта с острым углом при вершине D. Диагональ $DC\,(f)$ делит четырехугольник на два прямоугольных треугольника с углами α и β при вершине C. Из прямоугольного треугольника ACD по теореме косинусов (III_9) имеем

$$\cos\Pi(a)=\cos\Pi(f)\cos\alpha=\cos\Pi(f)\sin\beta. \qquad (12)$$

С другой стороны, в силу теоремы синусов (III_1), из треугольника DBC имеем

$$\sin\beta=\frac{\cot\Pi(h_a)}{\cot\Pi(f)}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (12), получаем

$$\cos \Pi (a) = \sin \Pi (f) \cot \Pi (h_a).$$

А так как по формуле (III_6), применяемой к треугольнику DBC,

$$\sin \Pi (f) = \sin \Pi (b) \sin \Pi (h_a),$$

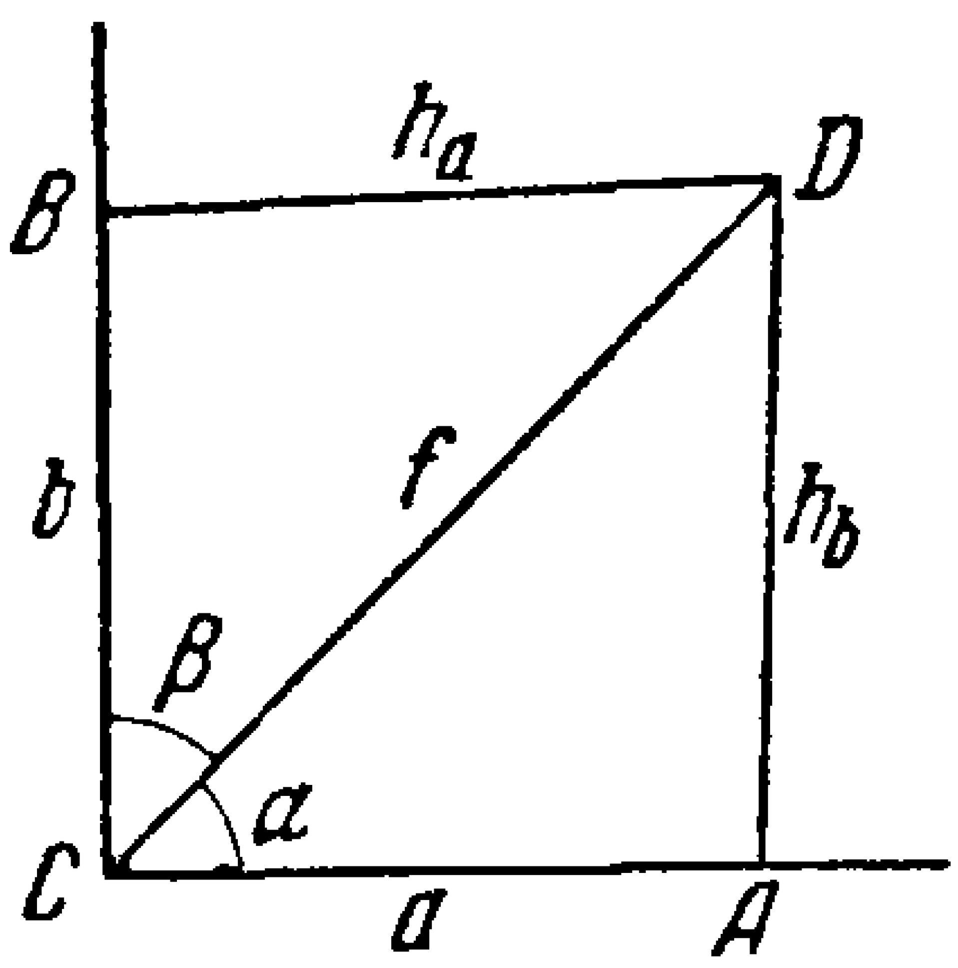
то

$$\cos \Pi (a) = \cos \Pi (h_a) \sin \Pi (b); \qquad (IV_1)$$

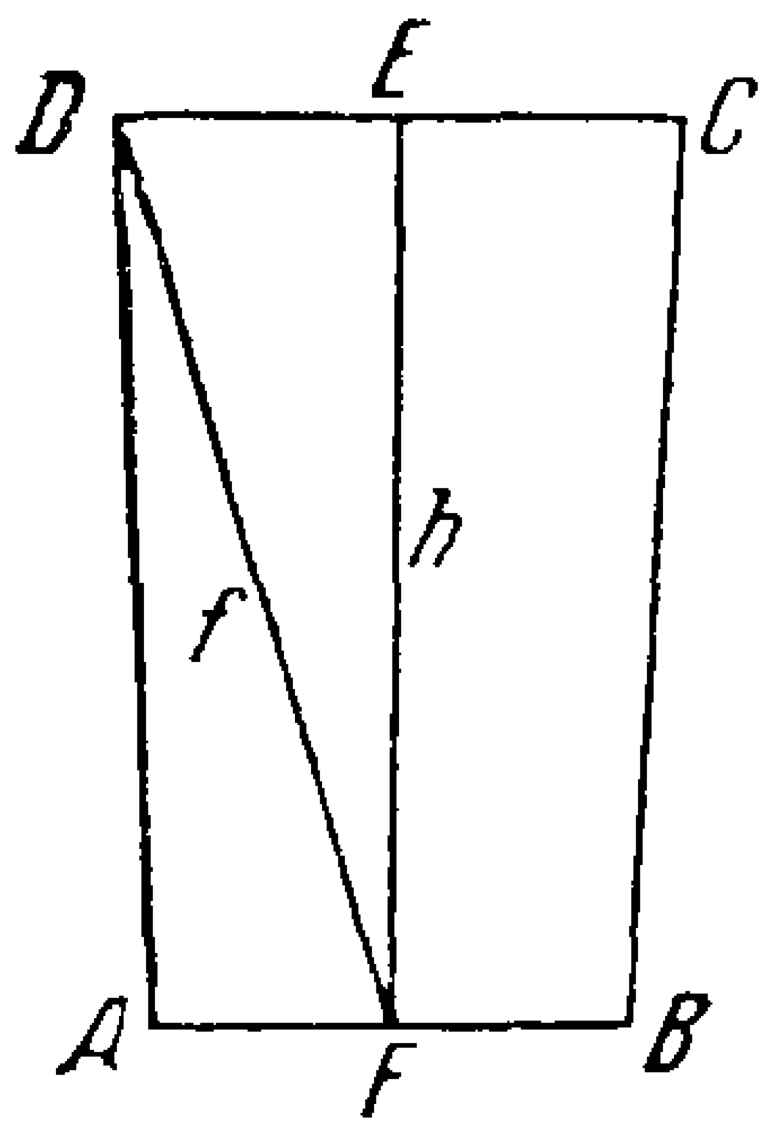
аналогично этому

$$\cos \Pi (b) = \cos \Pi (h_b) \sin \Pi (a). \qquad (IV_2)$$

Очень любопытны соотношения, связывающие основания четырехугольника Ламберта с диагональю f, а также его высоты с тою же



Черт. 21.



Черт. 22.

диагональю. В самом деле, уравнение (III_9) дает еще в дополнение к уравнениям (12)

$$\cos \Pi (b) = \cos \Pi (f) \cos \beta = \cos \Pi (f) \sin \alpha. \qquad (12a)$$

Из уравнений же (12) и (12a), получаем

$$\cos^2 \Pi (a) + \cos^2 \Pi (b) = \cos^2 \Pi (f). \qquad (IV_3)$$

При достаточно малых сторонах a, b и f величины $\cos \Pi (a)$, $\cos \Pi (b)$, $\cos \Pi (f)$ можно заменить через a, b и f. Уравнение (IV_3) принимает вид:

$$a^2 + b^2 = f^2, \qquad (13)$$

как это имеет место в евклидовой геометрии. Таким же образом уравнения (III_1) и (III_2) дают:

$$\cot \Pi (h_a) = \cot \Pi (f) \sin \beta, \quad \cot \Pi (h_b) = \cot \Pi (f) \sin \alpha,$$

и потому

$$\cot^2 \Pi (h_a) + \cot^2 \Pi (h_b) = \cot^2 \Pi (f); \qquad (IV_4)$$

при достаточно малых значениях h_a и h_b это дает

$$h_a^2 + h_b^2 = f^2. \qquad (14)$$

5. Тригонометрические соотношения в четырехугольнике Саккери. В четырехугольнике Саккери обозначим нижнее основание через a, верхнее через b, боковые стороны $AD = BC$ (черт. 22) через c и среднюю линию через h. $ADEF$ есть четырехугольник Ламберта с основаниями $\frac{a}{2}$ и h, противолежащими высотами $\frac{b}{2}$ и c. Соотношения (IV) поэтому дают:

$$\cos \Pi\left(\frac{a}{2}\right) = \cos \Pi\left(\frac{b}{2}\right) \sin \Pi(h), \qquad (V_1)$$

$$\cos \Pi(h) = \cos \Pi(c) \sin \Pi\left(\frac{a}{2}\right). \qquad (V_2)$$

Эти соотношения связывают основания и боковые стороны с высотой четырехугольника Саккери. Из прямоугольных треугольников DAF и DEF, в силу уравнения (III_5), имеем:

$$\sin \Pi\left(\frac{a}{2}\right) \sin \Pi(c) = \sin \Pi\left(\frac{b}{2}\right) \sin \Pi(h).$$

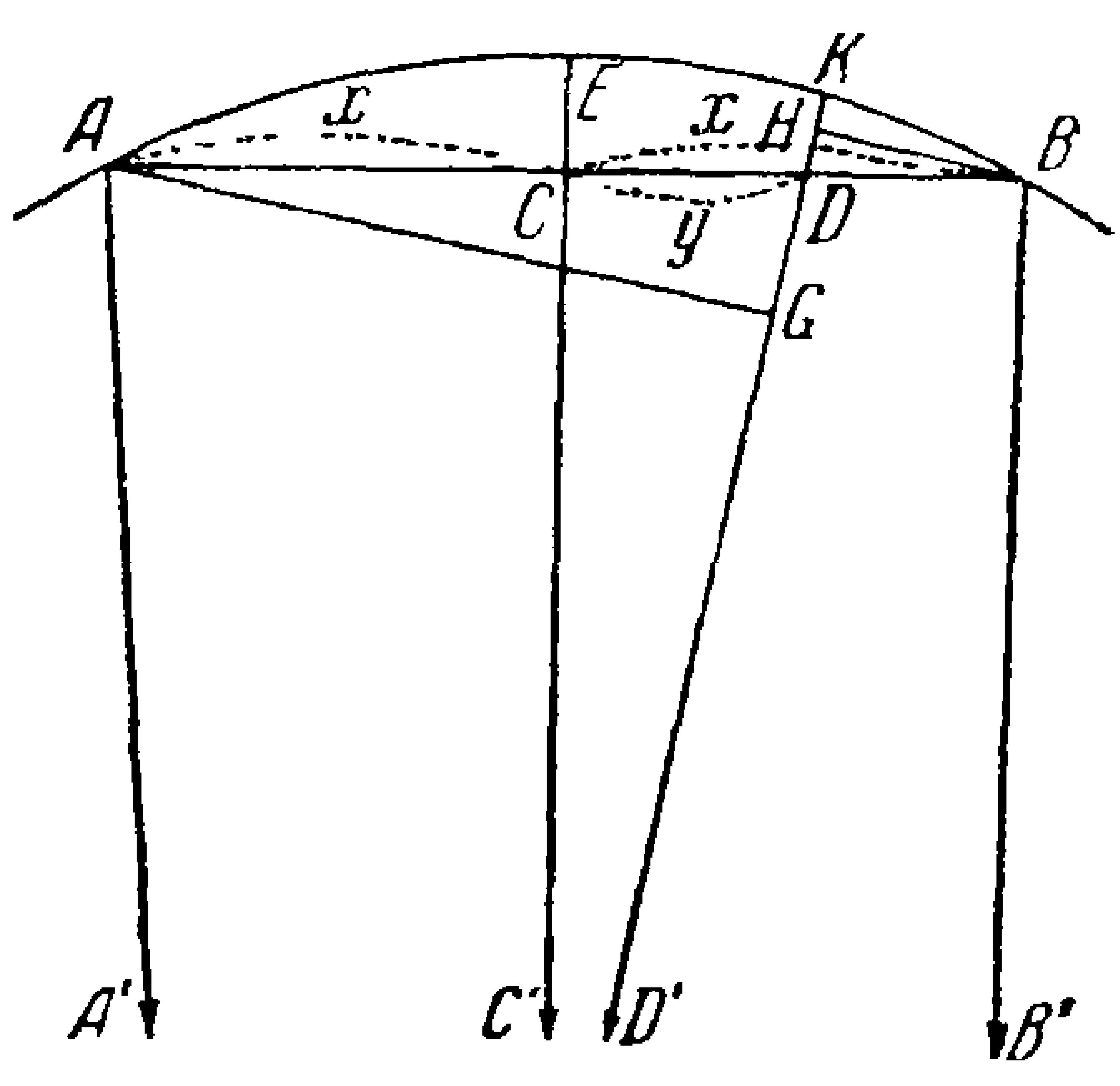
Если это уравнение почленно разделить на уравнение (V_1), то получается:

$$\cot \Pi\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{\cot \Pi\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin \Pi(c)}. \qquad (V_3)$$

Это соотношение дает возможность определить любое основание четырехугольника Саккери по другому основанию и боковой стороне.

V. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Теорема сложения. Под теоремой сложения для функции $\varphi(x)$ разумеют формулы, определяющие значения функции $\varphi(x \pm y)$ по данным значениям $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Мы выведем здесь теорему сложения для функции $\Pi(x)$. С этой целью возьмем два отрезка x и y, предположив предварительно $x \geqslant y$. На отрезке $AB = 2x$ (черт. 23) построим предельную линию AB („Г. И"., прим. [18], теор. 3). Перпендикуляр CC', восставленный из середины C хорды AB, будет осью этой предельной. От точки C отложим отрезок $CD = y$ и через точку D проведем ось кривой DD', которая пересечет дугу AB в точке K и этим разделит ее на две части AK и KB, так что



Черт. 23.

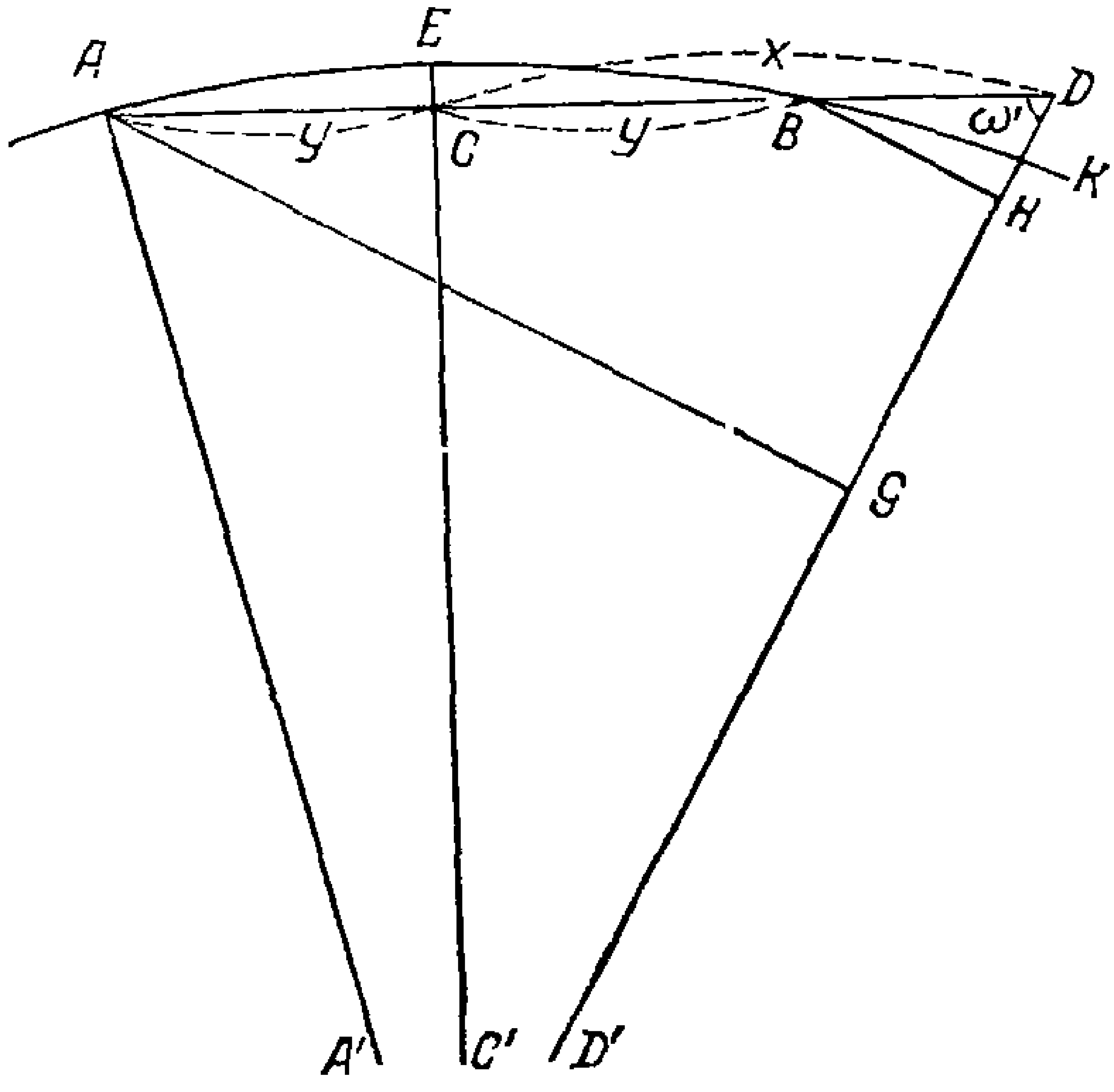
$$\smile AB = \smile AK + \smile KB. \qquad (15)$$

По формуле (I_2) $\quad \smile AB = 2k \cot \Pi(x)$. (16)

Если проведем высоты AG и BH дуг AK и KB, то

$$\smile AK = k \cot \Pi(AG), \quad \smile KB = k \cot \Pi(BH) \tag{17}$$

Но из прямоугольных треугольников ADG и BDH, по формуле (III_1), обозначая угол ADG через ω, получаем



Черт 24.

$$\cot \Pi(AG) = \\ = \cot \Pi(AD) \sin \omega,$$
$$\cot \Pi(BH) = \\ = \cot \Pi(BD) \sin \omega.$$

Так как

$$AD = x + y,$$
$$BD = x - y,$$
$$\angle ADG = \angle BDH = \\ = \omega = \Pi(y),$$

то уравнение (15), при учете соотношений (16) и (17), по сокращении на k дает:

$$2 \cot \Pi(x) = \\ = \{\cot \Pi(x+y) + \\ + \cot \Pi(x-y)\} \sin \Pi(y). \tag{18}$$

В этом уравнении кроме $\cot \Pi(x+y)$ остается еще неизвестным $\cot \Pi(x-y)$, поэтому для определения этих двух величин необходимо еще одно уравнение. С этой целью строим теперь предельную дугу (черт. 24) на отрезке $AB = 2y$, и от ее середины C откладываем отрезок $CD = x$; точка D будет теперь расположена вне предельной линии; выходящая из нее ось DD' встретит предельную AEB в точке K, лежащей за пределами дуги AB. Вместе с тем равенство (15) заменится таким:

$$\smile AB = \smile AK - \smile KB. \tag{19}$$

Теперь

$$\smile AB = 2k \cot \Pi(y).$$

Для выражения же дуг AK и BK проведем их высоты AG и BH; тогда

$$\smile AK = k \cot \Pi(AG); \quad \smile BK = k \cot \Pi(BH). \tag{20}$$

Из прямоугольных же треугольников AGD и BDH, имеющих общий угол $ADG = BDK = \Pi(x)$, получаем

$$\cot \Pi(AG) = \cot \Pi(x+y) \sin \omega, \quad \cot \Pi(BH) = \cot \Pi(x-y) \sin \omega,$$

где $\quad \omega = \angle ADG = \Pi(x);$

равенство (15) дает:

$$2\cot\Pi(y)=\{\cot\Pi(x+y)-\cot\Pi(x-y)\}\sin\Pi(x). \tag{21}$$

Теперь из уравнений (18) и (21) получаем

$$\cot\Pi(x+y)=\frac{\cot\Pi(x)}{\sin\Pi(y)}+\frac{\cot\Pi(y)}{\sin\Pi(x)}=\frac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}. \tag{VI$_1$}$$

$$\cot\Pi(x-y)=\frac{\cot\Pi(x)}{\sin\Pi(y)}-\frac{\cot\Pi(y)}{\sin\Pi(x)}=\frac{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(y)}{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}. \tag{VI$_2$}$$

Если пользоваться значением функции $\Pi(y)$ для отрицательных значений аргумента („Г. И.“, предл. 23), то формула (VI$_1$) приводит к (VI$_2$). Первая из них пригодна для всех значений аргументов x и y; вторая на основании вывода предполагает $x>y$. Если, однако, учитывать значения функции $\Pi(x)$ для отрицательных значений аргумента, то она пригодна для любых значений x и y. Из этих формул простым вычислением получаем:

$$\cos\Pi(x+y)=\frac{\cos\Pi(x)+\cos\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}, \tag{VI$_3$}$$

$$\cos\Pi(x-y)=\frac{\cos\Pi(x)-\cos\Pi(y)}{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \tag{VI$_4$}$$

Комбинируя эти два равенства с двумя предыдущими, получаем

$$\sin\Pi(x+y)=\frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1+\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}, \tag{VI$_5$}$$

$$\sin\Pi(x-y)=\frac{\sin\Pi(x)\sin\Pi(y)}{1-\cos\Pi(x)\cos\Pi(y)}. \tag{VI$_6$}$$

Эти формулы носят название формул сложения. Предварительное предположение $x\geqslant y$ утрачивает значение.

2. *Формулы умножения и деления.* Полагая в уравнении (VI$_1$), (VI$_3$), (VI$_5$) $x=y$, получаем

$$\cot\Pi(2x)=\frac{2\cos\Pi(x)}{\sin^2\Pi(x)}, \tag{VII$_1$}$$

$$\cos\Pi(2x)=\frac{2\cos\Pi(x)}{1+\cos^2\Pi(x)}, \tag{VII$_2$}$$

$$\sin\Pi(2x)=\frac{\sin^2\Pi(x)}{1+\cos^2\Pi(x)}. \tag{VII$_3$}$$

Последнее уравнение дает:

$$\sin\Pi(x)=\sqrt{\frac{2\sin\Pi(2x)}{1+\sin\Pi(2x)}}, \tag{VII$_4$}$$

$$\cos\Pi(x)=\sqrt{\frac{1-\sin\Pi(2x)}{1+\sin\Pi(2x)}}, \tag{VII$_5$}$$

$$\operatorname{tg}\Pi(x)=\sqrt{\frac{2\sin\Pi(2x)}{1-\sin\Pi(2x)}}. \tag{VII$_6$}$$

И отсюда, заменяя аргумент $2x$ через x

$$\sin \Pi\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{2\sin \Pi(x)}{1+\sin \Pi(x)}}, \qquad (\mathrm{VII}_7)$$

$$\cos \Pi\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\sin \Pi(x)}{1+\sin \Pi(x)}}, \qquad (\mathrm{VII}_8)$$

$$\operatorname{tg} \Pi\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{2\sin \Pi(x)}{1-\sin \Pi(x)}}. \qquad (\mathrm{VII}_9)$$

3. Разыскание функции $\Pi(x)$*; основное уравнение гиперболического пространства.* Из формулы (VI_3) получаем:

$$\frac{1-\cos \Pi(x+y)}{1+\cos \Pi(x+y)}=\frac{1-\cos \Pi(x)}{1+\cos \Pi(x)}\cdot\frac{1-\cos \Pi(y)}{1+\cos \Pi(y)}$$

и отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x+y)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(y).$$

Это замечательное соотношение можно рассматривать как функциональное уравнение, служащее для установления функции $\Pi(x)$. Если положим

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=f(x),$$

то предыдущее уравнение примет вид:

$$f(x+y)=f(x)f(y). \qquad (22)$$

Это то же уравнение, которое фактически фигурирует в „Геометрических исследованиях“ (см. прим. [22]). Простейшими функциональными уравнениями незадолго до того времени, когда Лобачевский развертывал гиперболическую геометрию, занимался Коши.[1] Он показал, что *непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (22), есть показательная функция.* Так как $\Pi(x)$ есть непрерывная функция от x, то отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=a^x,$$

где a — некоторое положительное число. Обозначая натуральный логарифм числа a через α, напишем это уравнение в виде

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{\alpha x}. \qquad (23)$$

Заметим прежде всего, что в гиперболическом пространстве число α отлично от нуля. В самом деле, если бы α было равно нулю, то это означало бы, что $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)$ имеет постоянное значение, равное 1, т. е. что $\Pi(x)$ есть постоянный угол и именно прямой, что характеризует евклидову геометрию. Таким образом, в гипер-

[1] A. Cauchy. Cours d'analyse de l'École polytechnique. P. I. Analyse algébrique. Paris, 1821, гл. V, предл. 4.

болическом пространстве α имеет значение, отличное от нуля и притом отрицательное, ибо

$$\frac{1}{2}\Pi(x)<45^\circ,\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)<1.$$

Полагая поэтому $\alpha=-\frac{1}{l}$, приводим предыдущее уравнение к виду

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-\frac{x}{l}}. \tag{24}$$

Аналитическое выражение для функции $\Pi(x)$, таким образом, найдено; необходимо только выяснить значение постоянной l; это требует несложного вычисления.

4. *Выражение тригонометрических функций угла* $\Pi(x)$ *в гиперболических функциях аргумента.* Из уравнения (24) получаем:

$$\operatorname{tg}\Pi(x)=\frac{2e^{-\frac{x}{l}}}{1-e^{-\frac{2x}{l}}}=\frac{2}{e^{\frac{x}{l}}-e^{-\frac{x}{l}}}=\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{l}\right)},$$

$$\cos\Pi(x)=\frac{e^{\frac{x}{l}}-e^{-\frac{x}{l}}}{e^{\frac{x}{l}}+e^{-\frac{x}{l}}}=\operatorname{th}\left(\frac{x}{l}\right) \tag{25}$$

$$\sin\Pi(x)=\frac{2}{e^{\frac{x}{l}}+e^{-\frac{x}{l}}}=\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{l}\right)};$$

уравнение (I_2), выражающее длину гиперболической дуги S через ее хорду H, выразится теперь так:

$$S=2k\operatorname{sh}\left(\frac{H}{2l}\right).$$

Отношение длины дуги S к длине хорды H

$$\frac{S}{H}=2\frac{k}{H}\operatorname{sh}\left(\frac{H}{2l}\right) \tag{26}$$

стремится к 1, когда H стремится к 0. Вычисляя значение правой части при $H=0$ по правилу де-Лопиталя, найдем, что она равна $\frac{k}{l}$, следовательно, $l=k$. Новая постоянная, появившаяся при решении функционального уравнения (22), оказывается равной гиперболической постоянной k. Вместе с тем равенства (25) принимают вид:

$$\cot\Pi(x)=\operatorname{sh}\left(\frac{x}{k}\right),\quad \cos\Pi(x)=\operatorname{th}\left(\frac{x}{k}\right),\quad \sin\Pi(x)=\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{k}\right)}, \tag{VIII}$$

а уравнение (24)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-\frac{x}{k}}. \tag{IX}$$

Вместе с тем уравнения (III), связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника в гиперболическом пространстве, могут быть теперь выражены в гиперболических функциях, именно:

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k}=\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)\sin A,\quad \operatorname{sh}\frac{b}{k}=\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)\sin B, \qquad (X_{1,2})$$

$$\operatorname{th}\frac{a}{k}=\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{tg}A,\quad \operatorname{th}\frac{b}{k}=\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{tg}B, \qquad (X_{3,4})$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right), \qquad (X_5)$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)=\cot A\cot B, \qquad (X_6)$$

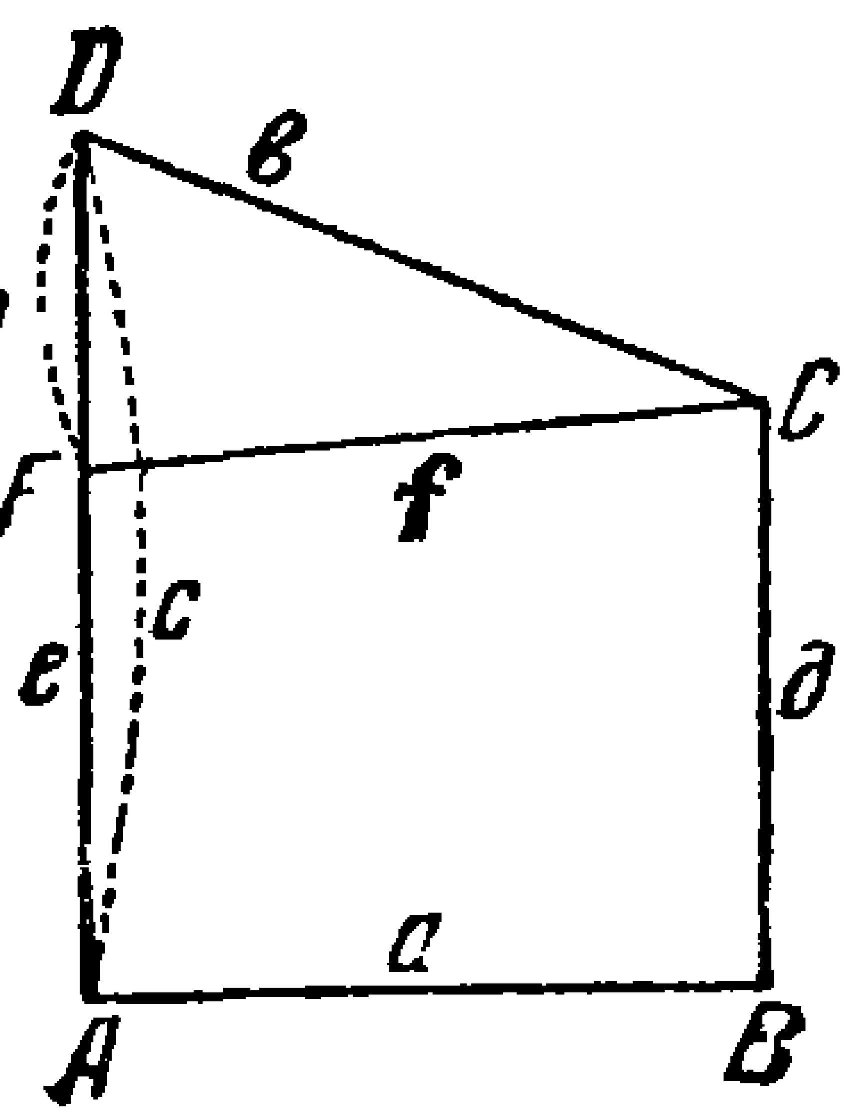
$$\cos A=\sin B\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right),\quad \cos B=\sin A\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right), \qquad (X_{7,8})$$

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right)=\operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right)\cos B,\quad \operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right)=\operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right)\cos A. \qquad (X_{9,10})$$

Эти уравнения дают уже возможность вычислить по трем элементам треугольника все остальные, однако в предположении, что известно значение постоянной k; к этому мы еще возвратимся. Одни авторы пользуются исключительно уравнениями (X), т. е. всегда выражают соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника в гиперболических функциях; другие предпочитают уравнения (III_1) — (III_{10}). Мы предпочитаем обычно пользоваться формулами Лобачевского, главным образом потому, что они в большей мере сохраняют своеобразные особенности гиперболической геометрии.

VI. ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ ДВУХ ПОСТОЯННЫХ, ПОЯВЛЯЮЩИХСЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Тригонометрические соотношения в двупрямоугольном четырехугольнике. Четырехугольники, которые мы рассматривали выше (IV 4,5) — четырехугольники Ламберта и Саккери — представляют собою частные случаи четырехугольника, имеющего два прямых угла при основании. Пусть $ABCD$ (черт. 25) будет такой четырехугольник с прямыми углами A и B при основании AB. Обозначим основание AB через a, противоположную сторону CD через b, а боковые стороны через c и $д$; примем сначала $c > д$. Из вершины C опустим перпендикуляр CF на прямую AD. В таком случае AF будет меньше $CB = д$ и, следовательно, подавно меньше c; точка F упадет внутрь стороны AD. Отрезки, на которые точка F разделит сторону AD, обозначим через g и e, а пер-



Черт. 25.

пендикуляр CF через f. Из прямоугольного треугольника CFD имеем (III_5)

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(f) \sin \Pi(g).$$

Далее, по формуле сложения (VI_6)

$$\sin \Pi(g) = \sin \Pi(c-e) = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(e)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(e)}.$$

Наконец, из четырехугольника Ламберта $CFAB$ в силу соотношения (IV_1)

$$\cos \Pi(e) = \cos \Pi(\partial) \sin \Pi(a).$$

Следовательно,

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin \Pi(f) \sin \Pi(c) \sin \Pi(e)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(\partial) \sin \Pi(a)}. \qquad (XI)$$

Но из двух прямоугольных треугольников ACF и ACB имеем (III_5)

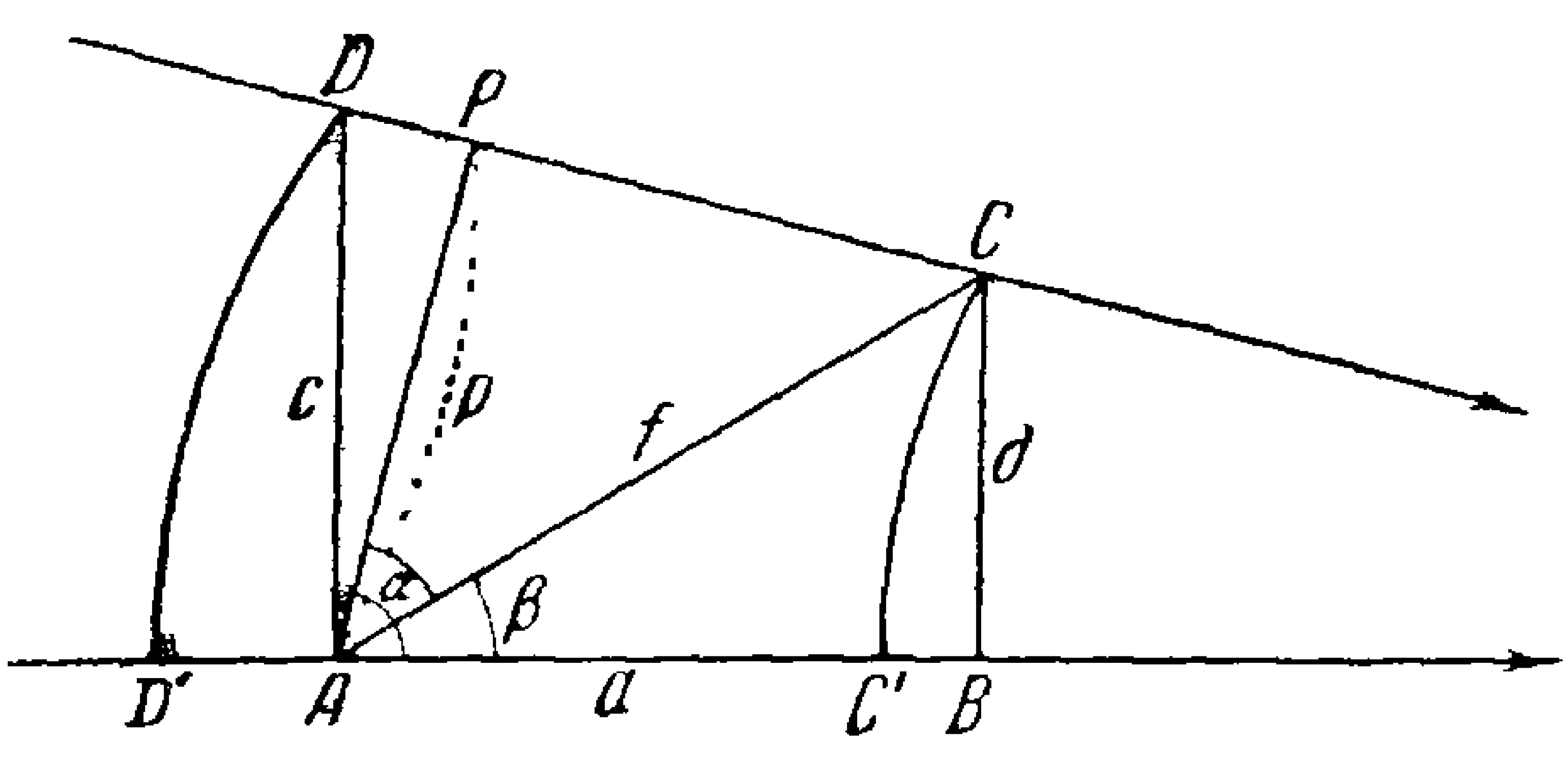
$$\sin \Pi(f) \sin \Pi(e) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(\partial),$$

и потому

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin \Pi(c) \sin \Pi(\partial) \sin \Pi(a)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(\partial) \sin \Pi(a)}. \qquad (XI_1)$$

Эта формула часто находит себе применение в развитии гиперболической геометрии. Здесь же ограничимся тем случаем, когда $c = \partial$, т. е. когда мы имеем дело с четырехугольником Саккери. В этом случае

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin^2 \Pi(c) \sin \Pi(a)}{1 - \cos^2 \Pi(c) \sin \Pi(a)}.$$



Черт. 26.

Отсюда

$$\frac{1 - \sin \Pi(b)}{2 \sin \Pi(b)} = \frac{1 - \sin \Pi(a)}{2 \sin \Pi(a) \sin^2 \Pi(c)},$$

или, в силу формулы (VII),

$$\cot \Pi\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{\cot \Pi\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin \Pi(c)},$$

что совпадает с формулой (V_3).

2. *Соотношения между сторонами прямоугольной гиперболической трапеции.* Под *гиперболической трапецией* будем разуметь такой четырехугольник в гиперболической плоскости, в котором две противоположные стороны (основания) параллельны. Если боковые стороны трапеции перпендикулярны к одному из оснований, мы будем называть такую трапецию *прямоугольной.*

В прямоугольной трапеции боковые стороны не могут быть равны, потому что в четырехугольнике Саккери основания не могут быть параллельны. Мы предположим поэтому, что в прямоугольной трапеции $ABCD$ (черт. 26) $c>\partial$. Из вершины A опустим перпендикуляр $AP=p$ на верхнее основание. Так как $DC \parallel AB$, то

$$\angle ADP=\Pi(c), \quad \angle PAB=\Pi(p). \tag{27}$$

Если проведем еще диагональ $AC=f$ и в четырехугольнике $PABC$ для краткости обозначим углы при вершине A через α и β, а угол $PAB=\Pi(p)$ через ω, то из прямоугольного треугольника CAP [по формуле (III_9)] будем иметь:

$$\begin{aligned}\cos \Pi(p)&=\cos \Pi(f)\cos\alpha=\cos \Pi(f)\cos(\omega-\beta)=\\&=\cos \Pi(f)\cos\omega\cos\beta+\cos\Pi(f)\sin\omega\sin\beta.\end{aligned} \tag{28}$$

Но из треугольника ACB имеем:

$$\cos \Pi(f)\cos\beta=\cos\Pi(a);$$

поэтому в правой части равенства (28) первый член равен

$$\cos\Pi(a)\cos\omega=\cos\Pi(a)\cos\Pi(p);$$

с другой стороны, из того же прямоугольного треугольника ACB имеем:

$$\sin\beta=\frac{\cot\Pi(\partial)}{\cot\Pi(f)},$$

так что

$$\begin{aligned}\cos\Pi(f)\sin\beta&=\cot\Pi(\partial)\sin\Pi(f)=\\&=\cot\Pi(\partial)\sin\Pi(a)\sin\Pi(\partial)=\cos\Pi(\partial)\sin\Pi(a).\end{aligned}$$

Поэтому в правой части равенства (28) второй член равен

$$\cos\Pi(\partial)\sin\Pi(a)\sin\omega=\cos\Pi(\partial)\sin\Pi(p)\sin\Pi(a),$$

и равенство (28) по разделении обеих его частей на $\sin\Pi(p)$ принимает вид

$$\cot\Pi(p)=\cot\Pi(p)\cos\Pi(a)+\cos\Pi(\partial)\sin\Pi(a).$$

С другой стороны, из прямоугольного треугольника ADP, в виду соотношений (27), имеем:

$$\cot \Pi(p) = \cot \Pi(c) \sin \Pi(c) = \cos \Pi(c).$$

Следовательно,

$$\cos \Pi(c) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(a) + \cos \Pi(\partial) \sin \Pi(a).$$

Отсюда

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(\partial) \sin \Pi(a)}{1 - \cos \Pi(a)} = \cos \Pi(\partial) \cot {}^1/_2\, \Pi(a).$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a) = \frac{\cos \Pi(\partial)}{\cos \Pi(c)}. \qquad (\mathrm{XII}_1)$$

Основание трапеции a выражено таким образом через боковые стороны. Мы найдем еще соотношение, связывающее верхнее основание прямоугольной трапеции с боковыми ее сторонами. С этой целью заметим прежде всего, что (XII_1) дает:

$$\cos \Pi(a) = \frac{\cos^2 \Pi(c) - \cos^2 \Pi(\partial)}{\cos^2 \Pi(c) + \cos^2 \Pi(\partial)},$$

$$\sin \Pi(a) = \frac{2 \cos \Pi(c) \cos \Pi(\partial)}{\cos^2 \Pi(c) + \cos^2 \Pi(\partial)}.$$

Теперь формула (XI_1) даст:

$$\sin \Pi(b) = \frac{2 \sin \Pi(c) \sin \Pi(\partial) \cos \Pi(\partial) \cos \Pi(c)}{\cos^2 \Pi(c) + \cos^2 \Pi(\partial) - 2 \cos^2 \Pi(c) \cos^2 \Pi(\partial)} =$$

$$= \frac{2 \sin \Pi(c) \sin \Pi(\partial) \cos \Pi(\partial) \cos \Pi(c)}{\cos^2 \Pi(c) \sin^2 \Pi(\partial) + \cos^2 \Pi(\partial) \sin^2 \Pi(c)} = \frac{2 \cot \Pi(c) \cot \Pi(\partial)}{\cot^2 \Pi(c) + \cot^2 \Pi(\partial)};$$

$$\cos \Pi(b) = \frac{\cot^2 \Pi(c) - \cot^2 \Pi(\partial)}{\cot^2 \Pi(c) + \cot^2 \Pi(\partial)}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(b) = \frac{1 - \cos \Pi(b)}{\sin \Pi(b)} = \frac{\cot \Pi(\partial)}{\cot \Pi(c)}$$

или, в силу основного соотношения (IX),

$$\cot \Pi(\partial) = \cot \Pi(c) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(b) = \cot \Pi(c)\, e^{-\frac{b}{k}}. \qquad (\mathrm{XII}_2)$$

И это соотношение получает широкое применение в развитии гиперболической геометрии. Здесь же мы воспользуемся им для того, чтобы доказать давно уже высказанное утверждение, что две постоянные, к которым приводит гиперболическая геометрия, совпадают. С этой целью построим между параллелями DC и AB предельные дуги $DD' (= s)$ и $CC' (= s')$, имеющие эти параллели своими осями. Так как

$$s = k \cot \Pi(c), \quad s' = k \cot \Pi(\partial),$$

то соотношение (XII_2) дает

$$s' = se^{-\frac{b}{k}}.$$

Соотношение же, установленное в „Геометрических исследованиях“ (предл. 33 и к нему примеч. [22]), дает:

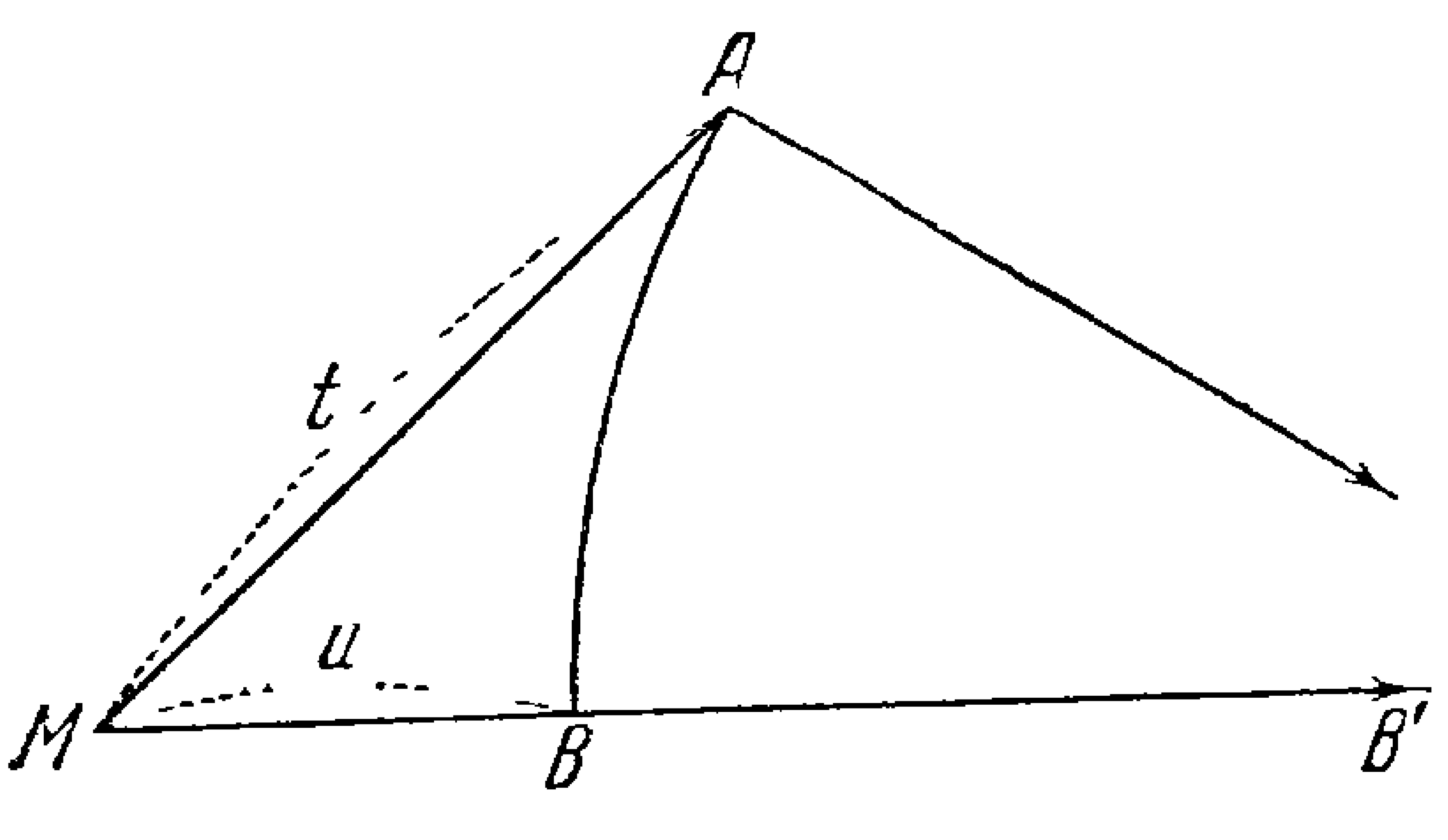
$$s' = se^{-\frac{b}{\varkappa}},$$

следовательно,

$$\varkappa = k.$$

VII. ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЙ ВЫВОД ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Постановка задачи. Тригонометрические уравнения гиперболической плоскости выведены Лобачевским при помощи стереометрических соображений. Именно, основные уравнения получены на основе того факта, что геометрия предельной поверхности совпадает с геометрией Евклида. Между тем эти соотношения чисто планиметрические, и совершенно естественно искать вывод их средствами самой гиперболической геометрии, не возвращаясь к геометрии Евклида и не обращаясь к геометрии пространства. Эта задача была разрешена Либманом. В 1907 г. он поместил в „Известиях Лейпцигского ученого общества“ мемуар, содержащий планиметрический вывод гиперболической тригонометрии, не опирающийся на геометрию Евклида;[1] этот вывод в дальнейшей обработке изложен им во втором издании его „Неевклидовой геометрии“,[2] которое по сравнению с первым представляет собой глубоко переработанное сочинение. Этому пути следуют авторы, составившие изложения неевклидовой геометрии после Либмана — М. Симон[3] и А. Успен-



Черт. 27.

[1] H. Liebmann. Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, Berichte der Gesellschaft der Wiss. Leipzig, 1907.

[2] H. Liebmann. Nichteuklidische Geometrie. 2-e neubearbeitete Auflage. Leipzig und Berlin, 1912.

[3] M. Simon. Nichteuklidische Geometrie. Leipzig und Berlin, 1925.

ский;[1] их изложения представляют собой варианты построения Либмана. Изложению этого построения гиперболической геометрии посвящено настоящее приложение.

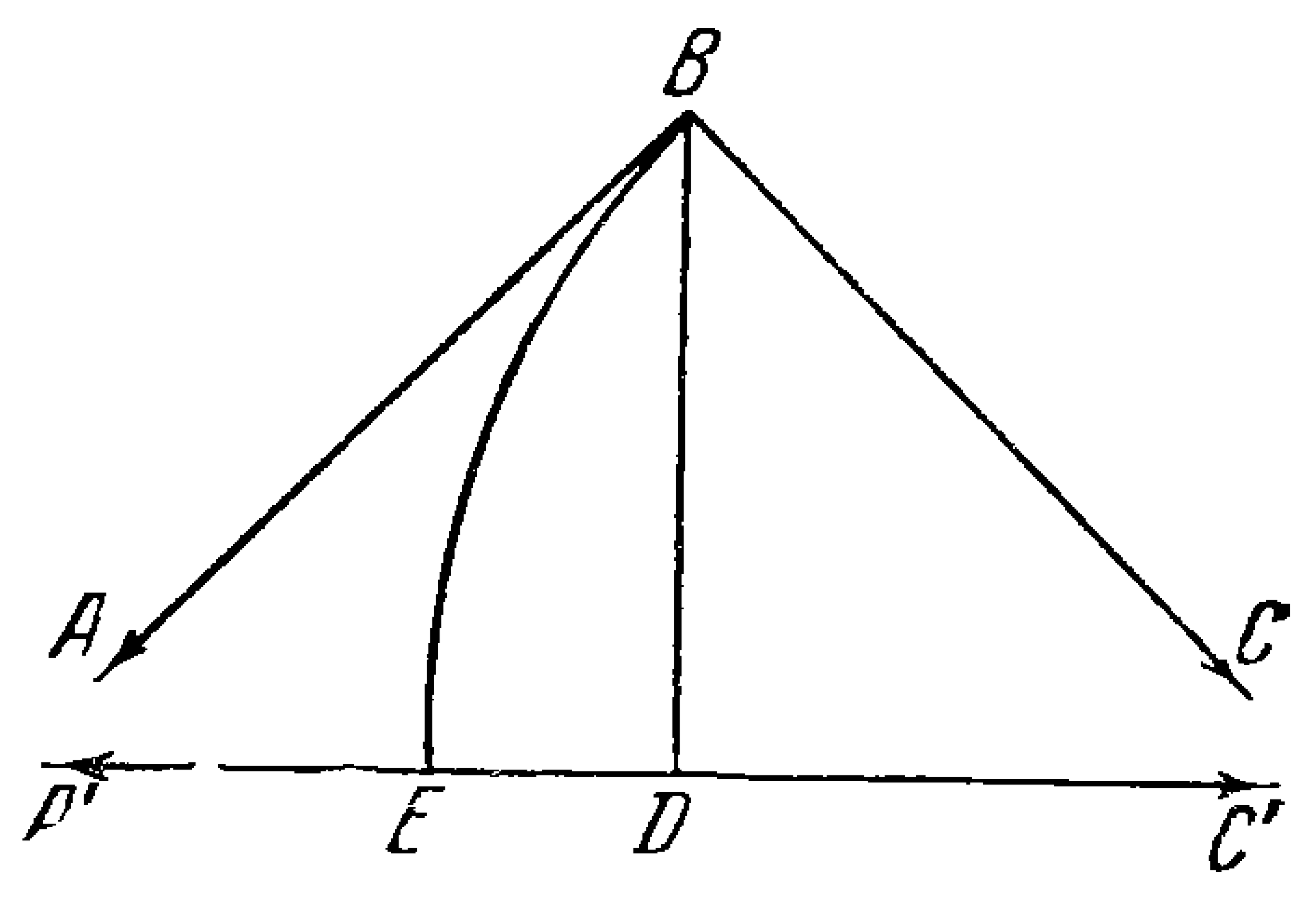
2. Тангенциальное и нормальное расстояния точки от предельной линии. Точкой отправления всех этих построений служит соотношение между предельными дугами, установленное Лобачевским („Г. И“., предл. 33 и прим. [22]), которое мы теперь можем писать в виде

$$s' = se^{-\frac{x}{k}}. \tag{29}$$

Здесь s и s' — длины двух параллельных предельных дуг (т. е. содержащихся между двумя общими осями), k — расстояние между ними по оси. Это соотношение выведено чисто планиметрически, без помощи евклидовой геометрии. К нему присоединяется очень важное уравнение, установленное Либманом в указанном выше мемуаре; оно требует некоторой подготовки.

Из точки M, лежащей на касательной AM, к предельной линии в точке A (черт. 27) проведена ось этой предельной MBB', которая встречает ее в точке B. Длину отрезка MA будем называть *тангенциальным расстоянием* точки M от предельной AB и будем обозначать, следуя Либману, через t; расстояние MB будем называть *нормальным расстоянием* точки M от предельной линии. Если дано расстояние t, то, отложив его на касательной AM и проведя из конечной точки M ось MB', построим отрезок $MB = u$; таким образом, u есть функция t; уравнение, связывающее u и t, и есть формула Либмана, которую нам предстоит вывести.

3. Тангенциальное и нормальное протяжения предельной дуги. В предыдущей рубрике мы исходили от точки M, заданной на касательной AM к предельной линии; из точки M мы проводили ось MBB' и при помощи ее определяли точку B и дугу AB (черт. 27). Положим теперь обратно, что нам дана предельная дуга AB. В одной из ее конечных точек A проводим касательную AM,



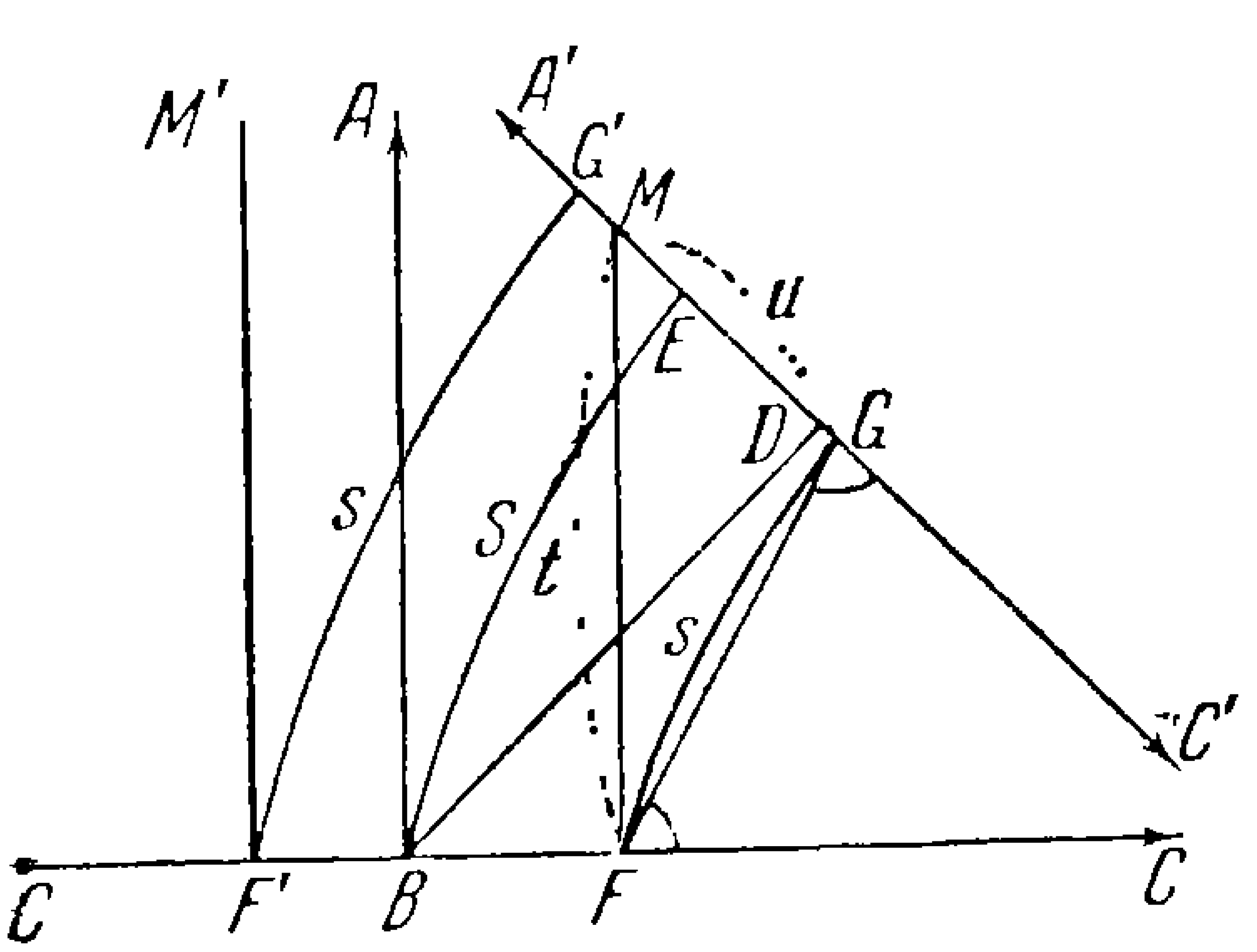
Черт. 28.

а в другой ее конечной точке B — нормаль, т. е. ось кривой BB'. Предположим, что касательная и нормаль пересекаются в некоторой точке M. Рассматривая теперь те же отрезки AM и BM, построенные по данной дуге AB, мы будем называть длину t отрезка AM *тангенциальным протяжением дуги* AB, а длину u отрезка BM — *нормальным протяжением дуги* AB. Длины

[1] А. Успенский. Введение в неевклидову геометрию. Петроград, 1922

*

t и u получают, таким образом, несколько различные названия в зависимости от того, строим ли мы по ним дугу AB, или по дуге AB строим отрезки AM и BM. Однако в последнем случае возникает вопрос, встречает ли ось BB' касательную AM. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо возвратиться к некоторым соображениям предыдущего предложения, именно к гиперболической постоянной. К постоянной k гиперболического пространства нас привело выше исследование предельной поверхности; но самое определение ее по существу выполнено чисто планиметрически. В рубрике 2 приложения III было показано, что MB (черт. 13) есть постоянная дуга; именно, это есть предельная дуга, высотой которой служит отрезок параллельности, соответствующий углу в 45° (черт. 14). Сообразно этому дуга эта строится следующим образом (черт. 28). Прямой угол ABC делится пополам и на биссектрисе BD откладывается отрезок параллельности BD, соответствующий углу в 45°. Если из точки D восставим перпендикуляр $A'C'$ к биссектрисе, то он в сторону DA' будет параллелен прямой $\overrightarrow{BA}$, а в сторону DC' будет параллелен прямой $\overrightarrow{BC}$. Предельная дуга BE, имеющая осями прямые BC и $A'C'$ и идущая от точки B к оси $A'C'$, и есть та постоянная дуга, о которой идет речь. Следуя Либману, будем обозначать эту дугу через S. Длину ее мы прежде обозначали через $\varkappa$; сохраняя обозначение S, мы имеем в виду отметить, что речь идет не столько о числе, сколько о постоянной предельной дуге. Возвратимся теперь к черт. 28, который здесь для отчетливости воспроизводим в другом положении (черт. 29). ABC есть тот же прямой угол; прямая $A'C'$ параллельна BC в сторону $\overrightarrow{A'C'}$ и параллельна BA в сторону $\overrightarrow{C'A'}$; BE есть та же дуга S. Пусть FG будет предельная дуга s, параллельная BE и заключенная между теми же осями. Из точки F восставим перпендикуляр FM к прямой BC; он будет служить касательной к дуге FG; вопрос заключается в том, встречает ли он ось $A'C'$. Так как эта ось служит заградительной прямой по отношению к углу ABC, то перпендикуляр FM пересекает ее, если точка F лежит на стороне BC этого угла, и не пересекает ее, если точка F (F') лежит на продолжении BC этой стороны. В первом случае $s < S$, во втором $s > S$. Приходим к следующему выводу.

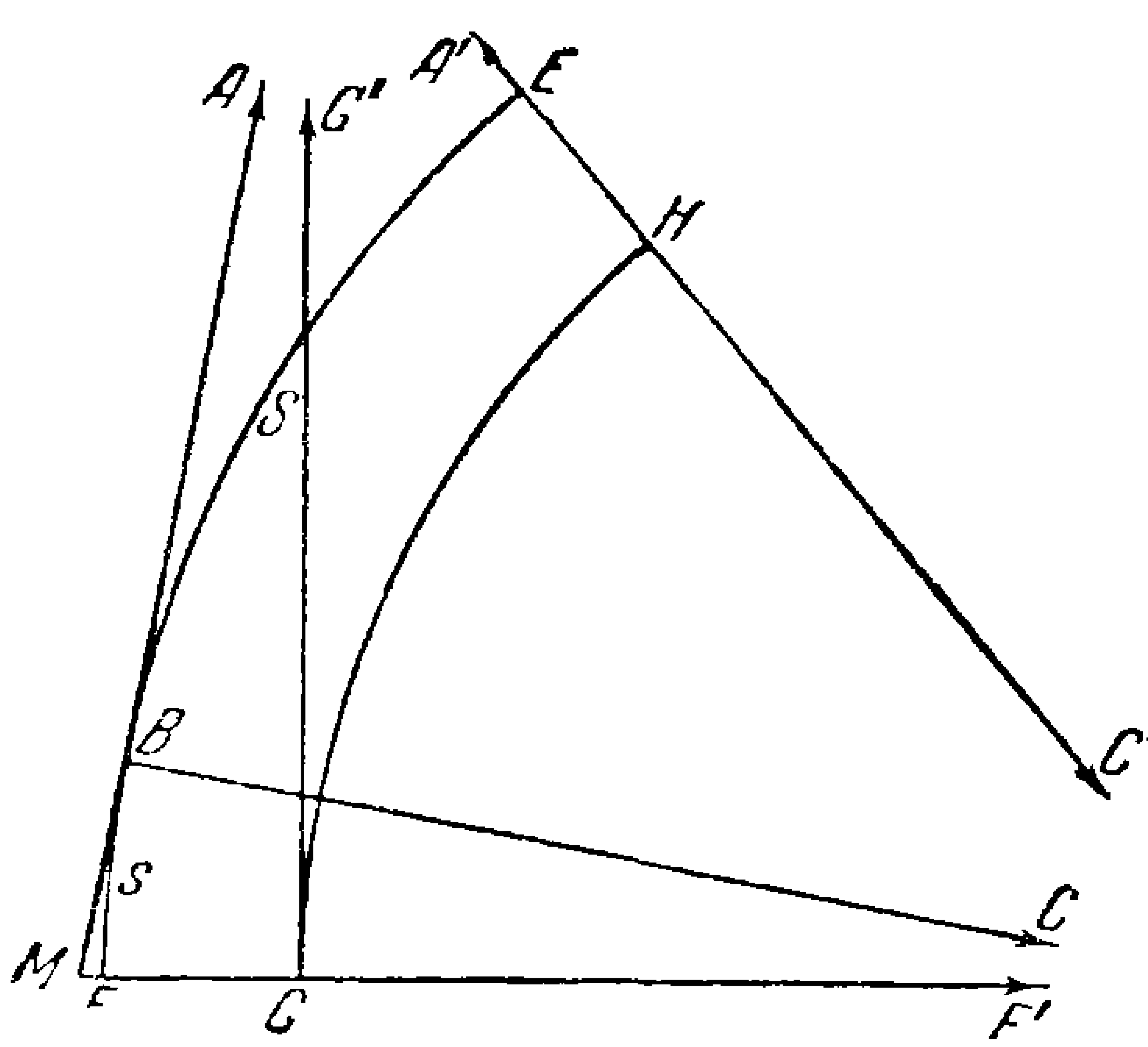


Черт. 29.

Теорема. Для того чтобы касательная в одном конце предельной дуги s встречала ось, проходящую через другой ее *конец, необходимо и достаточно, чтобы дуга s была меньше постоянной дуги S.*

Если пересечение имеет место, то MF есть тангенциальное протяжение t, а MG — нормальное протяжение u предельной дуги FG. Легко видеть, что $u < t$. В самом деле, хорда FG образует с осями FC и GC' равные острые углы; следовательно, угол FGM тупой, а потому $FM > MG$, т. е. $t > u$. Ясно также, что длины t и u вполне определяются дугой s.

4. Уравнение Либмана. Построим вновь прямой угол ABC с его заградительной прямой $A'C'$ (черт. 30) и с предельной дугой $BE = S$, проходящей между осями BC и $A'C'$; BA есть касательная к этой дуге. Продолжим дугу BE за точку B до точки F так, чтобы дуга BF $(= s)$ была меньше BE. Согласно предыдущей теореме, касательная BA по продолжении в другую сторону встретит ось FF' той же предельной в некоторой точке M; MB есть тангенциальное протяжение (t), MF — нормальное протяжение (u) предельной дуги BF. От точки M отложим по оси MFF' отрезок $MG = MB$ $(= t)$ и из точки G восставим перпендикуляр GG' к GF' в ту сторону, с которой расположены оси BC и EC'. Так как $MF' \parallel BC$, то $\angle BMG = \Pi(t)$; так как, с другой стороны, $MG = MB$, то тот же угол можно рассматривать как $\Pi(MG)$, а потому $GG' \parallel MA \parallel C'A'$. Прямая $C'A'$ будет также заградительной для прямого угла $F'GG'$, а проходящая между ними предельная дуга GH, параллельная дуге FBE, также есть S. Расстояние между дугами FE и GH по оси есть $FG = t - u$. Поэтому формула (29) дает

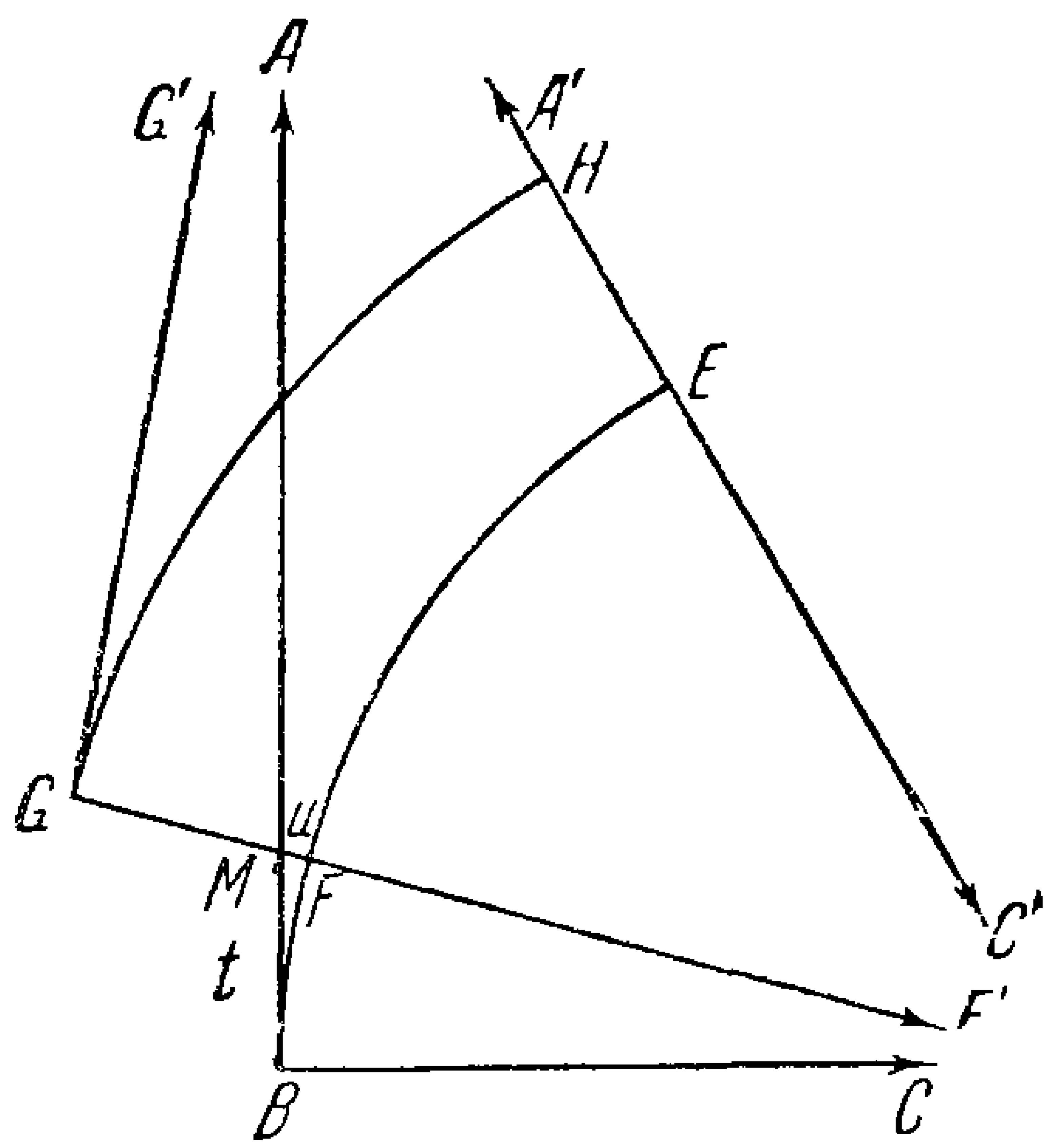


Черт. 30.

$$S + s = Se^{\frac{t-u}{k}}. \tag{30}$$

Теперь вновь возвратимся к прямому углу ABC, его заградительной прямой $A'C'$ (черт. 31) и предельной дуге $BE = S$. На этой дуге отложим ту же дугу s; так как $s < S$, то конец F отложенной дуги упадет между B и E; проведем ось FF'. В силу теоремы предыдущей рубрики, продолжение оси FF' встретит касательную BA в некоторой точке M, причем отрезки BM и MF будут иметь те же значения t и u, что и прежде, так как они дугой s вполне определяются. На продолжении отрезка MF отложим отрезок

$MG = MB = t$ и из точки G восставим перпендикуляр GG' к GF в ту же сторону, с которой расположена заградительная прямая $A'C'$. Так как $\angle BMF = \Pi(MB)$, то $\angle AMG = \Pi(MG)$; поэтому $GG' \parallel MA$. Та же прямая $A'C'$ может быть рассматриваема, как заградительная для прямого угла $G'GF'$, а предельная дуга GH, параллельная FE, есть S. Расстояние между дугами GH и FE равно $t+u$; а потому уравнение (29) дает:



Черт. 31.

$$S = (S - s)\, e^{\frac{t+u}{k}}. \qquad (31)$$

Уравнения (30) и (31) по существу содержат только отношение $\frac{S}{s}$. Исключая это отношение из двух уравнений, получим

$$e^{\frac{t-u}{k}} + e^{-\frac{t+u}{k}} = 2$$

или

$$e^{\frac{u}{k}} = \frac{e^{\frac{t}{k}} + e^{-\frac{t}{k}}}{2} = \operatorname{ch}\frac{t}{k}. \qquad (\mathrm{XIII}_1)$$

5. *Уравнение, связывающее длину предельной дуги с ее высотой.* Из формулы (XIII_1) вытекают дальнейшие выводы. Прежде всего, если в уравнение (31) вместо $e^{\frac{u}{k}}$ подставим выражение (XIII_1), то после простого вычисления получим:

$$s = S\,\frac{e^{\frac{t}{k}} - e^{-\frac{t}{k}}}{e^{\frac{t}{k}} + e^{-\frac{t}{k}}} = S\operatorname{th}\left(\frac{t}{k}\right) \qquad (s < S). \qquad (\mathrm{XIII}_2)$$

Это уравнение выражает длину предельной дуги через ее тангенциальное протяжение. Так как $\operatorname{th}\left(\frac{t}{k}\right) < 1$, то эта формула имеет место только при $s < S$. Оно и естественно: она выведена из формулы (31), которая предполагает $s < S$: тангенциальное протяжение имеет только дуга, меньшая S. Но отсюда можно получить другую формулу, имеющую место для всякой предельной дуги. Чтобы ее установить, возьмем произвольную предельную дугу AB (черт. 32) с осями AA' и BB' и высотой BC. Из точки C между теми же осями AA' и BB' проведем предельную дугу CD. Пусть s и s' будут длины дуг AB и CD. Дуга s' неизбежно меньше S, ибо касательная CB в одном ее конце и ось BB' в другом ее конце пересекаются; BC и BD суть соответствующие значения t и u для дуги CD $(=s')$. Так как в то же время u есть расстояние между предельными дугами AB (s) и CD (s') по общей оси, то по (29)

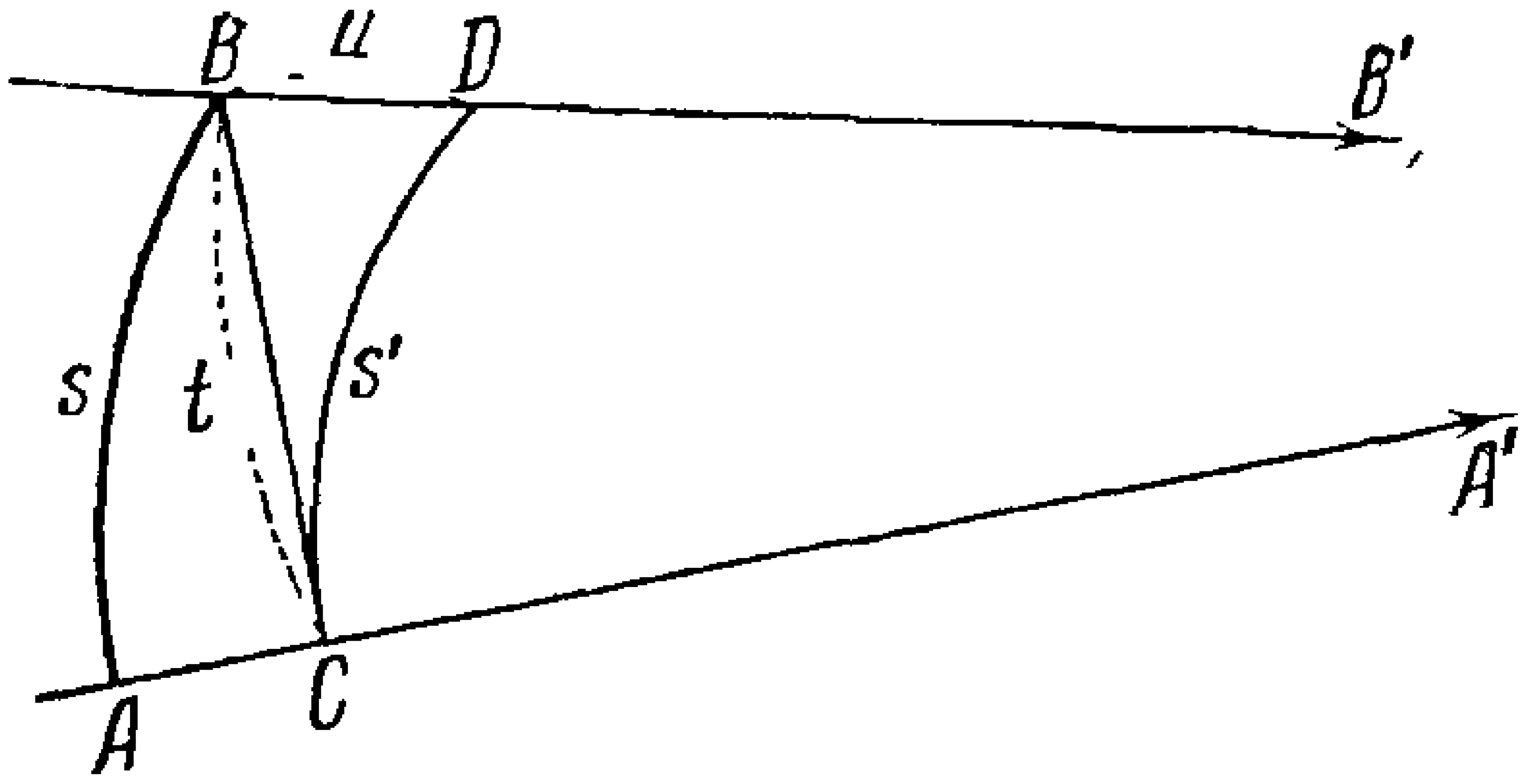
$$s=s'e^{\frac{u}{k}}, \tag{32}$$

а в силу формулы ($XIII_2$), которую здесь применяем к дуге s',

$$s'=S\operatorname{th}\left(\frac{t}{k}\right). \tag{33}$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство (32) и учитывая формулу Либмана ($XIII_1$), получим:

$$s=S\operatorname{sh}\left(\frac{t}{k}\right). \tag{34}$$



Черт. 32.

Здесь t означает длину отрезка BC, который для дуги s служит высотой; чтобы это отметить, заменим здесь t через h и тогда получим:

$$s=S\operatorname{sh}\left(\frac{h}{k}\right). \tag{35}$$

Совершенно тем же приемом, которым мы пользовались в конце приложения VI, установим, что длина дуги S равна k, так что формулы (33) и (35) можно писать в таком виде:

$$s'=k\operatorname{th}\left(\frac{t}{k}\right), \qquad s=k\operatorname{sh}\left(\frac{h}{k}\right). \tag{$XIII_3$}$$

Первая из них выражает длину предельной дуги через ее тангенциальное протяжение (когда таковое существует), вторая — длину предельной дуги через ее высоту; эта последняя формула имеет место для всякой предельной дуги.

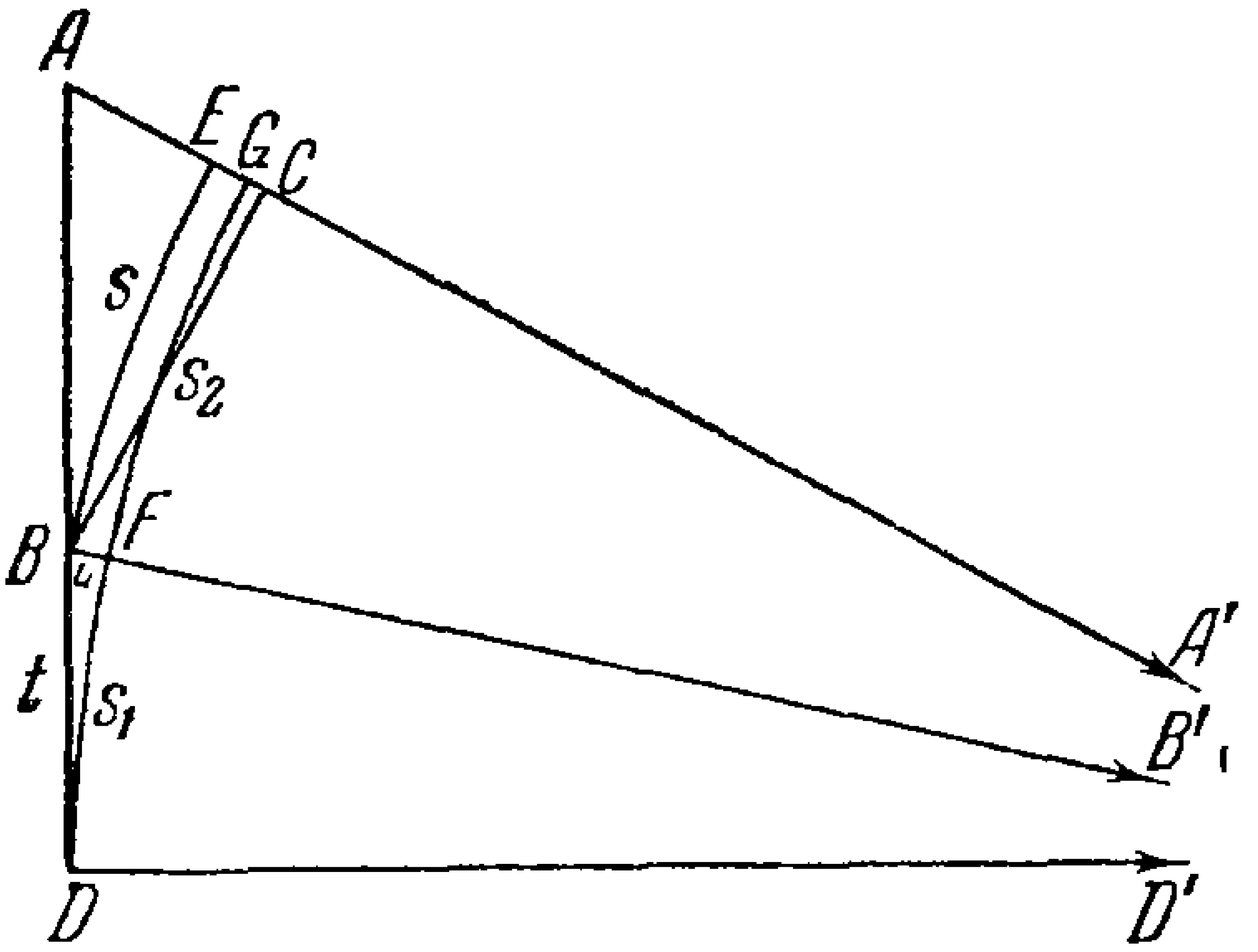
6. *Планиметрический вывод двух уравнений тригонометрии прямоугольного треугольника.* Припомним, что Лобачевский в „Геометрических исследованиях“ (предл. 34) выражает острые углы A и B прямоугольного треугольника в линейной мере; он вводит два отрезка α и β, для которых

$$\Pi(\alpha)=A, \qquad \Pi(\beta)=B,$$

и в качестве основных элементов прямоугольного треугольника пользуется отрезками a, b, c, α, β; любые два из них определяют прямоугольный треугольник. Вместе с тем Лобачевский в „Г. И.“

составил уравнения прямоугольного треугольника, пользуясь этим линейным заданием элементов. Лобачевский достигает этого стереометрическими средствами. Но два из этих уравнений можно получить очень просто планиметрически; они выводятся непосредственно из уравнения Либмана.

Пусть ABC прямоугольный треугольник с элементами a, b, c, α, β. На AB от вершины A отложим отрезок $AD=a$. Конец его D может попасть либо за точку B, либо между A и B, либо в точку B. Начнем с первого случая (черт. 33). Из точки D восставим к AD перпендикуляр DD', который, в силу определения отрезка a, будет параллелен AA'. Из вершины B проведем луч BB', параллельный AA' и DD', и предельную дугу BE с осями AA' и BB'. Через точку же D проведем предельную дугу DFG с теми же осями; последняя разделяется на две части $DF=s_1$ и $FG=s_2$; дугу BE обозначим через s.



Черт. 33.

Теперь заметим прежде всего, что длины отрезков BD и BF суть тангенциальное (t) и нормальное (u) расстояния точки B от предельной дуги DF. Поэтому, согласно формуле ($XIII_2$),

$$s_1=S\operatorname{th}\left(\frac{t}{k}\right)=S\operatorname{th}\frac{a-c}{k}. \tag{36}$$

Таким же образом AD и AG суть тангенциальное и нормальное расстояния точки A от дуги $DG\,(=s_1+s_2)$. Поэтому

$$s_1+s_2=S\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right). \tag{37}$$

Далее, дуга $BE\,(=s)$ имеет высотой сторону a нашего треугольника. Поэтому (35)

$$s=S\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right). \tag{38}$$

Наконец, дуга $FG\,(=s_2)$ параллельна дуге BE, поэтому (32)

$$s_2=se^{-\frac{u}{k}}. \tag{39}$$

В силу же уравнения Либмана,

$$e^{\frac{u}{k}}=\operatorname{ch}\left(\frac{t}{k}\right)=\operatorname{ch}\frac{a-c}{k}, \tag{40}$$

и потому [(38) и (40)]

$$s_2 = S\,\mathrm{sh}\left(\frac{a}{k}\right) : \mathrm{ch}\,\frac{a-c}{k}. \tag{41}$$

Подставляя выражения (36) и (41), вместо s_1 и s_2, в уравнение (37), по умножении обеих частей на $\mathrm{ch}\,\frac{a-c}{k}$, получим

$$\mathrm{sh}\,\frac{a-c}{k} + \mathrm{sh}\left(\frac{a}{k}\right) = \mathrm{th}\left(\frac{a}{k}\right)\mathrm{ch}\,\frac{a-c}{k};$$

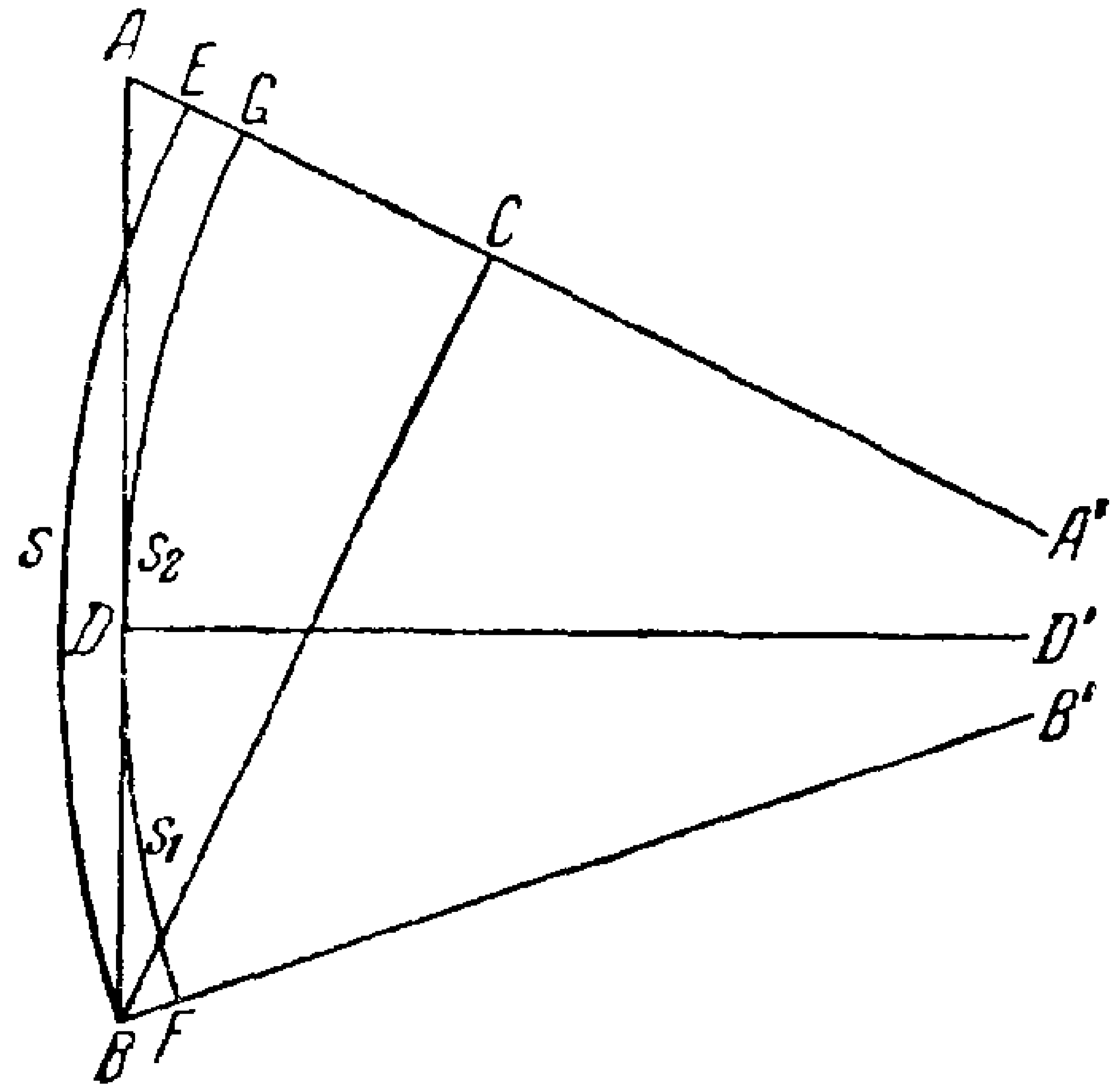
умножив же обе части на $\mathrm{ch}\,\frac{a}{k}$, легко приведем ее к виду:

$$\mathrm{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\mathrm{ch}\,\frac{a-c}{k} - \mathrm{sh}\,\frac{a-c}{k}\,\mathrm{ch}\left(\frac{a}{k}\right) = \mathrm{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right),$$

или, по теореме сложения гиперболических функций,

$$\mathrm{sh}\left(\frac{c}{k}\right) = \mathrm{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right). \tag{XIV$_1$}$$

Таково своеобразное уравнение, связывающее катет и противоположный ему острый угол прямоугольного треугольника с гипотенузой. Как видим, оно выведено чисто планиметрическими средствами на основе уравнения Лобачевского (29) и уравнения Либмана (XIII$_1$).



Черт. 34.

Изложенный вывод предполагает $a > c$. В случае $a < c$ делается аналогичное построение; мы, однако, подробно приведем доказательство. Если на гипотенузе AB отложим отрезок $AD = a$ (черт. 34), то теперь конец его падает между A и B. И в этом случае проводим прямую DD', перпендикулярную к AB, и прямую $BB' \parallel DD'$; три прямые AA', BB', DD' параллельны друг другу. Теперь строим предельные дуги с этими осями: GDF через точку D и BE через точку B. Тогда BD $(=t)$ и BF $(=u)$ суть тангенциальное и нормальное протяжения дуги DF; обозначим ее длину через s_1, а длину всей дуги FDG — через s_2, так что $DG = s_2 - s_1$; вместе с тем дугу BE обозначим через s. Тогда формула (XIII$_2$) дает:

$$s_1 = S\,\mathrm{th}\left(\frac{t}{k}\right) = S\,\mathrm{th}\,\frac{c-a}{k}. \tag{42}$$

С другой стороны, так как $BF = u$ есть расстояние между параллельными дугами BE и FG, то по формуле (32)

$$s_2 = s e^{-\frac{u}{k}}. \tag{43}$$

Далее, так как катет a служит высотой предельной дуги BE, то по формуле ($XIII_3$) или (35)

$$s = S\operatorname{sh}\frac{a}{k}; \tag{44}$$

по формуле же Либмана ($XIII_1$), примененной к тангенциальному (t) и нормальному (u) протяжениям дуги DF

$$e^{\frac{u}{k}} = \operatorname{ch}\frac{t}{k} = \operatorname{ch}\frac{c-a}{k}. \tag{45}$$

Подставляя выражения (44) и (45) в равенство (43), получаем:

$$s_2 = S\operatorname{sh}\frac{a}{k} : \operatorname{ch}\frac{c-a}{k}. \tag{46}$$

Наконец, так как тангенциальным протяжением дуги DG служит длина α отрезка AD, то

$$DG = s_2 - s_1 = S\operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{k}\right).$$

Подставляя сюда, вместо s_2 и s_1, выражения (46) и (42), по умножении на $\operatorname{ch}\frac{c-\alpha}{k}$ получим:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right) - \operatorname{sh}\frac{c-\alpha}{k} = \operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{k}\right)\operatorname{ch}\frac{c-\alpha}{k};$$

по умножении же обеих частей на $\operatorname{ch}\frac{\alpha}{k}$ получим:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right)\operatorname{sh}\frac{c-\alpha}{k} + \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{k}\right)\operatorname{ch}\frac{c-\alpha}{k},$$

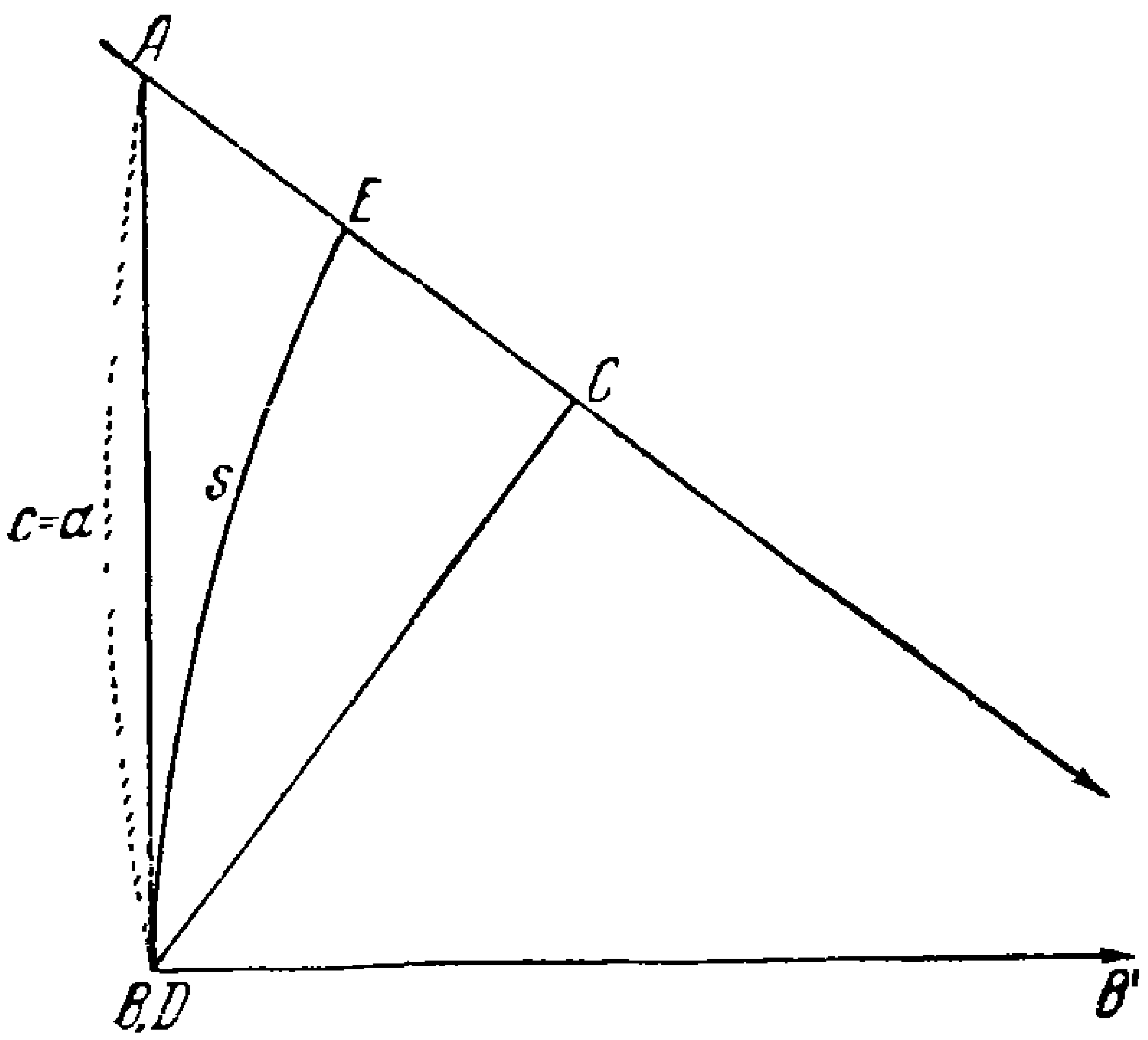
или иначе:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right) = \operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right);$$

в этом случае мы приходим к уравнению (XIV_1).

Остается рассмотреть случай, когда $\alpha = c$, так что при предыдущем построении точка D падает в точку B (черт. 34a). В этом случае $A = \Pi(\alpha) = \Pi(c)$. Поэтому перпендикуляр BB', восставленный из вершины B треугольника ABC к гипотенузе AB, параллелен AC. Если из точки B проведем предельную дугу BE с осями BB' и AC и обозначим ее длину через s, то по формуле ($XIII_3$)

$$s = S\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right).$$



Черт. 34а.

С другой стороны, так как c есть тангенциальное протяжение этой дуги, то по формуле ($XIII_2$)

$$s = S\,\mathrm{th}\left(\frac{c}{k}\right)$$

и потому

$$\mathrm{th}\left(\frac{c}{k}\right) = \mathrm{sh}\left(\frac{a}{k}\right).$$

Но при $\alpha = c$ это совпадает с равенством (XIV_1), которое, таким образом, установлено для всех случаев.

Совершенно ясно, что таким же образом можно вывести аналогичное уравнение

$$\mathrm{sh}\left(\frac{c}{k}\right) = \mathrm{sh}\left(\frac{b}{k}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right). \qquad (XIV_2)$$

7. *Латентные уравнения прямоугольного треугольника.* Таким образом, два уравнения тригонометрии прямоугольного треугольника установлены планиметрическими средствами. Они выражены при линейном задании всех пяти элементов треугольника. Нужно, однако, получить полную систему уравнений и показать, что они совпадают с уравнениями (III_{1-10}). Так как независимых уравнений должно быть три, то естественно было прежде всего получить третье уравнение. Однако получить третье уравнение такими же прямыми геометрическими соображениями, какими получены уравнения ($XIV_{1,2}$), не удавалось; для этого нужно было найти особенные пути. Такая же задача стояла уже перед Лобачевским, и он, получив сначала (стереометрическими средствами) два уравнения, искал приема получения полной системы тригонометрических уравнений прямоугольного треугольника. И этот прием был Лобачевским найден. Он показал, что существование прямоугольного треугольника влечет за собой существование другого прямоугольного треугольника, определенным образом связанного с первым („Г. И.“, предл. 35 и прим. [26]). Применяя найденные уже уравнения к этому второму треугольнику, он получил остальные уравнения. Однако и этот переход от одного прямоугольного треугольника к другому основан на стереометрических соображениях; его нужно, следовательно, модифицировать. Точкой отправления служат уравнения прямоугольного треугольника в том своеобразном виде, в каком они первоначально даны Лобачевским. В предложении 36 Лобачевский устанавливает, что элементы a, b, c, α, β прямоугольного треугольника связаны соотношениями

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta), \qquad (XV_1)$$

$$\Pi(a) = \Pi(\beta) + \Pi(c + \alpha), \qquad (XV_2)$$

$$\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \Pi(c - \beta), \qquad (XV_3)$$

$$\Pi(\beta) + \Pi(a) = \Pi(c - \alpha). \qquad (XV_4)$$

Эти уравнения выведены Лобачевским планиметрически. Однако они существенно отличаются от уравнений (III) и особенно от уравнений (X). В то время как при помощи уравнений (X) при данном k по трем элементам можно действительно вычислить остальные элементы треугольника, этого при помощи уравнений (XV) сделать нельзя; аналитические соотношения скрыты в функции $\Pi(x)$, которая в новом порядке идей, т. е. планиметрически, еще не разыскана. Уравнения этого типа целесообразно называть *латентными*. К четырем латентным уравнениям (XV_{1-4}), выведенным в „Геометрических исследованиях", Лобачевский в другом своем сочинении („Новые начала геометрии") присоединяет еще два, которые мы здесь выведем.

С этой целью отложим по стороне BC прямоугольного треугольника ABC отрезок $BD=\beta$ (черт. 35). Перпендикуляр DD' к BD в сторону гипотенузы параллелен BA. Далее, на продолжении катета AC за точку A отложим отрезок $AE=\alpha$, перпендикуляр EE' к AE в сторону AA' также параллелен AA' и потому $EE' \parallel DD'$. Если теперь проведем луч CC', параллельный DD' и EE', то равенство

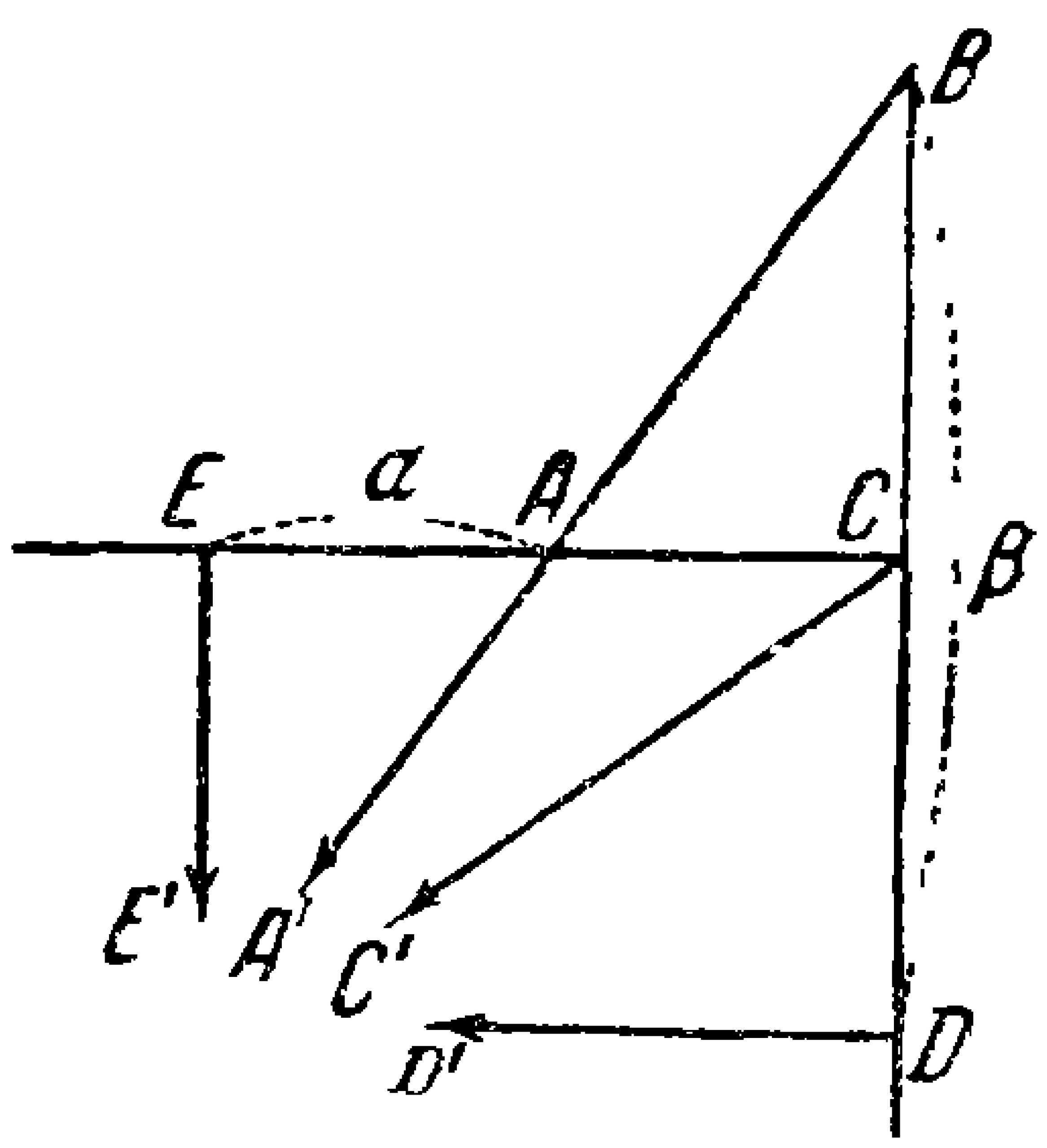
$$\angle ACD = \angle ACC' + \angle C'CD$$

можно написать так:

$$\Pi(b+\alpha)+\Pi(\beta-a)=d, \qquad (XV_5)$$

и таким же образом

$$\Pi(a+\beta)+\Pi(\alpha-b)=d. \qquad (XV_6)$$



Черт. 35.

Чтобы использовать эти латентные уравнения, необходимо воспользоваться дополнительными отрезками.

Из шести уравнений (XV) получаем две системы независимых уравнений следующим образом. Уравнения (XV_1) и (XV_3) разрешим относительно $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(b)$; получим

$$2\Pi(\alpha)=\Pi(c-\beta)-\Pi(c+\beta), \qquad (XVI_1)$$

$$2\Pi(b)=\Pi(c-\beta)+\Pi(c+\beta). \qquad (XVI_2)$$

Уравнение же (XV_5) напишем в виде

$$\Pi(\beta-a)=d-\Pi(\alpha+b). \qquad (XVI_3)$$

Если прямоугольный треугольник задан гипотенузой c и острым углом B, выраженным отрезком β, то уравнения (XVI_1) и (XVI_2) определяют по ним катет b и угол $A(\alpha)$, а уравнение (XVI_3) — второй катет a. Транспонируя катеты a и b, а вместе с тем α и β, получаем три аналогичных уравнения

$$2\Pi(\beta)=\Pi(c-\alpha)-\Pi(c+\alpha), \qquad (XVI_4)$$

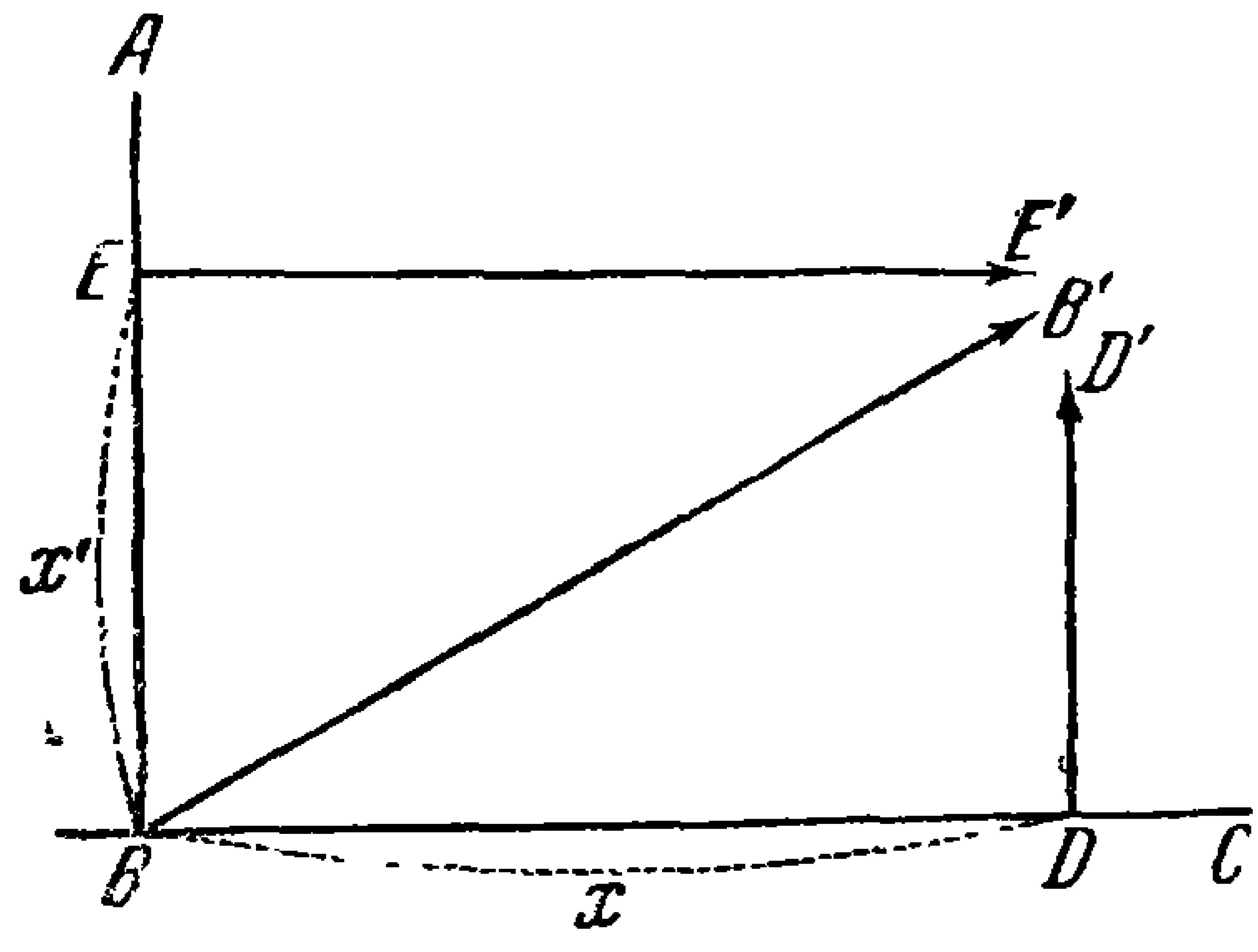
$$2\Pi(a)=\Pi(c-\alpha)+\Pi(c+\alpha), \qquad (XVI_5)$$

$$\Pi(\alpha-b)=d-\Pi(\beta+a). \qquad (XVI_6)$$

8. *Дополнительные отрезки.* В „Геометрических исследованиях“ Лобачевский устанавливает для каждого отрезка x так называемый *дополнительный отрезок* x', связанный с ним равенством („Г. И“., предл. 35)

$$\Pi(x)+\Pi(x')=d. \quad (47).$$

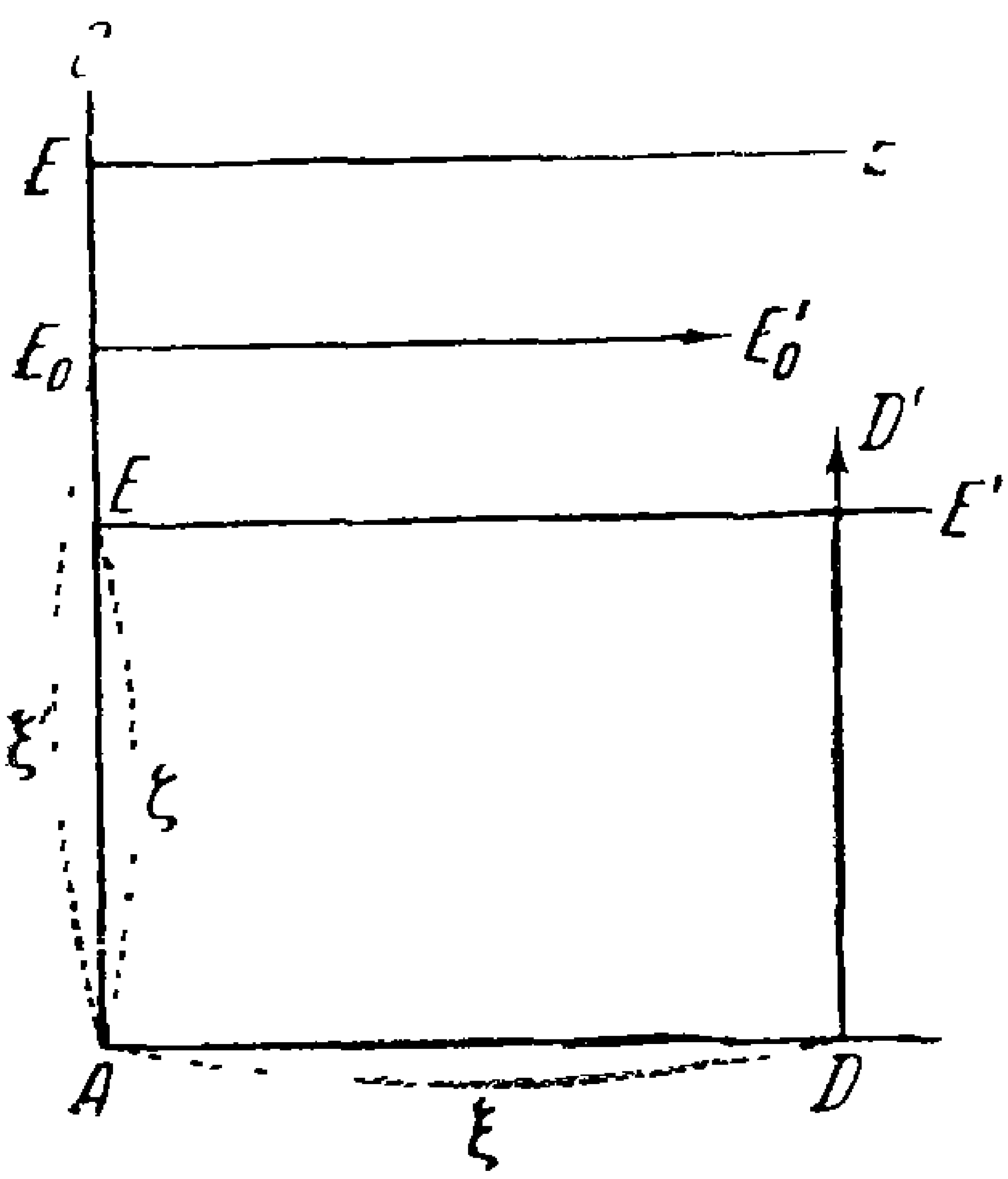
Это приводит к следующему предложению.



Черт. 36.

Теорема. *Если на сторонах прямого угла ABC отложим от вершины* (черт. 36) *дополнительные отрезки $BD=x$, $BE=x'$, то перпендикуляры DD' и EE' к сторонам этого угла, восставленные из концов этих отрезков и обращенные внутрь угла, параллельны друг другу.*

Чтобы в этом убедиться, проводим луч BB', параллельный DD'. Тогда $\angle B'BD=\Pi(x)$, а потому $\angle B'BE=\Pi(x')$; следовательно, $EE' \parallel DB' \parallel DD'$.



Черт. 37.

Совершенно ясно, что и обратно, если перпендикуляры EE' и DD' параллельны, то x и x' суть дополнительные отрезки.

В тесной связи с этим находится следующий вопрос, с которым систематически приходится встречаться в дальнейшем развитии гиперболической геометрии.

Из точек D и E на сторонах прямого угла DAE (черт. 37) восставлены к ним перпендикуляры DD' и EE'; в каком случае эти перпендикуляры пересекаются? Обозначим отрезки AD и AE через ξ и ζ; пусть $AE_0=\xi'$ будет отрезок, дополнительный к ξ. Тогда перпендикуляры DD' и E_0E_0' параллельны. Если точка E лежит ниже E_0, то перпендикуляр EE' пересекает DD'; если же точка E лежит выше E_0, то пересечение не имеет места. Таким образом, если $\zeta=\xi'$, так что

$$\Pi(\zeta)+\Pi(\xi)=d, \quad (48)$$

то пересечение происходит в бесконечно удаленной точке. Если $\zeta<\xi'$, так что

$$\Pi(\zeta)+\Pi(\xi)>d, \quad (49)$$

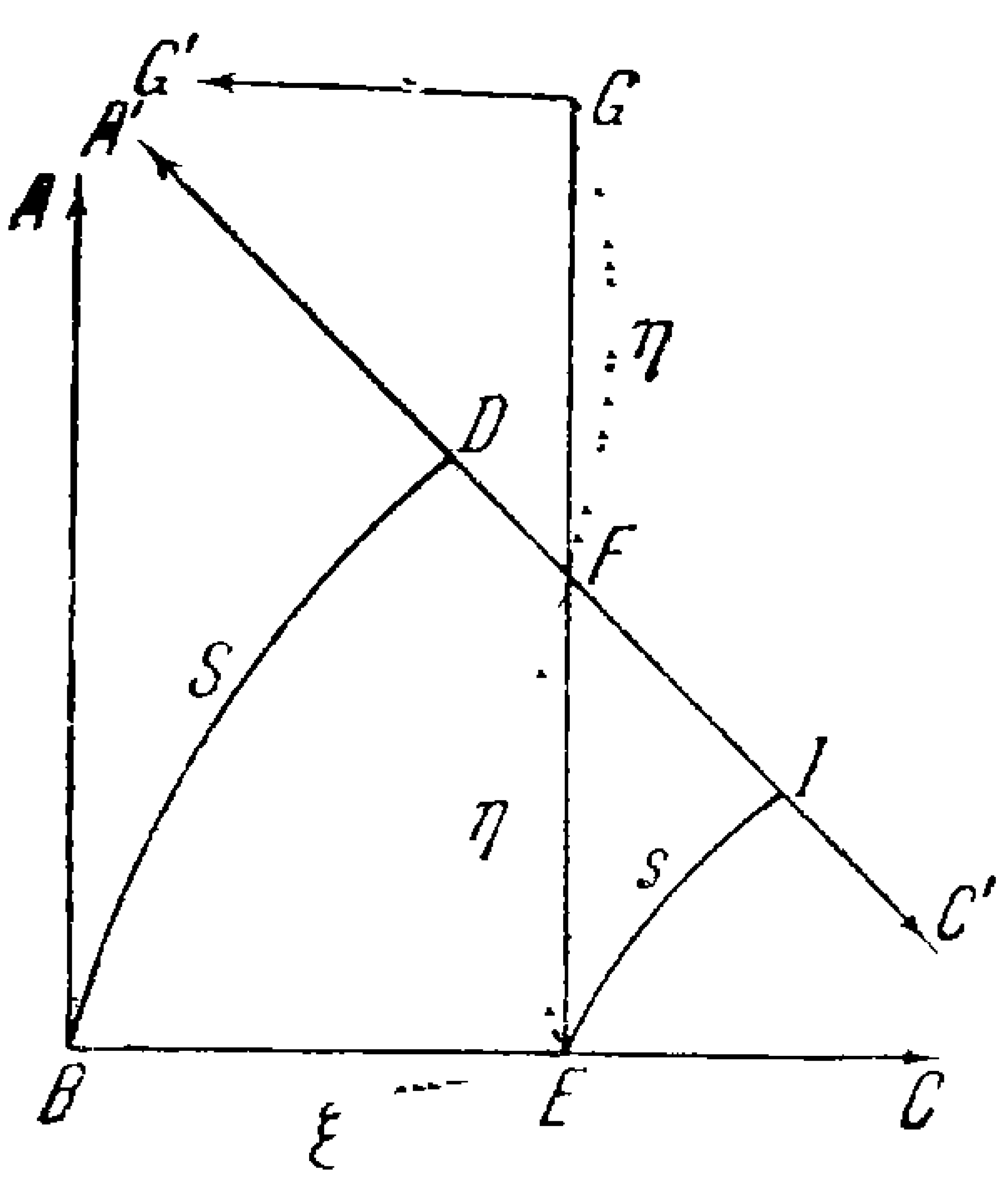
то пересечение имеет место в конечной точке. Если же $\zeta > \xi'$, так что

$$\Pi(\zeta) + \Pi(\xi) < d, \tag{50}$$

то пересечения нет.

9. *Аналитическое выражение соотношения, связывающего дополнительные отрезки.* Уравнение (47), определяющее дополнительные отрезки, выражено по принятой терминологии в латентной форме, дадим ему явное аналитическое выражение.

С этой целью вновь возьмем прямой угол ABC с его заградительной прямой $A'C'$ (черт. 38). Из вершины B проведем предельную дугу BD с осями BC и $A'C'$, содержащуюся между ними; это — дуга $S (= k)$. Из произвольной точки E на стороне BC возьмем отрезок BE, который обозначим ξ; из его конца E восставим перпендикуляр EF, который встретит прямую $A'C'$ в точке F. Отрезок EF обозначим через η; продолжим его на расстояние $FG = FE = \eta$ и из точки G восставим перпендикуляр GG', обращенный в сторону FA'.



Черт. 38.

Так как $\angle EFC' = \Pi(\eta)$, то равный ему угол $A'FG$ можно рассматривать как $\Pi(FG)$. Вместе с тем перпендикуляр $GG' \parallel FA' \parallel BA$. По предыдущей теореме EB $(= \xi)$ и EG $(= 2\eta)$ суть дополнительные отрезки $(2\eta = \xi')$. Из точки E проведем предельную дугу $EI(s)$ между теми же осями EC и FC'. Тогда по формулам ($XIII_2$) и (29)

$$s = S \operatorname{th} \frac{\eta}{k} = S e^{-\frac{\xi}{k}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{th} \frac{\eta}{k} = e^{-\frac{\xi}{k}}, \text{ т. е. } \operatorname{th}\left(\frac{\xi'}{2k}\right) = e^{-\frac{\xi}{k}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{th}\left(\frac{\xi'}{k}\right) = \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{\xi'}{2k}\right)}{1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{\xi'}{2k}\right)} = \frac{2e^{-\frac{\xi}{k}}}{1 + e^{-\frac{2\xi}{k}}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\xi}{k}\right)}.$$

Таким образом, в виду взаимности дополнительных отрезков,

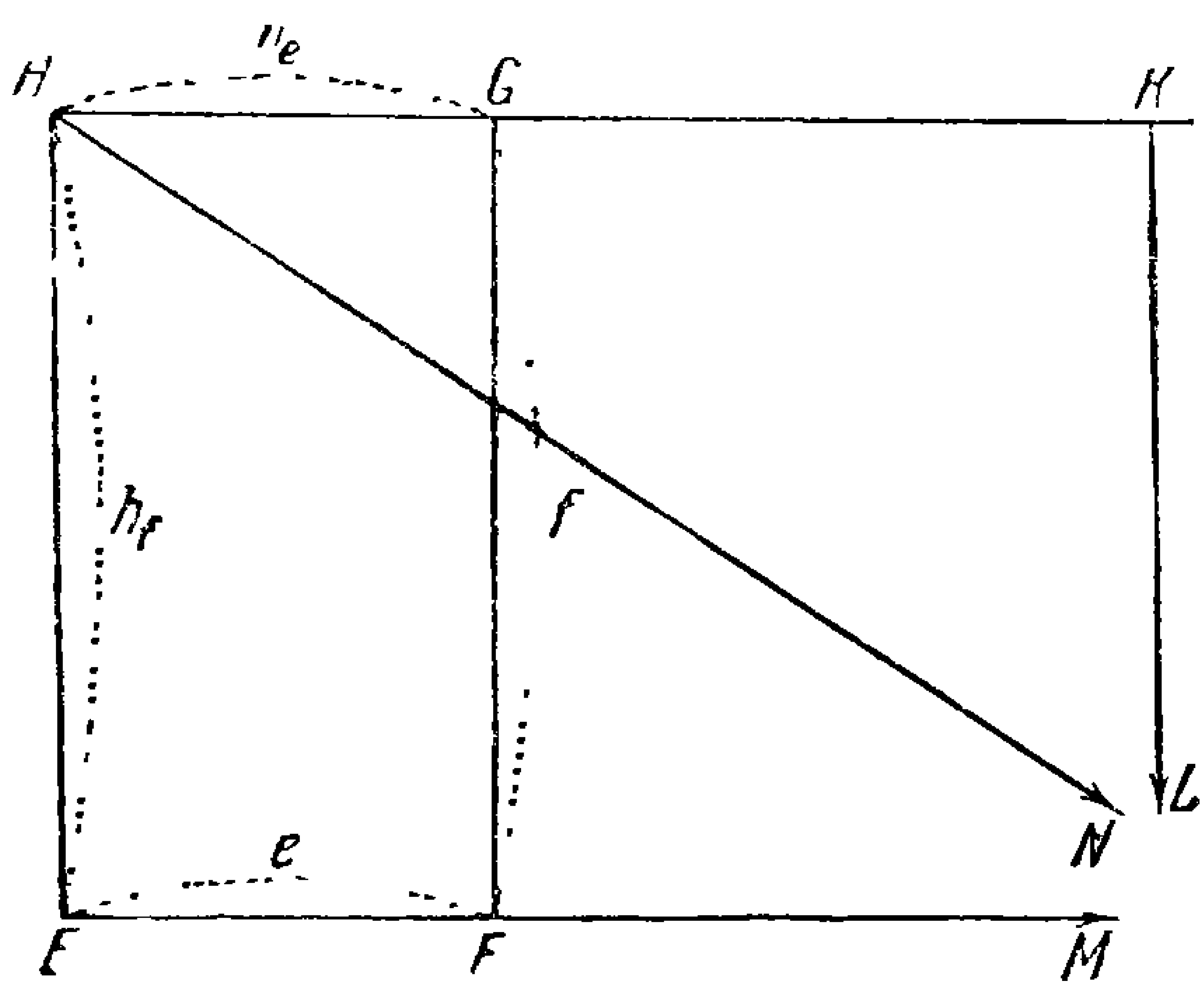
$$\operatorname{th}\left(\frac{\xi'}{k}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\xi}{k}\right) = 1, \quad \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{k}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\xi'}{k}\right) = 1, \quad \operatorname{sh}\left(\frac{\xi}{k}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\xi'}{k}\right) = 1. \tag{XVII}$$

10. *Латентные уравнения, связывающие стороны и углы четырехугольника Ламберта.* Четырехугольник Ламберта имеет пять переменных элементов (четыре стороны и острый угол) и определяется двумя из них. Эти элементы связаны уравнениями,

имеющими аналогию с латентными уравнениями (XV) прямоугольного треугольника.

Обозначим стороны четырехугольника Ламберта $EFGH$ с острым углом при вершине H по схеме, примененной выше (черт. 39), через e, f, h_e, h_f, а угол H определим соответствующим отрезком параллельности $\gamma \cdot H = \Pi(\gamma)$. На продолжении GK стороны HG отложим отрезок $GK(f')$, дополнительный к f, и из точки K восставим к GK перпендикуляр KL в сторону GF. Если FM есть продолжение стороны EF, то, по теореме рубр. 8, $KL \parallel FM$, или, что то же, $KL \parallel EM$. Если теперь проведем луч $HN \parallel EM$, то он будет также параллелен KL. Вследствие этого равенство

$$\angle NHK + \angle NHE = H$$



Черт. 39.

можно написать в таком виде:

$$\Pi(h_e + f') + \Pi(h_f) = \Pi(\gamma). \qquad (\text{XVIII}_1)$$

Это первое из требуемых уравнений. Совершенно ясно, что таким же образом можно будет вывести аналогичное уравнение

$$\Pi(h_f + e') + \Pi(h_e) = \Pi(\gamma). \qquad (\text{XVIII}_2)$$

Возвращаясь теперь к тому же четырехугольнику Ламберта $HEFG$ (черт. 40), отложим на прямой GH отрезок $GI = f'$ и из точки I восставим перпендикуляр II' к прямой GH в сторону FF'; согласно теореме рубр. 8, $II' = EF'$. Точку I мы взяли между G и H; случай, когда она падает за точку H, мы рассмотрим отдельно. Наконец, через точку H проведем луч $HH' \parallel EF'$; он будет также параллелен лучу II'. При принятом положении точки I

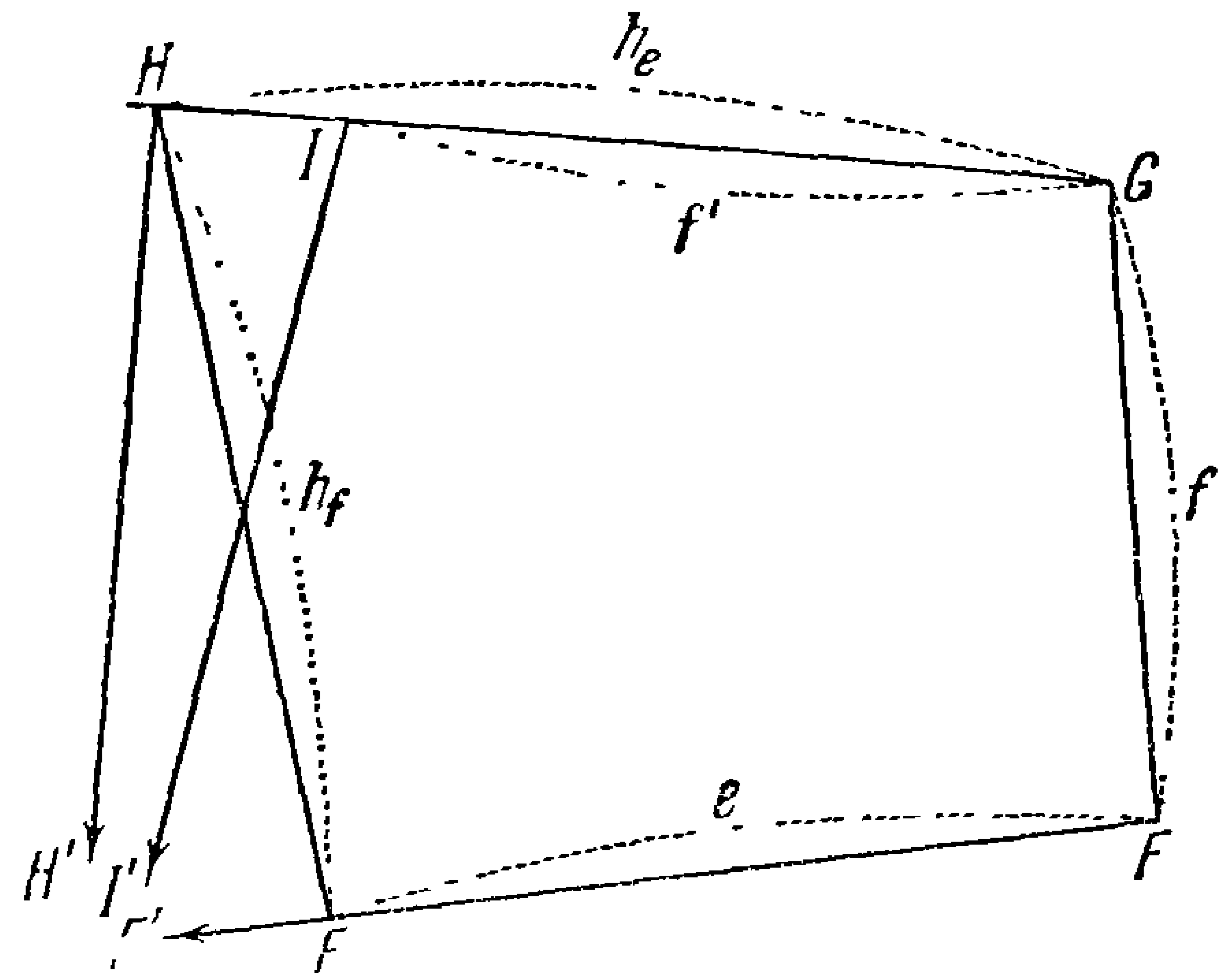
$$\angle H'HI = \angle H'HE + \angle EHI.$$

Но

$$\angle H'HE = \Pi(h_f), \quad \angle EHI = \Pi(\gamma), \quad \angle H'HI = \Pi(HI) = \Pi(h_e - f')$$

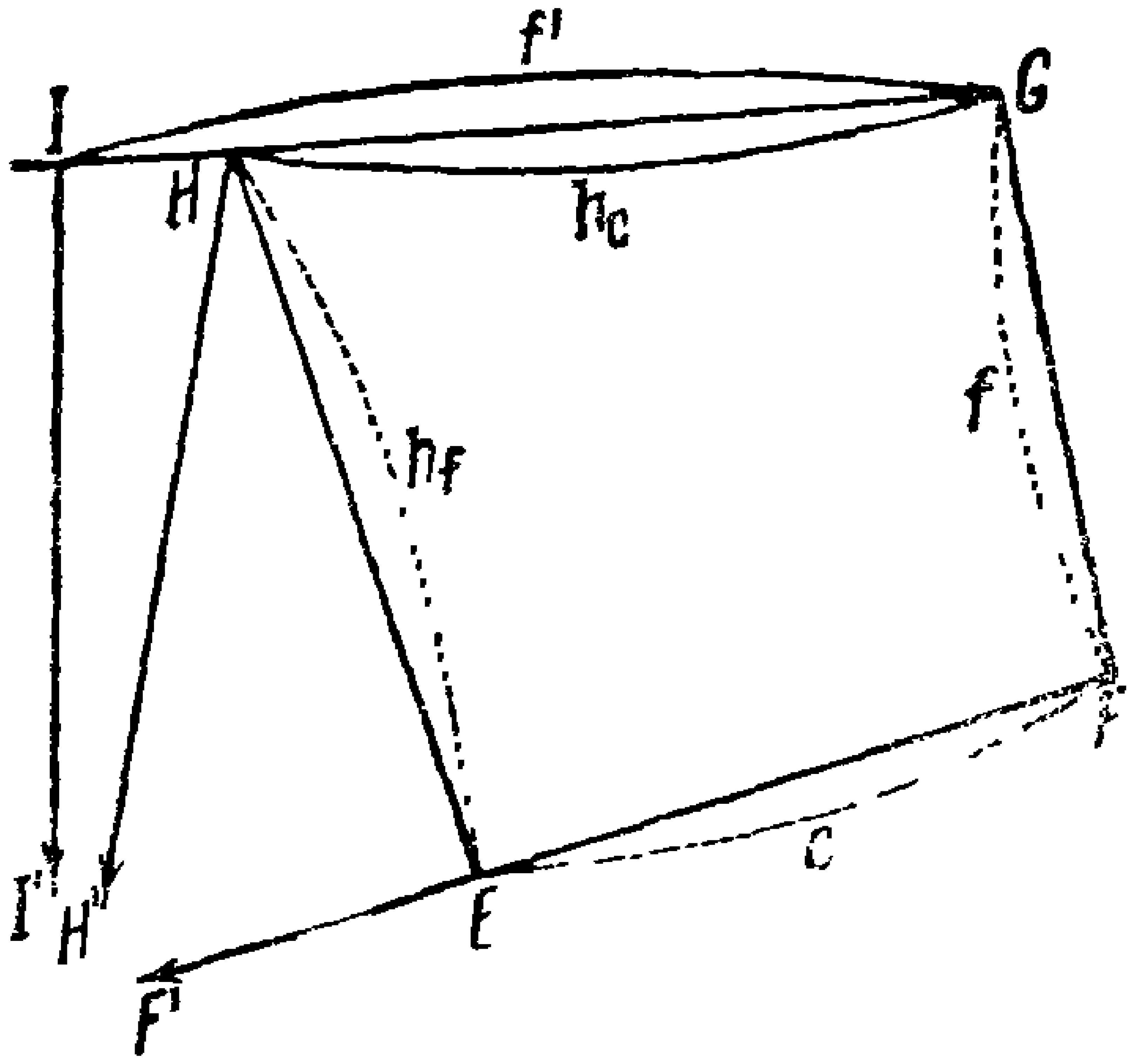
Таким образом, $\Pi(h_f)+\Pi(\gamma)=\Pi(h_e-f')$. (XVIII$_3$)

Мы получили, таким образом, еще одно соотношение, связывающее стороны и острый угол четырехугольника Ламберта, однако в предположении, что $f'<h_e$.



Черт. 40.

В случае, если $f'>h_e$, точка I упадет за точкой H (черт. 41), перпендикуляр II' расположится по другую сторону прямой HH' и теперь



Черт. 41.

$$\angle H'HG=2d-H'HI.$$

Поэтому

$$2d-\Pi(f'-h_e)=$$
$$=\Pi(h_f)+\Pi(\gamma).$$

Но, имея в виду установленное Лобачевским значение функции $\Pi(x)$ для отрицательных значений аргумента, мы и в этом случае приходим к уравнению (XVIII$_3$).

Совершенно ясно, что таким же образом мы можем получить соотношение

$$\Pi(h_e)+\Pi(\gamma)=\Pi(h_f-e'). \qquad \text{(XVIII}_4\text{)}$$

К уравнениям (XVIII$_{1-4}$) присоединим еще одну пару латентных уравнений. В том же четырехугольнике Ламберта $EFGH$ (черт. 42) на продолжении отрезка EH отложим отрезок $HI=\gamma$, так, что перпендикуляр II' к EI будет параллелен HH'. Далее, на FE отложим $FK=f'$; точка K при этом упадет за точку E, потому что $e<f$. В силу теоремы рубр. 8 перпендикуляр KK' к FK будет параллелен HH' и II'. Наконец, через точку E проведем луч EE', параллельный лучам KK' и HH'.

Равенство

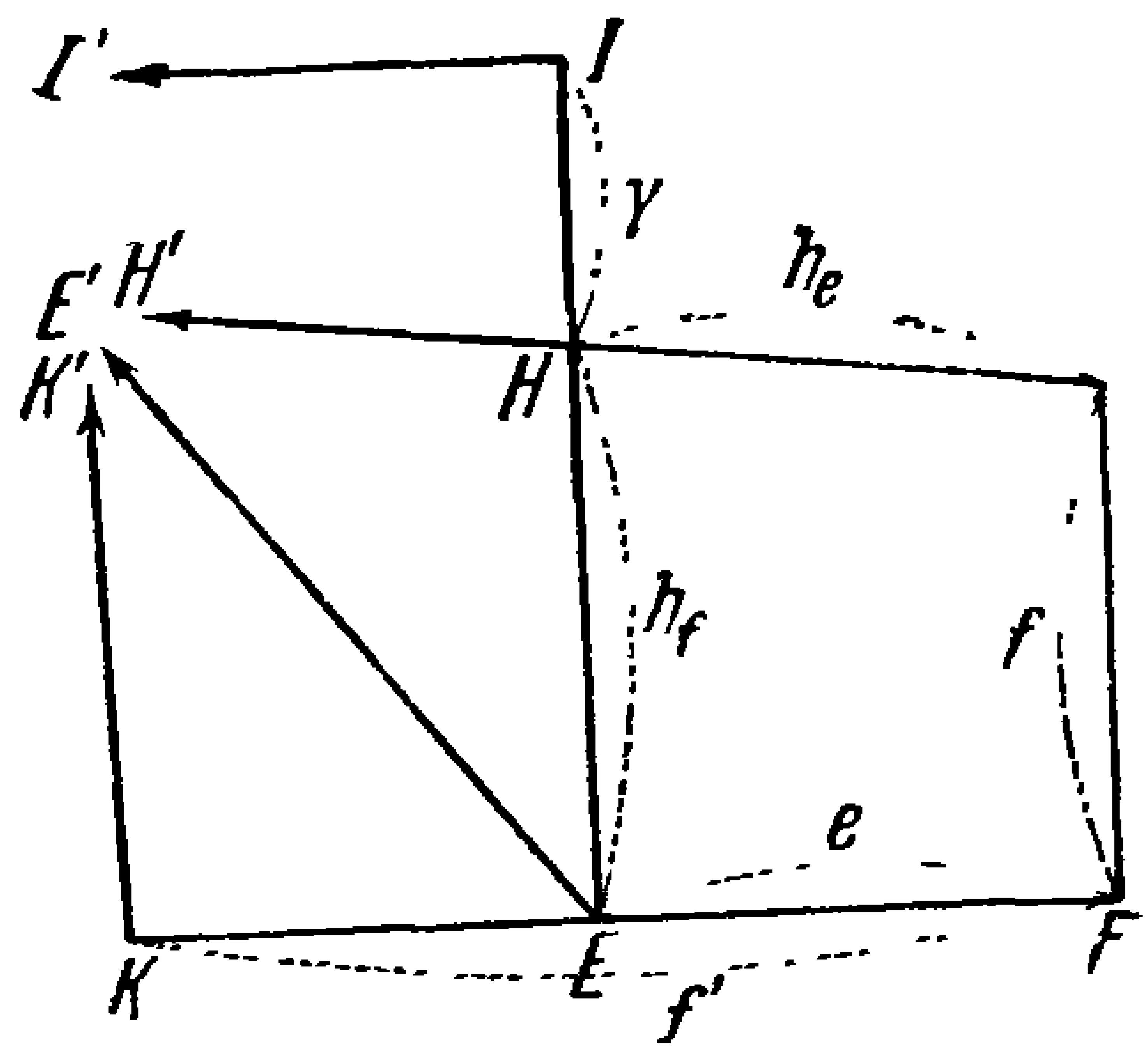
$$\angle KEE' + \angle E'EI = d$$

теперь дает:

$$\Pi(f'-e) + \\ + \Pi(h_f+\gamma) = d; \qquad (XVIII_5)$$

и совершенно так же

$$\Pi(e'-f) + \\ + \Pi(h_e+\gamma) = d. \qquad (XVIII_6)$$



Черт. 42.

Этих шести уравнений нам с избытком хватит для установления тех соотношений, которые мы имеем в виду. Мы выделим из них три независимых, как мы это делали по отношению к уравнениям (XV) прямоугольного треугольника.

Уравнения ($XVIII_1$) и ($XVIII_3$) разрешим относительно $\Pi(h_f)$ и $\Pi(\gamma)$; получим

$$2\Pi(h_f) = \Pi(h_e - f') - \Pi(h_e + f'), \qquad (XIX_1)$$

$$2\Pi(\gamma) = \Pi(h_e - f') + \Pi(h_e + f'). \qquad (XIX_2)$$

Уравнение ($XVIII_5$) напишем в таком виде:

$$\Pi(f'-e) = d - \Pi(h_f+\gamma). \qquad (XIX_3)$$

Первые два определяют h_f и γ по h_e и f', а третье по ним определяет e. Транспонируя e и f и сообразно этому также h_e и h_f, получим аналогичные три уравнения

$$2\Pi(h_e) = \Pi(h_f - e') - \Pi(h_f + e'), \qquad (XIX_4)$$

$$2\Pi(\gamma) = \Pi(h_f - e') + \Pi(h_f + e'), \qquad (XIX_5)$$

$$\Pi(e'-f) = d - \Pi(h_e+\gamma). \qquad (XIX_6)$$

Их можно получить и непосредственно из остальных трех уравнений (XVIII). Между этими уравнениями и уравнениями (XVI) прямоугольного треугольника есть явная аналогия; она дает возможность установить однозначное соответствие между прямоугольными треугольниками и четырехугольниками Ламберта.

II. Соответствие между прямоугольными треугольниками и четырехугольниками Ламберта. Прямоугольный треугольник может быть определен своей гипотенузой и острым углом. Четырехугольник Ламберта определяется одним из оснований и примыкающей к нему высотой, например при разметке предыдущей рубрики — основанием f и высотой h_e. Положим, что дан прямоугольный треугольник с элементами a, b, c, α, β, выраженными в линейной мере. Построим четырехугольник Ламберта с основанием $f=\beta'$ и высотой $h_e=c$. Уравнения (XIX) определяют остальные элементы этого четырехугольника; первые два из них дают

$$2\Pi(h_f)=\Pi(c-\beta)-\Pi(c+\beta),$$
$$2\Pi(\gamma)=\Pi(c-\beta)+\Pi(c+\beta).$$

Сопоставляя их с уравнениями прямоугольного треугольника (XVI_1) и (XVI_2), видим, что

$$h_f=\alpha, \quad \gamma=b.$$

Теперь уравнение (XIX_3) дает

$$\Pi(\beta-e)=d-\Pi(\alpha+b).$$

Сопоставляя это с уравнением (XVI_3), получим

$$\beta-e=\beta-a, \quad e=a.$$

Приходим, таким образом, к следующему предложению.

Теорема. *В гиперболической плоскости каждому прямоугольному треугольнику с элементами a, b, c, α, β, отвечает четырехугольник Ламберта с элементами*

$$e=a, \quad f=\beta', \quad h_e=c, \quad h_f=\alpha, \quad \gamma=b, \tag{51}$$

и обратно, каждому четырехугольнику Ламберта (e, f, h_e, h_f, γ) отвечает прямоугольный треугольник с элементами a, b, c, α, β, определенными равенствами (51). Совершенно так же, заменяя основание f четырехугольника Ламберта и прилежащую высоту h_e другим основанием e и высотой h_f, можно получить прямоугольный треугольник с элементами a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, в котором

$$a_1=f, \ \beta_1=e'; \ c_1=h_f, \ b_1=\gamma, \ \alpha_1=h_e. \tag{52}$$

12. Цикл Лобачевского. Положим, что нам дан прямоугольный треугольник с элементами a, b, c, α, β. Построим четырехугольник Ламберта (51), а по нему прямоугольный треугольник (52). Элементы этого последнего треугольника, таким образом, связаны с элементами исходного треугольника равенствами:

$$a_1=\beta', \ b_1=b, \ c_1=\alpha, \ \alpha_1=c, \ \beta_1=a'. \tag{XX}$$

Теорема. *Каждому прямоугольному треугольнику $\Delta(a, b, c, \alpha, \beta)$ в гиперболической плоскости отвечает другой прямоугольный треугольник $\Delta_1(a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1)$, элементы которого связаны с элементами исходного треугольника равенствами (XX).*

Теперь по треугольнику Δ_1 можно построить треугольник $\Delta_2(a_2, b_2, c_2, \alpha_2, \beta_2)$ по той же схеме (XX); получим

$$a_2 = \beta_1' = a,\ b_2 = b_1 = b,\ c_2 = \alpha_1 = c,\ \alpha_2 = c_1 = \alpha,\ \beta_2 = a'_1 = \beta.$$

Прием возвращает, таким образом, к исходному треугольнику Δ. Два треугольника Δ и Δ_1 образуют, таким образом, цикл $(\Delta\Delta_1)$, замыкающийся в самом себе. Возвращаемся теперь к уравнениям (XIV_1) и (XIV_2). Они имеют место и в применении к треугольнику Δ_1. Поэтому

$$\operatorname{sh}\frac{c_1}{k} = \operatorname{sh}\frac{a_1}{k}\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{k}, \qquad (XXI_1)$$

$$\operatorname{sh}\frac{c_1}{k} = \operatorname{sh}\frac{b_1}{k}\operatorname{ch}\frac{\beta_1}{k}. \qquad (XXI_2)$$

Заменяя же элементы треугольника Δ_1 элементами исходного треугольника по формулам (XX), получаем уравнения:

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k} = \operatorname{sh}\frac{\beta'}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}, \qquad (XIV_3)$$

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{a'}{k}. \qquad (XIV_4)$$

Им явно сопутствуют аналогичные уравнения:

$$\operatorname{sh}\frac{\beta}{k} = \operatorname{sh}\frac{\alpha'}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}, \qquad (XIV_5)$$

$$\operatorname{sh}\frac{\beta}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b'}{k}. \qquad (XIV_6)$$

Нумерация обусловливается тем, что уравнения (XIV_{3-6}) присоединяются к двум уравнениям $(XIV_{1,2})$ прямоугольного треугольника. Итак, подстановка, основанная на цикле Лобачевского, дает возможность получить из уравнений $(XIV_{1,2})$ еще два, а при повторном применении даже четыре уравнения прямоугольного треугольника. Получение из них полной системы может требовать уже только алгебраических приемов — элиминаций. Существенным здесь является то, что цикл Лобачевского установлен здесь планиметрическими средствами; иначе говоря, планиметрическими средствами получена полная система уравнений, связывающих стороны и углы прямоугольного треугольника.

13. Циклы Энгеля. Энгель в своих комментариях к мемуару Лобачевского „О началах геометрии“ установил другой цикл, который дает возможность непосредственно получить из уравнений (XIV_1) и (XIV_2) полную систему уравнений прямоугольного треугольника. Переходя от треугольника Δ к Δ_1 по схеме (XX), предварительно транспонируем в треугольнике Δ катеты a и b. Схема (XX) принимает вид:

$$(T_1)\ a_1 = a',\ b_1 = a,\ c_1 = \beta,\ \alpha_1 = c,\ \beta_1 = b'. \qquad (XX_1)$$

*

Иначе говоря, от треугольника Δ можно перейти к другому треугольнику Δ_1 по схеме (XX_1). По этой же схеме перейдем от треугольника Δ_1 к новому треугольнику Δ_2; получим:

$$(T_2)\ a_2=\alpha_1{}'=c',\ b_2=a_1=a',\ c_2=\beta_1=b',\ \alpha_2=c_1=\beta,\ \beta_2=b_1{}'=a'.$$

По той же схеме перейдем от треугольника Δ_2 к треугольнику Δ_3; получим:

$$(T_3)\ a_3=\alpha_2{}'=\beta',\ b_3=a_2=c',\ c_3=\beta_2=a',\ \alpha_3=c_2=b',\ \beta_3=b_2{}'=a.$$

Далее по той же схеме перейдем от треугольника Δ_4 к Δ_5; получим:

$$(T_4)\ a_4=\alpha_3{}'=b,\ b_4=a_3=\beta',\ c_4=\beta_3=a,\ \alpha_4=c_3=a',\ \beta_4=b_3{}'=c.$$

И, наконец, переходя от треугольника Δ_4 к Δ_5, получим:

$$(T_5)\ a_5=\alpha_4{}'=a,\ b_5=a_4=b,\ c_5=\beta_4=c,\ \alpha_5=c_4=\alpha,\ \beta_5=b_4{}'=\beta;$$

T_5 есть преобразование треугольника Δ в Δ_5. Пятый треугольник Δ_5 совпадает с исходным — цикл замкнулся. Результат сводится к тому, что каждому прямоугольному треугольнику соответствуют еще четыре треугольника, составляя с ним цикл из пяти треугольников — *цикл Энгеля*. Вместе с тем по соображениям, которыми мы руководились в предыдущей рубрике, приходим к заключению, что каждому соотношению между элементами прямоугольного треугольника сопутствуют еще четыре соотношения, — пять вместе с исходным; два уравнения (XIV_{1-2}) приводят к полной системе уравнений прямоугольного треугольника.

Подстановки, по которым переходим от треугольников Δ к Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, схематически изображаются так:

$$\begin{array}{ll} \Delta & \\ \Delta_1 & T_1 \\ \Delta_2 & T_2 \\ \Delta_3 & T_3 \\ \Delta_4 & T_4 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccc} a & b & c & \alpha & \beta \\ a' & a & \beta & c & b' \\ c' & a' & b' & \beta & a' \\ \beta' & c' & a' & b' & a \\ b & \beta' & a & a' & c \end{array} \right\| .$$

Здесь k-ая горизонталь матрицы изображает элементы, в которые переходят соответствующие элементы треугольника Δ при преобразовании T_k, т. е. при переходе к треугольнику Δ_k.

14. Уравнения прямоугольного треугольника. Теперь опять возвратимся к уравнениям (XIV_1) и (XIV_2). Если в первом из них выполним последовательно подстановки T_1, T_2, T_3, T_4, то присоединив к нему еще четыре уравнения, получим таким образом пять уравнений:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right),$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha'}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right),$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{b'}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{c'}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right),$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{a'}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{\beta'}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{b'}{k}\right),$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a'}{k}\right).$$

Эти уравнения на основе формул (XVII) освободим от акцентированных отрезков. Так, например, во втором из них $\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha'}{k}\right)$ заменим по третьей из формул (XVII) через $1:\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{k}\right)$. Эти пять уравнений примут тогда вид:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right), \tag{XXII$_1$}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right), \tag{XXII$_2$}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right), \tag{XXII$_3$}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)=\operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{k}\right), \tag{XXII$_4$}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)=\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{k}\right). \tag{XXII$_5$}$$

Таковы первые пять уравнений прямоугольного треугольника, выраженные в линейных мерах всех элементов. Нетрудно видеть, что эти уравнения переходят одно в другое при транспозиции катетов a и b. Вот почему применение тех же подстановок к уравнению (XIV$_2$), отличающемуся от (XIV$_1$) только транспозицией катетов a и b, приводит к тем же уравнениям. Чтобы получить остальные пять уравнений, дополняющие эти до полной системы, нужно одно из этих дополнительных уравнений получить алгебраическим путем. С этой целью подставим в уравнение (XXII$_2$), вместо $\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{k}\right)$ и $\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{k}\right)$, их выражения, получающиеся из уравнений (XXII$_4$ и XXII$_5$). Получаем:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right).$$

Производя здесь подстановки T_1, T_2, T_3, T_4, получим:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha'}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right),$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{b'}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{c'}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha'}{k}\right),$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a'}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{\beta'}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{c'}{k}\right),$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\beta'}{k}\right).$$

Освобождаясь же от акцентированных отрезков, получим:

$$\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right), \qquad (\mathrm{XXII}_6)$$

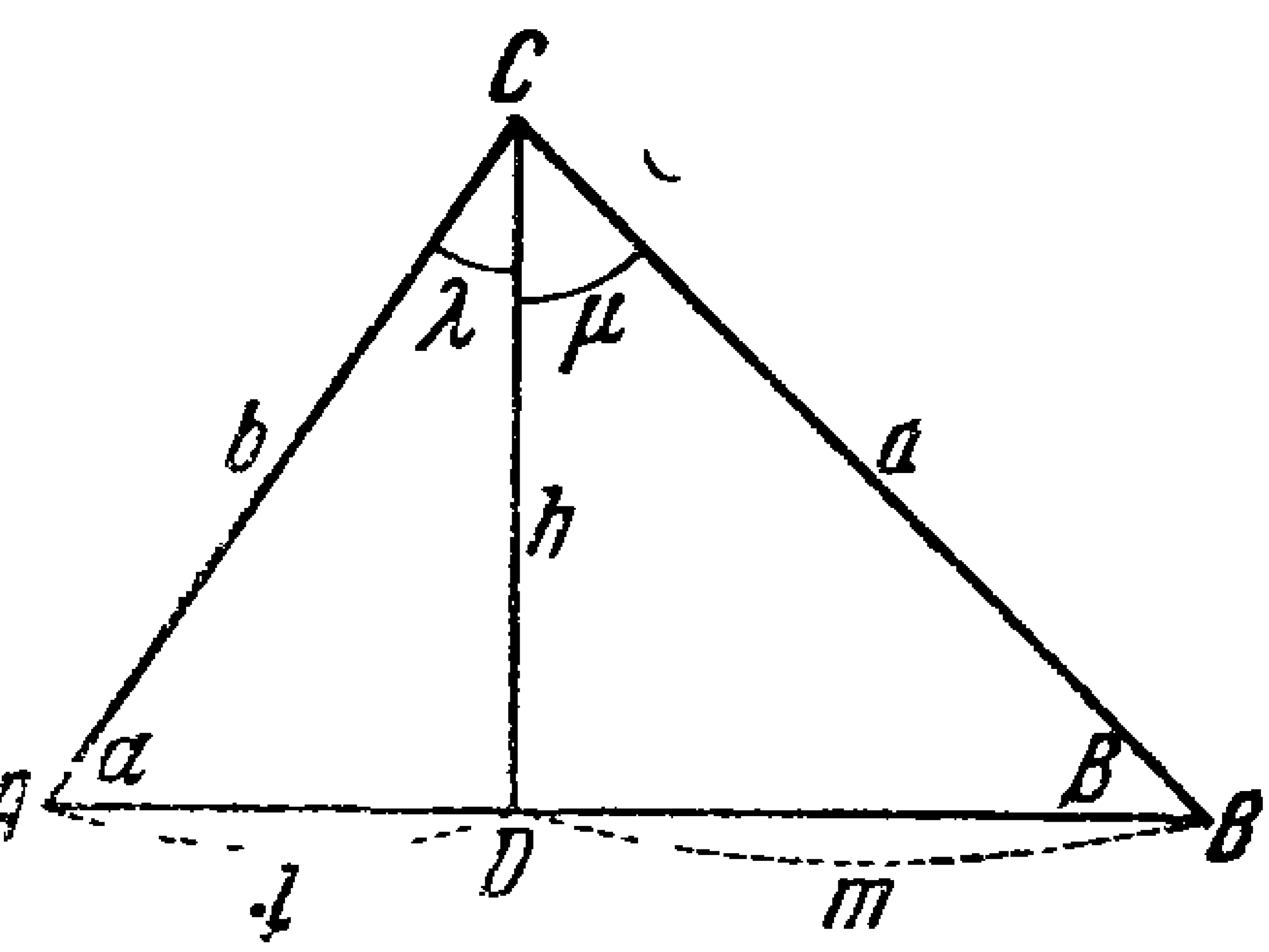
$$\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right)=\operatorname{cth}\left(\frac{\alpha}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right), \qquad (\mathrm{XXII}_7)$$

$$\operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right)=\operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right)\operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{k}\right), \qquad (\mathrm{XXII}_8)$$

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{k}\right)=\operatorname{th}\left(\frac{\beta}{k}\right)\operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right), \qquad (\mathrm{XXII}_9)$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{cth}\left(\frac{\beta}{k}\right). \qquad (\mathrm{XXII}_{10})$$

Уравнения (XXII_{1-10}) образуют полную систему уравнений прямоугольного треугольника, выраженную в линейной мере его элементов. Остается выразить эти уравнения в обыкновенной мере углов. Предварительно составим еще основные уравнения косоугольного треугольника в тех же линейных мерах.



Черт. 43.

15. *Общие уравнения прямоугольного треугольника при линейном задании его элементов.* Из вершины C треугольника ABC (черт. 43) опускаем перпендикуляр CD на основание AB. Применяя к прямоугольным треугольникам ACD и BCD уравнение (XXII_1), получаем:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{h}{k}\right)=\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right)}, \qquad \operatorname{sh}\left(\frac{h}{k}\right)=\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right)}.$$

Отсюда (и по аналогии) получаем:

$$\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma}{k}\right). \qquad (\mathrm{XXIII}_1)$$

Это своеобразная форма теоремы синусов. Теперь в силу уравнения ($XXII_6$)

$$\operatorname{ch}\left(\frac{h}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{m}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right), \qquad \operatorname{ch}\left(\frac{h}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{l}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right).$$

Исключая же отсюда $\operatorname{ch}\left(\frac{h}{k}\right)$, находим:

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{m}{k}\right)}=\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{l}{k}\right)};$$

так что

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right)=\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{l}{k}\right)}\operatorname{ch}\left(\frac{m}{k}\right)=\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{l}{k}\right)}\operatorname{ch}\left(\frac{c-l}{k}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{l}{k}\right)}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{l}{k}\right)-\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{l}{k}\right)\right]=\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)-$$

$$-\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{th}\left(\frac{l}{k}\right).$$

С другой стороны, в силу уравнения ($XXII_9$) из прямоугольного треугольника ACD, получаем

$$\operatorname{th}\left(\frac{l}{k}\right)=\operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{k}\right).$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получаем

$$\operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right)=\operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right)-\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)\operatorname{th}\left(\frac{\alpha}{k}\right). \qquad (XXIII_2)$$

Это так называемая теорема косинусов; она дает три независимых уравнения прямолинейного треугольника, к ним присоединяются уравнения ($XXIII_1$); полной системы мы здесь развертывать не будем; она выводится из этих уравнений алгебраически.

16. Отождествление уравнений (XXII) с уравнениями Лобачевского. Уравнения (XXII) и (XXIII) выведены планиметрически. Нужно показать, что они совпадают с уравнениями (III) Лобачевского. Промежуточное место между этими двумя системами занимает система (X), выраженная при помощи основного уравнения (IX) в гиперболических функциях. Приведем сначала уравнения (XXII) к виду (X), а затем уже перейдем к уравнениям (III); при этом, конечно, будем пользоваться исключительно планиметрическими средствами. Чтобы четко выяснить ход вычислений, заметим предварительно следующее. Уравнения (XXII) не могут отличаться по существу от уравнений (X); в частности, уравнение ($XXII_9$) не может отличаться от уравнения (X_9), выражающего соотношения между теми же элементами треугольника. Совпадение же этих соотношений требует, чтобы

$$\operatorname{th}\left(\frac{\beta}{k}\right)=\cos B. \qquad (53)$$

Обратно, если бы мы установили планиметрическими средствами соотношение (53), то мы обнаружили бы, что уравнение ($XXII_9$) совпадает с (X_9). Более того, уравнение (53) дает

$$\sin B = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{\beta}{k}\right)} = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right)}, \qquad \operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{k}\right)},$$

или

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{k}\right) = \cot B, \qquad \operatorname{ch}\left(\frac{\beta}{k}\right) = \frac{1}{\sin B}. \tag{54}$$

Если соотношения (53) и (54) имеют место для всякого угла, то гиперболические функции от $\frac{\alpha}{k}$ и $\frac{\beta}{k}$ выражаются в тригонометрических функциях углов A и B. Заменяя в уравнениях (XXII) гиперболические функции от $\frac{\alpha}{k}$ и $\frac{\beta}{k}$ через тригонометрические функции соответствующих углов, мы приведем систему уравнений (XXII) к системе (X); эти последние уравнения будут, таким образом, выведены планиметрическими средствами. Это мы и выполним.

Задачу установления равенства (53) Либман ставит следующим образом. Пусть X будет произвольный угол, ξ — его линейная мера, так что

$$X = \Pi(\xi). \tag{55}$$

Так как $\operatorname{th}\left(\frac{\xi}{k}\right)$ есть правильная положительная дробь, то существует один и только один угол $d \geqslant Y > 0$, для которого

$$\operatorname{th}\left(\frac{\xi}{k}\right) = \cos Y. \tag{56}$$

Если учитывать также значение $\xi = \infty$, то ему будет соответствовать значение $Y = 0$. Уравнением (56) Y определяется как однозначная функция от ξ, при этом $0 \leqslant Y \leqslant d$. А так как в силу уравнения (55) ξ есть монотонная однозначная функция от X для значений $0 \leqslant X \leqslant d$, то Y есть однозначная функция от X:

$$Y = f(X),$$

а вместе с тем

$$\operatorname{th}\left(\frac{\xi}{k}\right) = \cos f(X). \tag{57}$$

Мы приходим к такому выводу: если X есть переменный угол в пределах $0 \leqslant X \leqslant d$, ξ — его линейная мера, то существует однозначная функция $f(X)$, при которой тождественно выполняется равенство (57). Задача заключается в разыскании этой функции. Оказывается, что $f(X) = X$, так что

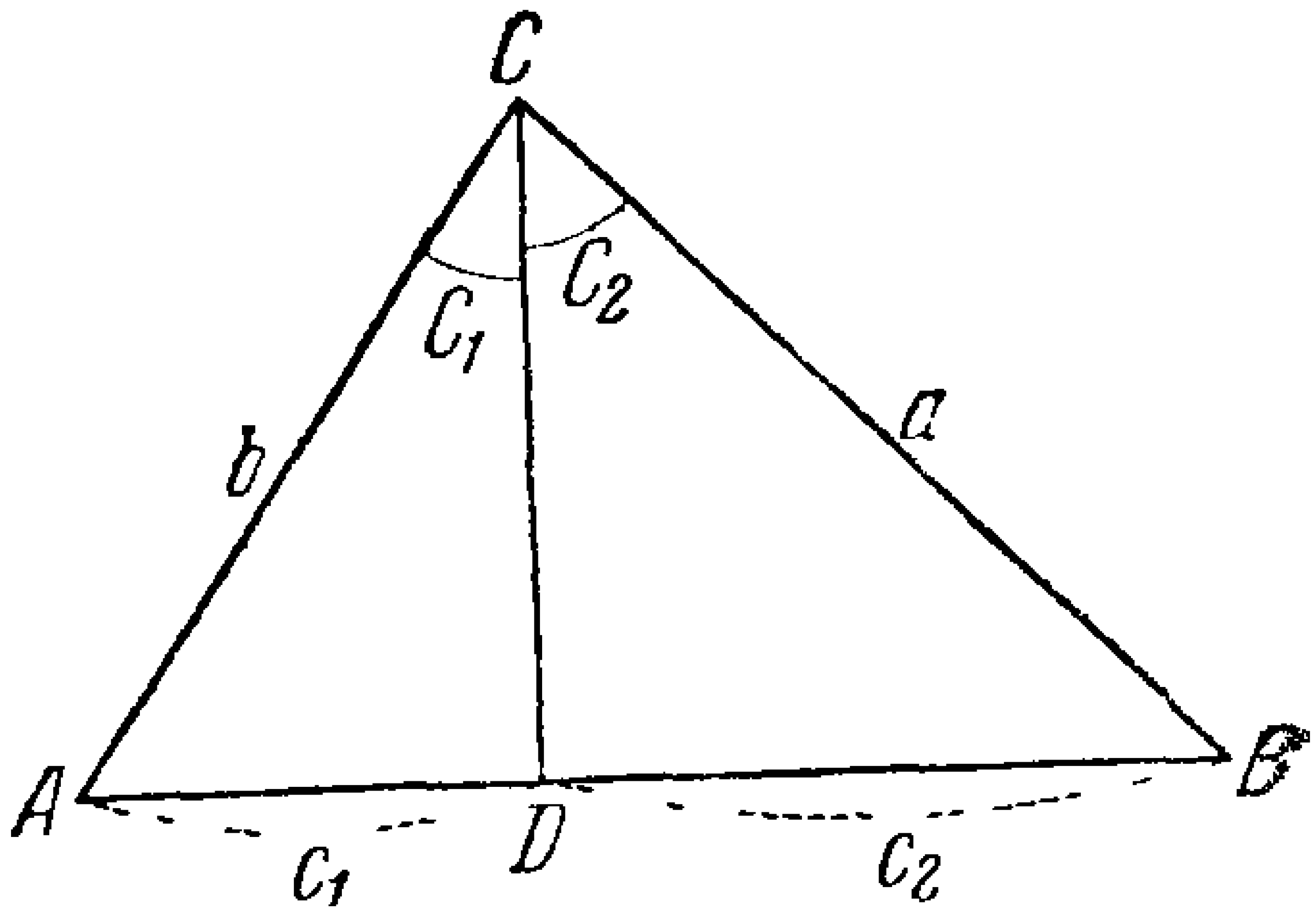
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{k}\right) = \cos X.$$

Доказательство этого здесь изложим.

Заметим прежде всего, что соотношение (57) влечет за собой

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\xi}{k}\right)=\cot f(X), \qquad \operatorname{ch}\left(\frac{\xi}{k}\right)=\frac{1}{\sin f(X)}. \tag{58}$$

Теперь на прямой AB (черт. 44) по обе стороны какой-либо ее точки D, отложим произвольно взятые отрезки $AD=c_1$, $DB=c_2$; из точки D восставим к AB перпендикуляр DC, на нем возьмем произвольно точку C и соединим ее с точками A и B. Получим треугольник ABC со сторонами a, b и $c=c_1+c_2$. Углы ACD и BCD обозначим через C_1 и C_2, их линейные меры пусть будут γ_1 и γ_2. Весь угол ACB равен C_1+C_2, его линейную меру обозначим через γ. Уравнение ($XXIII_2$) (теорема косинусов) в применении к стороне c в треугольнике ABC даст



Черт. 44.

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k}=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}-\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{th}\frac{\gamma}{k},$$

так что

$$\operatorname{th}\frac{\gamma}{k}=\frac{\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}-\operatorname{ch}\frac{c}{k}}{\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}}:$$

а так как

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k}=\operatorname{ch}\frac{c_1+c_2}{k}=\operatorname{ch}\frac{c_1}{k}\operatorname{ch}\frac{c_2}{k}+\operatorname{sh}\frac{c_1}{k}\operatorname{sh}\frac{c_2}{k},$$

то

$$\operatorname{th}\frac{\gamma}{k}=\operatorname{cth}\frac{a}{k}\operatorname{cth}\frac{b}{k}-\frac{\operatorname{ch}\frac{c_1}{k}\operatorname{ch}\frac{c_2}{k}}{\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}}-\frac{\operatorname{sh}\frac{c_1}{k}\operatorname{sh}\frac{c_2}{k}}{\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}}. \tag{59}$$

Три члена правой части выразим порознь через c_1 и c_2. Уравнение ($XXII_9$) в применении к треугольникам ACD и BCD дает:

$$\operatorname{th}\frac{h}{k}=\operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{th}\frac{\gamma_1}{k}, \qquad \operatorname{th}\frac{h}{k}=\operatorname{th}\frac{a}{k}\operatorname{th}\frac{\gamma_2}{k}.$$

А так как соотношения (56) и (58) дают:

$$\operatorname{th}\frac{\gamma_1}{k}=\cos f(C_1), \qquad \operatorname{th}\frac{\gamma_2}{k}=\cos f(C_2),$$

то

$$\operatorname{cth}\left(\frac{b}{k}\right)=\operatorname{cth}\left(\frac{h}{k}\right)\cos f(C_1),\quad \operatorname{cth}\left(\frac{a}{k}\right)=\operatorname{cth}\left(\frac{h}{k}\right)\cos f(C_2).$$

$$\operatorname{cth}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{cth}\left(\frac{b}{k}\right)=\operatorname{cth}^2\left(\frac{h}{k}\right)\cos f(C_1)\cos f(C_2). \tag{60}$$

Теперь уравнение ($XXII_1$) в применении к тем же треугольникам ACD и BCD дает:

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{c_1}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)}=\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_1}{k}\right)},\qquad \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{c_2}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}=\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_2}{k}\right)}.$$

А так как в силу соотношения (58)

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_1}{k}\right)}=\sin f(C_1),\qquad \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\gamma_2}{k}\right)}=\sin f(C_2),$$

то

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{c_1}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{c_2}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)}=\sin f(C_1)\sin f(C_2). \tag{61}$$

Наконец, уравнение ($XXII_4$) дает:

$$\operatorname{th}\left(\frac{c_1}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{h}{k}\right),\qquad \operatorname{th}\left(\frac{c_2}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_2}{k}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{h}{k}\right).$$

Отсюда

$$\operatorname{sh}\left(\frac{c_1}{k}\right)=\operatorname{ch}\frac{c_1}{k}\operatorname{sh}\left(\frac{h}{k}\right):\ \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_1}{k}\right),$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{c_2}{k}\right)=\operatorname{ch}\frac{c_2}{k}\operatorname{sh}\left(\frac{h}{k}\right):\ \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma_2}{k}\right).$$

Заменяя поэтому в левой части уравнения (61) $\operatorname{sh}\frac{c_1}{k}$, $\operatorname{sh}\frac{c_2}{k}$ этими выражениями, и имея в виду, что $\operatorname{sh}\frac{\gamma_1}{k}=\cot f(C_1)$, $\operatorname{sh}\frac{\gamma_2}{k}=\cot f(C_2)$ получаем:

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{c_1}{k}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{c_2}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)}=\frac{\cos f(C_1)\cos f(C_2)}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{h}{k}\right)}. \tag{62}$$

Заменяя теперь в правой части уравнения (59) все три члена найденными выражениями (60), (61) и (62) и принимая во внимание, с одной стороны, что

$$\operatorname{th}\left(\frac{\gamma}{k}\right)=\cos f\,(C_1+C_2),$$

а с другой стороны, что

$$\operatorname{cth}^2\left(\frac{h}{k}\right)-\frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{h}{k}\right)}=1,$$

получим

$$\cos f(C_1+C_2)=\cos f(C_1)\cos f(C_2)-\sin f(C_1)\sin f(C_2),$$

т. е. $$\cos f(C_1+C_2)=\cos\,[f(C_1)+f(C_2)].$$

И так как углы $f(C_1+C_2)$, $f(C_1)$, $f(C_2)$ не превышают каждый d, то это равенство обнаруживает, что

$$f(C_1+C_2)=f(C_1)+f(C_2).$$

Это значит, функция $f(X)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2).$$

Так как по самому определению функции $f(X)$ это есть непрерывная функция аргумента X, то $f(X)$ есть линейная функция от X и именно $f(X)=cX$, где c — постоянная. Но при $X=d$, $\xi=0$, $f(d)=d$, и потому соотношение (57) дает $\cos f(d)=0$; поэтому $f(d)=d$, следовательно, $c=1$ и $f(X)=X$.

Высказанное выше утверждение, таким образом, доказано. Результат, к которому мы пришли, допускает следующее выражение:

Теорема. *Если в гиперболической плоскости кривизны* —$1/k^2$ *X есть угол, не превышающий прямого угла* $0\leqslant X\leqslant d$, *а* ξ — *соответствующий этому углу отрезок параллельности, то*

$$\operatorname{th}\left(\frac{\xi}{k}\right)=\cos X.$$

Иначе говоря,

$$\frac{e^{\frac{\xi}{k}}-e^{-\frac{\xi}{k}}}{e^{\frac{\xi}{k}}+e^{-\frac{\xi}{k}}}=\cos X.$$

Отсюда

$$e^{2\frac{\xi}{k}} = \frac{1+\cos X}{1-\cos X} = \cot^2 \frac{X}{2},$$

т. е.

$$\cot \frac{X}{2} = e^{\frac{\xi}{k}}. \tag{63}$$

Если ξ обозначим через x, то $X = \Pi(x)$, и предыдущее уравнение принимает вид

$$\cot \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}. \tag{64}$$

Это — основное уравнение гиперболической геометрии, выведенное, таким образом, планиметрическими средствами. Соотношение (63), как уже было указано, приводит систему уравнений (XXII) к совпадению с системой (X); уравнение же (64) приводит ее к системе (III). Тригонометрия гиперболической плоскости, таким образом, установлена без стереометрических соображений.

ВАЖНЕЙШИЕ ДАТЫ В ЖИЗНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

(Все даты указаны по первоисточникам по старому стилю)

1793 22 октября родился[1].

1802 5 ноября поступил в Казанскую гимназию.

1807 14 февраля переведен в студенты университета.

1811 3 августа получил степень магистра физико-математических наук.

1814 26 марта утвержден адъюнктом физико-математических наук и с ближайшего учебного года приступил к чтению различных отделов чистой и прикладной математики (физики в 1819—1820 и 1823—1826 гг., астрономии в 1819—1822 и 1823—1825 гг., статики и динамики в 1825—1827 гг., гидростатики, гидравлики и учения о газах в 1827—1828 гг.).

1816 7 июля утвержден сверхкомплектным экстраординарным профессором.

1819 в апреле, за выездом проф. Симонова в кругосветное плавание, принимает на себя преподавание астрономии и заведывание астрономической обсерваторией.

1819 16 декабря назначается членом комитета (в котором вскоре и остается в единственном числе) по приведению в порядок библиотеки университета.

1820 19 ноября по июнь 1821 г. и с 31 мая 1823 г. по август 1825 г. нес, по избранию, должность декана физико-математического факультета.

1821 выполняет поручение попечителя по покупке в С.-Петербурге для университета астрономических и физических инструментов и книг по математике.

1822 назначается членом (а с 1825 г. и председателем) университетского строительного комитета.

1822 25 февраля избран ординарным профессором (утвержден 24 мая).

1825 8 октября избирается исполняющим обязанности библиотекаря университета, 19 февраля 1826 г. утвержден в этой должности и нес ее, даже совмещая с обязанностями ректора, до 22 марта 1835 г.

1826 11 февраля сделал в заседании физико-математического факультета доклад, содержащий изложение основных начал открытой им неевклидовой геометрии.

1827 30 июля утвержден ректором университета; 25 августа вступил в эту должность и непрерывно нес ее до 14 августа 1846 г. (т. е. до назначения помощником попечителя учебного округа).

---

[1] По метрическим записям Алексеевской церкви г. Нижнего Новгорода Лобачевский родился 20 ноября 1792 г. При всем том точное установление дня его рождения еще требует исследования.

1829—1830 опубликовал в журнале „Казанский вестник" мемуар „О началах геометрии", в котором в первый раз появилось в печати изложение неевклидовой геометрии.

1832 16 октября женился на Варваре Алексеевне Моисеевой.

1845 18 апреля вступил в управление округом, по случаю перемещения попечителя Мусина-Пушкина в С-Петербург.

1846 14 августа назначен помощником попечителя Казанского учебного округа.

1855 опубликовал свою последнюю работу „Пангеометрия".

1855 12 ноября уволен от службы по болезни с причислением к министерству.

1856 12 февраля скончался в Казани.

БИБЛИОГРАФИЯ

Издания „Геометрических исследований"

Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, Fincke, 1840; 2-е изд. (фототипия) Berlin, Mayer u. Müller, 1887. Воспроизведено в полном собрании сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского, Казань, 1886, т. II, стр. 553—578.

Переводы

Переводы на русский язык: 1) Геометрические изыскания о теории параллельных линий. Перевод проф. А. В. Летникова. Мат. сб., т. III, 1868.

2) Геометрические исследования по теории параллельных линий. Перевод проф. В. Ф. Кагана с вводными статьями, примечаниями и приложениями в Полном собрании сочинений Н. И. Лобачевского, М. — Л. т. I, 1945, и в настоящем издании.

Переводы на французский язык: 1) Études géométriques sur la théorie des parallèles, suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Traduit par J. Hoüel. Mémoires de la société de Bordeaux, 4, 1866; отд. изд. Paris, Gauthier-Villars, 1866; 2-е изд. 1895.

2) Recherches géométriques sur la théorie des parallèles, suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Paris, Hermann, 1900.

Переводы на английский язык: Geometrical researches on the theory of parallels. Translated by G. B. Halsted, Rolla, 1891; 2-е изд. Texas, Univ. Bull. 1891; 3-е и 4-е изд. Austin, Texas, 1892; переиздано также в Японии, 5 и 6-е изд., Tokyo, 1892—1894; 7-е изд. Chicago, Open Court, 1914.

Перевод на сербский язык. Б. Петроньевича, Белград, 1914.

Доступные изложения неевклидовой геометрии

Frischauf J. Elemente der absoluten Geometrie. Leipzig, 1876.

Каган В. Ф. Очерк геометрической системы Лобачевского. Одесса, 1900.

Barbarin B. La géométrie non euclidienne. Paris, 79 стр., 1902; 2-е изд. 92 стр., 1907.

Liebmann H. Nichteuklidische Geometrie. Leipzig, VIII + 245 стр., 1905; 2-е изд., Berlin, 6 + 222 стр, 1912; 3-е изд., Berlin, 150 стр., 1923.

Лукьянченко С. Пространство Лобачевского — Больай. Харьков, ч. I — II, 160 стр, 1914—1915.

Успенский Я. Введение в неевклидову геометрию Лобачевского — Больай. Петроград, 177 стр., 1922.

Simon M. Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Leipzig — Berlin, XVIII + 115 стр., 1925.

Baldus R. Nichteuklidische Geometrie. Hiperbolische Geometrie der Ebene. Leipzig u. Berlin, 1927. Русск. перев. Н. В. Ефимова под ред. Г. Б. Гуревича. Бальдус Р. Неевклидова геометрия. М. — Л., 147 стр., 1933.

Обстоятельные изложения неевклидовой геометрии

Killing W. Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig, VI + 264 стр., 1885

Coolidge J. The elements of non-euclidean geometry. Oxford, 291 стр., 1909.

Klein F. Vorlesungen uber nichteuklidische Geometrie. Berlin, 1928. Русск. перев. Н. К. Брушлинского. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М. — Л., 355 стр., 1936.

Schilling F. Projektive und nichteuklidische Geometrie. Bd. II. Leipzig u. Berlin, 210 стр., 1933.

Общие сочинения по основаниям геометрии

Killing W. Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Paderborn, F. Schöningh, 2 тома, 1893, 1898 (удостоено премии Н И. Лобачевского в 1900 г.).

Hilbert D. Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 92 стр., 1899. 7-е изд. 1930 (значительно переработанное с 10 прилож.). Русск. перев. А. В. Васильева. Гильберт Д. Основания геометрии. Петроград, 1923.

Enriques F. Questioni riguardanti la geometria elementare, trattate da U. Amaldi, R. Bonola, F. Enriques, G. Vitali. Bologna, Zanichelli, 1900. Нем. пер., 1 часть. Die grundlagen der geometrie. Leipzig, Teubner, 1911.

Enriques F. Prinzipien der Geometrie. Encykl. der math. Wiss. III A, B. 1, 1907. Франц. изд. F. Meyer III, 1. 1911.

Poincaré H. Des fondements de la géométrie. Paris, 1923.

Pasch M. u. Dehn M. Vorlesungen über neuere Geometrie. Berlin, X + 275 стр., 1926.

Godeaux L. Les géométries. Paris, 1937.

Оглавление

Вступительные статьи

В. Ф. Каган

Геометрические исследования по теории параллельных линий

Н. И. Лобачевский

Примечания

В. Ф. Каган

Приложения

В. Ф. Каган

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета АН СССР № 2233

*

Редактор издательства *М. Г. Шестопал*

Подписано к печати 15/VI 1945 г. М 01538. Печ. л. 11, уч.-изд. л. 13,5. Тираж 5000. Цена кн. 11 руб. Перепл. 4 руб. Зак. 125.

2-я типография „Печатный Двор" им. А. М. Горького треста „Полиграфкнига" ОГИЗа при СНК РСФСР

Ленинград, Гатчинская ул., 26.