ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ

и

ИНТЕГРАЛЬНОЕ

ИЗЧИСЛЕНІЕ.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНІЕ УРОКОВЪ
О
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМЪ
И
ИНТЕГРАЛЬНОМЪ ИЗЧИСЛЕНІИ

ПРЕПОДАВАЕМЫХЪ

ВЪ

Королевской Политехнической школѣ

Г. А. Л. КОШИ,

Членомъ Парижской Академіи Наукъ и Кавалеромъ ордена Почетнаго Легіона.

Перевелъ съ Французскаго

Императорской Академіи Наукъ Экстраординарный Академикъ и Докторъ въ Наукахъ

В. БУНЯКОВСКІЙ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Печатано при Императорской Академіи Наукъ,
1831.

Печатано съ одобренія Академіи. 16 Іюня 1831 г.

Павелъ Фуссъ

Непремѣнный Секретарь.

ЕГО СІЯТЕЛЬСТВУ

ГРАФУ АЛЕКСАНДРУ АЛЕКСАНДРОВИЧУ

ТОРМАСОВУ,

въ знакъ искренней дружбы и признательности

посвящаетъ Переводчикъ.

ОТЪ ПЕРЕВОДЧИКА.

Издавая нынѣ книгу: *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, соч. *Коши*, переведенную мною на Русскій языкъ нѣсколько лѣтъ тому назадъ, я имѣлъ въ виду познакомить моихъ соотечественниковъ съ произведеніемъ автора, коего труды на ученомъ поприщѣ, уже ознаменованы важными открытіями въ Анализѣ. Г. Коши, въ изложеніи правилъ дифференціальнаго и интегральнаго изчисленія, уклоняется отъ способовъ предшествовавшихъ ему писателей, и почти всегда преимущество остается на его сторонѣ. По сей-то причинѣ, да будетъ мнѣ дозволено изъявить желаніе, чтобъ сей переводъ былъ принятъ за руководство въ Учебныхъ Заведеніяхъ.

Я знаю, что Г. Коши издалъ новѣйшее сочиненіе о дифференціальномъ изчисленіи; но въ составъ онаго вовсе не входитъ интегральное. Я было намѣревался поручить кому-либо перевести подъ моимъ руководствомъ сію книгу, и замѣнить первые 20ть уроковъ симъ новымъ переводомъ. Но дабы оный могъ вполнѣ соотвѣтствовать интегральному изчисленію, надлежало-бы сдѣлать значительныя измѣненія въ текстѣ сочинителя, что, по моему мнѣнію, переводчикъ не долженъ дозволять себѣ ни въ какомъ случаѣ. Къ тому жь, сіе новое сочиненіе не содержитъ въ себѣ никакихъ значительныхъ улучшеній противъ перваго.

Если читатели удостоятъ сію книгу своего вниманія; то я обязуюсь издать продолженіе интегральнаго изчисленія, коего переводъ будетъ сдѣланъ подъ моимъ надзоромъ. Сіе продолженіе не было еще издано на Французскомъ языкѣ, а находится только въ рукописи, которую, по дружескимъ сношеніямъ, я успѣлъ пріобрѣсти.

ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ ОТЪ СОЧИНИТЕЛЯ.

Сіе сочиненіе, составленное по порученію Ученаго Совѣта Королевской Политехнической школы, заключаетъ въ себѣ краткое изложеніе читанныхъ мною въ сей школѣ лекцій о дифференціальномъ и интегральномъ изчисленіи. Все сочиненіе будетъ состоять изъ двухъ частей, сообразно съ раздѣленіемъ курса, продолжающагося два года. Нынѣ издаю первую часть, содержащую сорокъ уроковъ; первые двадцать составляютъ дифференціальное изчисленіе, а послѣдніе — интегральное. Излагаемые здѣсь способы, во многомъ различествуютъ отъ тѣхъ, которые приняты въ другихъ сочиненіяхъ о томъ же предметѣ.

Главною моею цѣлью было, соединить строгость въ доказательствахъ (которую всегда старался сохранить въ моемъ *Cours d'Analyse*) съ простотою, произходящею отъ непосредственнаго разсматриванія безконечно-малыхъ количествъ. По сей-то причинѣ, я вовсе не употреблялъ разложенія функцій въ безконечные ряды, когда сіи ряды были расходящіеся; также, я отнесъ Тейлорову формулу къ интегральному изчисленію; ибо сія формула вообще справедлива только въ такомъ случаѣ, когда рядъ входящій въ оную, содержитъ конечное число членовъ, съ дополнительнымъ опредѣленнымъ интеграломъ. Я знаю, что знаменитый авторъ *Аналитической Механики*, принялъ сію формулу за основаніе своей теоріи *производныхъ функцій*. Но не смотря на глубокое уваженіе, должное имени сего великаго мужа, почти всѣ математики признаютъ нынѣ, что употребленіе рядовъ расходящихся, можетъ, во многихъ случаяхъ, привести къ выводамъ ошибочнымъ; прибавлю даже, что разлагая нѣкоторыя функціи посредствомъ Тейлоровой теоремы, находимъ ряды, которые, хотя и кажутся сходящимися, однако же не выражаютъ разлагаемой функціи (*смот.* конецъ 38го урока). Впрочемъ, надѣюсь, что читатели сей книги, удостовѣрятся въ томъ, что правила, относящіяся къ дифференціальному изчисленію, и главныя приложенія онаго, могутъ быть изложены безъ пособія безконечныхъ рядовъ.

Я счёлъ за нужное, доказать въ интегральномъ изчисленіи существованіе *интеграловъ* или *первообразныхъ функцій*, прежде нежели изслѣдовалъ ихъ различныя свойства. Для сего, надлежало дать понятіе объ *интегралахъ взятыхъ между данными предѣлами* или объ *опредѣленныхъ интегралахъ*. Но какъ сіи послѣдніе могутъ имѣть, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, величины безконечныя, или неопредѣленныя: то необходимо было разыскать условія, при которыхъ сіи самые интегралы имѣютъ одну величину, конечную, и совершенно опредѣленную. Простѣйшій способъ для разрѣшенія сего вопроса, состоитъ въ разсматриваніи *близкопредѣльныхъ опредѣленныхъ интеграловъ*, о которыхъ говорено въ 25мъ урокѣ. Также, между безконечнымъ числомъ значеній интеграла, коего величина неопредѣленна, существуетъ одна примѣчательная величина, которую я назвалъ *главною величиною*. Разсматриваніе близкопредѣльныхъ интеграловъ и главныхъ величинъ интеграловъ, весьма полезно при рѣшеніи многихъ задачъ. Оно приводитъ къ многоразличнымъ формуламъ, посредствомъ которыхъ можно вывесть величины разныхъ опредѣленныхъ интеграловъ, что уже показано мною въ разсужденіи представленномъ въ Институтѣ въ 1814 году. Въ 34мъ и 39мъ урокахъ помѣщена подобная формула, которая и приложена къ разысканію величинъ многихъ опредѣленныхъ интеграловъ, изъ коихъ нѣкоторыя были уже извѣстны.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНІЕ УРОКОВЪ

преподаваемыхъ

въ Королевской политехнической школѣ

Г. А. Л. КОШИ.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.

УРОКЪ ПЕРВЫЙ.

О перемѣнныхъ величинахъ, ихъ предѣлахъ, и величинахъ безконечно-малыхъ.

Перемѣннымъ или измѣняемымъ количествомъ называется такое количество, которое послѣдовательно переходитъ чрезъ многія величины различныя между собою. Постоянное же количество есть то, коего величина остается одна и та же. Ежели величины, приписываемыя какому либо перемѣнному количеству приближаются болѣе и болѣе къ величинѣ опредѣленной, такъ что наконецъ разнствуютъ отъ оной столь мало сколько угодно, то сія послѣдняя величина называется *предѣломъ* всѣхъ прочихъ. Такъ, на примѣръ, площадь круга есть предѣлъ, къ коему площади вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ приближаются тѣмъ ближе, чѣмъ болѣе увеличивается число ихъ сторонъ; равнымъ образомъ, радіусы векторы проведенные изъ центра Гиперболы къ ея точкамъ удаляющимся болѣе и болѣе отъ сего центра, составляютъ съ осью x углы имѣющіе предѣломъ уголъ, составленный ассимптотою съ тою же осью, и проч. . . . . Для краткости мы будемъ означать предѣлъ, къ которому стремится данная перемѣнная величина, поставляя передъ оной буквы *пр*.

Иногда предѣлы, къ коимъ приближаются перемѣнныя выраженія представляются въ неопредѣленномъ видѣ; не смотря на сіе, онѣ имѣютъ однако же совершенно опредѣленныя величины, которыя можно найти посредствомъ различныхъ пріемовъ. Такъ, напримѣръ, предѣлы къ коимъ безпрестанно приближаются два перемѣнныя выраженія

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

по мѣрѣ того, какъ α стремится къ нулю, представляются въ неопредѣленныхъ видахъ $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$; не смотря на сіе, оба сіи предѣла имѣютъ величины опредѣленныя, которыя можно вычислить слѣдующимъ образомъ:

Очевидно, что для весьма малыхъ численныхъ величинъ α, будемъ имѣть слѣдующія неравенства

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

Слѣдовательно отношеніе $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, заключающееся всегда между двумя количествами $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 1$, и $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \cos\alpha$, изъ коихъ первое служитъ предѣломъ второму, будетъ само имѣть предѣломъ единицу.

Теперь будемъ искать предѣлъ къ коему стремится выраженіе $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, по мѣрѣ того, какъ α приближается къ нулю. Предполагая сперва что α есть количество положительное и вида $\frac{1}{m}$, гдѣ m означаетъ число цѣлое, перемѣнное, и могущее сдѣлаться безконечно великимъ, получаемъ

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\tfrac{1}{m})^m$$
$$= 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1.2.}(1-\tfrac{1}{m}) + \tfrac{1}{1.2.3.}(1-\tfrac{1}{m})(1-\tfrac{2}{m}) + \ldots$$
$$\ldots + \tfrac{1}{1.2.3.\ldots m}(1-\tfrac{1}{m})(1-\tfrac{2}{m})\ldots(1-\tfrac{m-1}{m}).$$

Но такъ какъ во второй части сего уравненія, всѣ члены заключающіе количество m суть положительные, и при томъ же величина каждаго члена, равно какъ и число членовъ увеличивается вмѣстѣ съ увеличиніемъ количества m, то очевидно, что и выраженіе $(1+\frac{1}{m})^m$ возрастать будетъ вмѣстѣ съ цѣлымъ числомъ m, заключаясь всегда между двумя предѣлами

$$1 + \tfrac{1}{1} = 2$$

и $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2.} + \frac{1}{2.2.2.} +$ и проч. $\ldots = 1 + 1 + 1 = 3.$;

такъ что, для возрастающихъ величинъ m, оно приближается постепенно къ нѣкоторому предѣлу заключающемуся между 2 и 3. Сей предѣлъ есть число весьма важное въ Дифференціальномъ Изчисленіи; оный обыкновенно означаютъ буквою e. Взявъ $m = 10000$, найдемъ посредствомъ таблицъ десятичныхъ логариѳмовъ, слѣдующую приближенную величину числа e:

$$\left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000} = 2{,}7183.$$

которая разнствуетъ отъ настоящей не болѣе какъ на одну десяти-тысячную часть, какъ мы то въ послѣдствіи увидимъ.

Теперь предположимъ что количество α, оставаясь положительнымъ, не можетъ быть выражено чрезъ дробь $\frac{1}{m}$.

Означимъ чрезъ m и $n = m + 1$, два цѣлыя числа, изъ коихъ одно непосредственно болѣе, а другое непосредственно менѣе $\frac{1}{\alpha}$, въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$\frac{1}{\alpha} = m + \mu = n - \nu,$$

гдѣ μ и ν суть числа заключающіяся между нулемъ и единицею. Очевидно, что выраженіе $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ будетъ заключаться между двумя слѣдующими:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{1+\frac{\mu}{m}}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1-\frac{\nu}{n}};$$

и, какъ для величинъ α уменьшающихся до безконечности, или, что все равно, для величинъ m и n безконечно возрастающихъ, количества $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, одно и другое стремятся къ предѣлу e, между тѣмъ какъ $1+\frac{\mu}{m}$, $1-\frac{\nu}{n}$, безпрестанно приближаются къ единицѣ, то изъ сего слѣдуетъ, что каждое изъ выраженій

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

а также и промежуточное выраженіе $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ будетъ стремиться къ предѣлу e.

Предположимъ наконецъ, что α сдѣлается количествомъ отрицательнымъ. Въ такомъ предположеніи, пусть будетъ

$$1 + \alpha = \frac{1}{1+\beta},$$

гдѣ β означаетъ количество положительное, и которое само будетъ стремиться къ нулю; найдемъ

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\beta)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} = \left[(1+\beta)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{1+\alpha},$$

потомъ, переходя къ предѣламъ,

$$пр. (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{пр. (1 + \alpha)} = e.$$

Ежели перемѣнная величина уменьшаясь безпрестанно, сдѣлается наконецъ менѣе всякаго даннаго числа, то въ семъ случаѣ сія перемѣнная называется безконечно-малымъ количествомъ. Сего рода перемѣнная имѣетъ предѣломъ нуль. Употребленное нами количество α въ предъидущихъ вычисленіяхъ, принадлежитъ къ величинамъ такого рода.

Ежели перемѣнная величина безпрестанно увеличивается, такъ что наконецъ сдѣлается болѣе всякой данной величины, въ такомъ случаѣ сія величина имѣетъ предѣломъ положительную или отрицательную безконечность, именно: она имѣетъ предѣломъ положительную безконечность, означаемую чрезъ знакъ ∞, ежели она сама положительная; и отрицательную безконечность, изображаемую знакомъ $-\infty$, ежели идетъ дѣло о перемѣнной отрицательной. Таково есть перемѣнное число m, которое мы предъ симъ употребляли.

УРОКЪ ВТОРЫЙ.

О непрерывныхъ и прерывныхъ функціяхъ. Геометрическое изображеніе непрерывныхъ функцій.

Ежели перемѣнныя количества зависятъ однѣ отъ другихъ такимъ образомъ, что по данной величинѣ одного изъ нихъ, можно вывести величины всѣхъ прочихъ, то всѣ сіи различныя количества выражаются обыкновенно посредствомъ одного изъ нихъ, которое и называется въ такомъ случаѣ *перемѣннымъ независимымъ*; а другія количества, выраженныя посредствомъ перемѣнной независимой, называются функціями сей перемѣнной.

Равнымъ образомъ, ежели измѣняемыя количества зависятъ однѣ отъ другихъ, такъ что по даннымъ величинамъ нѣкоторыхъ изъ нихъ, можно вывести величины всѣхъ прочихъ, то всѣ сіи различныя количества выражаются посредствомъ нѣкоторыхъ изъ нихъ, которыя и принимаютъ тогда названіе *перемѣнныхъ независимыхъ*; а другія выраженныя посредствомъ перемѣнныхъ независимыхъ, именуются *функціями* сихъ самыхъ перемѣнныхъ. Различныя Алгебраическія и Тригонометрическія выраженія, составленныя изъ перемѣнныхъ принимаемыхъ за независимыя, суть функціи сихъ перемѣнныхъ. Такъ, на примѣръ,

$$L(x), \quad \sin x, \quad \text{и проч.} \ldots$$

суть функціи перемѣнной x;

а $$x+y, \quad x^y, \quad xyz, \ldots\ldots$$

суть функціи перемѣнныхъ x и y или x, y и z; и проч. ....

Когда функціи одной или нѣсколькихъ измѣняемыхъ, какъ въ предъидущихъ примѣрахъ, непосредственно выражены чрезъ сіи самыя перемѣнныя, то онѣ называются *функціями явными.* Но когда извѣстны однѣ только отношенія между функціями и измѣняемыми независимыми величинами, то есть, уравненія, которымъ всѣ сіи количества должны удовлетворять, то, доколѣ сіи уравненія не будутъ рѣшены, функціи, не бывъ выражены непосредственно чрезъ перемѣнныя, называются *функціями неявными.* Чтобы сдѣлать ихъ явными, стоитъ только, ежели сіе возможно, рѣшить уравненія ихъ опредѣляющія. На примѣръ, пусть будетъ y функція неявная перемѣнной x, опредѣляемая уравненіемъ

$$L(y) = x,$$

ежели представимъ чрезъ A основаніе разсматриваемой нами системы логариѳмовъ, то таже самая функція, сдѣлается явною чрезъ рѣшеніе даннаго уравненія, и будетъ

$$y = A^x.$$

Когда потребуется означить явную функцію одной перемѣнной x, или многихъ x, y, z . . . . . не опредѣляя именно какая функція, то употребляютъ обыкновенно одно изъ слѣдующихъ знакоположеній:

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ \chi(x),\ \psi(x),\ \omega(x),\ \ldots\ldots \text{ и проч.}$$
$$f(x, y, z \ldots),\ F(x, y, z \ldots\ldots),\ \varphi(x, y, z \ldots\ldots), \text{ и проч.}$$

Въ вычисленіяхъ употребляютъ часто букву Δ для означенія приращеній двухъ измѣняемыхъ величинъ, зависящихъ одна отъ другой. И такъ, ежели перемѣнная y выражена чрезъ функцію перемѣнной x уравненіемъ

$$(1) \qquad y = f(x),$$

то Δy, или приращеніе перемѣнной y соотвѣтствующее приращенію Δx перемѣнной x, опредѣлится формулою

(2) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

И вообще, предполагая

(3) $$F(x, y) = 0$$

будемъ имѣть

(4) $$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Замѣтимъ, что ежели изъ уравненія (2) вычтемъ уравненіе (1), то получимъ

(5) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Пусть будутъ теперь h и i два различныя количества, первое конечное, другое безконечно-малое, а $\alpha = \frac{i}{h}$ безконечно-малое отношеніе сихъ двухъ количествъ. Ежели количеству Δx припишемъ величину конечную h, то величина Δy, взятая въ уравненіи (5) приметъ названіе *конечной разности* функціи $f(x)$ и будетъ почти всегда конечнымъ количествомъ. Напротивъ того, ежели количеству Δx припишемъ безконечно малую величину, полагая на примѣръ,

$$\Delta x = i = \alpha h,$$

то величина Δy, то-есть,

$$f(x + i) - f(x) \text{ или } f(x + \alpha h) - f(x),$$

будетъ почти всегда безконечно-малое количество. Въ чемъ легко удостовѣримся въ разсужденіи слѣдующихъ функцій:

$$A^x, \ \sin x, \ \cos x,$$

коимъ соотвѣтствуютъ разности

$$A^{x+i} - A^x = (A^i - 1)\, A^x,$$

$$\sin(x + i) - \sin x = 2 \sin \frac{i}{2} \cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

$$\cos(x + i) - \cos x = 2 \sin \frac{i}{2} \cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

изъ коихъ каждая содержитъ или множителя $A^i - 1$, или $\sin \frac{i}{2}$, оба приближающіяся къ нулю вмѣстѣ съ i.

Ежели функція $f(x)$ измѣняется съ величиною x такимъ образомъ, что для каждаго значенія сей измѣняемой величины, заключающейся въ данныхъ предѣлахъ, она имѣетъ одну (*) совершенно опредѣленную величину, тогда разность

$$f(x+i)-f(x)$$

между предѣлами величины x будетъ количество безконечно-малое; функція же $f(x)$ удовлетворяющая сему условію, называется между тѣми предѣлами *непрерывною функціею* измѣняемой x.

Равнымъ образомъ, функція $f(x)$ будетъ непрерывною въ сопредѣльности какой либо частной величины количества x, когда сія функція есть непрерывная между двумя предѣлами, заключающими предъидущую частную величину x, хотя бы сіи предѣлы разнствовали весьма мало отъ оной величины.

Наконецъ, когда функція перестаетъ быть непрерывною въ сопредѣльности какой-бы то ни было частной величины x, то въ такомъ случаѣ она принимаетъ названіе прерывной функціи, ибо тогда для оной частной величины x имѣется *разрывъ непрерывности* (solution de continuité). Такъ, на примѣръ, для функціи $\frac{1}{x}$ разрывъ непрерывности имѣетъ мѣсто когда $x=o$; для функціи tang x, сей разрывъ существуетъ для $x=\pm\frac{(2k+1)\pi}{2}$, гдѣ k есть какое нибудь цѣлое число, и проч.

Изъ сихъ изъясненій легко можно узнать, между какими предѣлами данная функція перемѣнной x будетъ непрерывною. (Подробнѣе о семъ изложено во II главѣ I части *du Cours d'Analyse* изданнаго въ 1821 году.)

(*) Случается иногда что функція $f(x)$ для данной, совершенно опредѣленной величины x, можетъ имѣть нѣсколько различныхъ величинъ; такова есть функція $\frac{1}{x-1}$, которая равняется $\pm\infty$ когда $x=1$.

Прим. Переводчика.

Теперь вообразимъ кривую линію данную чрезъ уравненіе $y = f(x)$ между прямоугольными координатами. Ежели функція $f(x)$ будетъ непрерывною между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$, то каждой абсциссѣ x, заключающейся между сими предѣлами будетъ соотвѣтствовать одна только ордината; и сверхъ того, когда x получитъ безконечно-малое приращеніе Δx, то y увеличится на безконечно-малое же количество Δy, а посему двумъ безконечно-мало разнствующимъ абсциссамъ $x, x + \Delta x$, будутъ соотвѣтствовать на кривой линіи двѣ безконечно-близкія точки, ибо разстояніе сихъ точекъ выразится чрезъ безконечно-малую величину $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Симъ условіямъ можно удовлетворить только тогда, когда кривая линія будетъ непрерывная между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$.

Примѣръ. Построить кривыя линіи выражаемыя уравненіями

$$y = x^m,\ y = \frac{1}{x^m},\ y = A^x,\ y = L(x),\ y = \sin x,$$

гдѣ A означаетъ положительное количество, а m цѣлое число.

Опредѣлить общій видъ сихъ кривыхъ линій.

УРОКЪ ТРЕТІЙ.

О производныхъ функціяхъ одной перемѣнной.

Положимъ, что функція $y = f(x)$ есть непрерывная между двумя данными предѣлами перемѣнной x, и что сей перемѣнной дана величина содержащаяся между сими самыми предѣлами, то безконечно-малое приращеніе получаемое измѣняемымъ количествомъ, произведетъ безконечно же малое приращеніе самой функціи. Слѣдственно, полагая $\Delta x = i$, числитель и знаменатель *отношенія разностей*

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

будутъ количества безконечно-малыя. Но, между тѣмъ какъ числитель и знаменатель будутъ безпрестанно и въ одно время приближаться къ нулю, самая дробь будетъ стремиться къ другому, или положительному, или отрицательному предѣлу. Сей предѣлъ, для каждой данной величины x, имѣетъ опредѣленную же величину, которая впрочемъ измѣняется вмѣстѣ съ x. Такъ, на примѣръ, полагая $f(x) = x^m$, гдѣ m означаетъ цѣлое число, отношеніе безконечно-малыхъ разностей будетъ

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \ldots + i^{m-1}$$

а предѣлъ онаго количество $m x^{m-1}$, которое есть новая функція перемѣнной x. Точно также и вообще; только видъ новой функціи, которая будетъ служить предѣломъ отношенію $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$

будетъ зависѣть отъ предложенной функціи $y = f(x)$. Для означенія сей зависимости, даютъ обыкновенно предѣлу сего отношенія названіе *производной функціи*, которая и означается чрезъ знакоположеніе

$$y' \text{ или } f'(x).$$

При изысканіи производныхъ функцій выраженія $f(x)$, должно различать функціи называемыя *простыми*, и которыя изображаютъ одно какое нибудь дѣйствіе произведенное надъ сею перемѣнною, отъ тѣхъ функцій, кои выводимъ посредствомъ многихъ дѣйствій и которыя посему именуются *сложными*. Простыя функціи произходящія отъ алгебрическихъ и тригонометрическихъ дѣйствій (*Смотри* I часть *du Cours d'Analyse*, Гл. I.), могутъ быть приведены къ слѣдующимъ

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ L(x),$$

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{arc}\sin x,\ \operatorname{arc}\cos x,$$

гдѣ A есть постоянное число, $a = \pm A$ постоянное же количество, а буква L означаетъ логариѳмъ взятой въ той системѣ, коей основаніе есть A. Полагая величину y равною одной изъ сихъ простыхъ функцій, вообще легко будетъ получить производную y'. Такимъ образомъ найдется,

полагая $y = a + x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+x+i)-(a+x)}{i} = 1$, $y' = 1$;

полагая $y = a - x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a-x-i)-(a-x)}{i} = -1$, $y' = -1$;

полагая $y = ax$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i)-ax}{i} = a$, $y' = a$;

полагая $y = \frac{a}{x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+i} - \frac{a}{x}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)}$, $y' = -\frac{a}{x^2}$;

полагая $y = \sin x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\cos(x+\frac{1}{2}i)$, $y' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$;

полагая $y = \cos x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\sin(x+\frac{1}{2}i)$, $y' = -\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{2})$.

Сверхъ шого, полагая $i = \alpha x$, $A^i = 1 + \beta$ и $(1+\alpha)^a = 1 + \gamma$, найдешся

полагая $x = L(x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+i) - L(x)}{i} = \frac{L(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}$, $y' = \frac{L(e)}{x}$;

полагая $y = A^x$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i} - A^x}{i} = \frac{A^i - 1}{i} A^x = \frac{A^x}{L(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}$, $y' = \frac{A^x}{L(e)}$;

полагая $y = x^a$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a - x^a}{i} = \frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha} x^{a-1} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{L(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} a x^{a-1}$, $y' = a x^{a-1}$

Въ сихъ послѣднихъ формулахъ, буква e означаетъ число $2{,}7182818\ldots$, которое служитъ предѣломъ выраженію $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Принявъ сіе число за основаніе системы логариѳмовъ, получимъ *Неперовы* или *гиперболическіе* логариѳмы, которые впредь будемъ означать всегда буквою l. И такъ, очевидно, что $l(e) = 1$,

$$Le = \frac{Le}{LA} = \frac{le}{lA} = \frac{1}{lA};$$

и сверхъ того найдется

$$\text{полагая } x = l(x), \quad y' = \frac{1}{x},$$
$$\text{полагая } y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Предъидущія формулы выведены только для величинъ x, коимъ соотвѣтствуютъ вещественныя величины y; а посему должно, чтобы въ выраженіяхъ $L(x)$, $l(x)$, величина x была положительная, равнымъ образомъ и въ функціи x^a, когда a означаетъ дробь съ четнымъ знаменателемъ, или ирраціональное число.

Теперь пусть будетъ z другая функція x, сопряженная съ первою $y = f(x)$ формулою

(2) $$z = F(y),$$

гдѣ z или $F(fx)$ называется *функціею отъ функціи* перемѣнной x; означивъ чрезъ Δx, Δy, Δz, безконечно-малыя и одновременныя приращенія трехъ перемѣнныхъ x, y, z, найдемъ

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

потомъ, переходя къ предѣламъ,

(3) $$z' = y'.F'(y) = f'(x).F'(fx).$$

На примѣръ, полагая $z = ay$, а $y = l(x)$, получимъ $z' = ay' = \frac{a}{x}$. Помощію формулы (3) легко опредѣлятся производныя функціи выраженій A^x, x^a, $\arc\sin x$, $\arc\cos x$, предполагая извѣстными производныя функціи количествъ $L(x)$, $\cos x$, $\sin x$. И дѣйствительно, найдется

полагая $y = A^x$, $L(y) = x$, $y'\frac{L(e)}{y} = 1$, $y' = \frac{y}{L(e)} = A^x\, l(A)$;

полагая $y = x^a$, $l(y) = a l(x)$, $y'\frac{1}{y} = \frac{a}{x}$, $y' = a\frac{y}{x} = a x^{a-1}$;

полагая $y = \arc\sin x$, $\sin y = x$, $y'\cos y = 1$, $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

полагая $y = \arc\cos x$, $\cos y = x$, $-y'\sin y = 1$, $y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Сверхъ того, производныя функціи сложныхъ количествъ

$$A^y,\ e^y,\ \frac{1}{y}$$

будучи соотвѣтственно, въ слѣдствіе формулы (3),

$$y' A^y\, l(A),\quad y' e^y,\quad -\frac{y'}{y^2},$$

то производныя слѣдующихъ функцій

$$A^{B^x},\ e^{e^x},\ \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x},\ \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}$$

будутъ

$$A^{B^x} B^x\, l(A)\, l(B),\ e^{e^x} e^x,\ \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Замѣтимъ, что производныя функціи сложныхъ количествъ опредѣляются иногда съ такою же удобностію, какъ и производныя функціи простыхъ количествъ. Такъ, на примѣръ, находимъ

полагая $y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\sin(x+i)}{\cos(x+i)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin i}{i \cos x \cos(x+i)}$,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

полагая $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\cos(x+i)}{\sin(x+i)} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sin i}{i \sin x \sin(x+i)}$,

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

изъ сего выводимъ

полагая $y = \operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{tang} y = x$, $\frac{y'}{\cos^2 y} = 1$, $y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$;

полагая $y = \operatorname{arc\,cot} x$, $\cot y = x$, $\frac{-y'}{\sin^2 y} = 1$, $y' = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+x^2}$.

УРОКЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Дифференцированіе функцій одной перемѣнной.

Пусть будуть $y=f(x)$ функція измѣняемой x, i безконечно-малое количество, и h конечная величина. Полагая $i=\alpha h$, гдѣ α будеть также безконечно-малое количество, получимъ

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h},$$

откуда произойдеть

$$(1)\qquad \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}\,h.$$

Предѣлъ, къ которому приближается первая часть уравненія (1), между тѣмъ какъ α приближается къ нулю, а количество h остается постояннымъ, называется *дифференціаломъ* функціи $y=f(x)$. Сей дифференціалъ означають буквою d, слѣдующимъ образомъ:

$$dy \text{ или } df(x).$$

Зная величину производной функціи y' или $f'(x)$, легко найти оные дифференціалы. И дѣйствительно, взявъ предѣлы обѣихъ частей уравненія (1), найдется

$$(2)\qquad df(x)=hf'(x).$$

Въ частномъ случаѣ, когда $f(x)=x$, уравненіе (2) даеть

$$(3)\qquad dx=h.$$

Итакъ дифференціалъ перемѣнной независимой x, равняется постоянному количеству h. Уравненіе (2) можно замѣнить слѣдующимъ

(4) $$df(x) = f'(x) \,.\, dx,$$

или, что все равно, уравненіемъ

(5) $$dy = y' \, dx.$$

Изъ сихъ послѣднихъ уравненій слѣдуетъ, что производная функція $y' = f'(x)$ какой либо функціи $y = f(x)$ равняется отношенію $\frac{dy}{dx}$, дифференціала функціи къ дифференціалу перемѣнной величины, или, что все равно, коеффиціенту, на котораго должно умножить дифференціалъ измѣняемой величины, чтобы получить дифференціалъ функціи. По сей-то причинѣ производная функція иногда называется *дифференціальнымъ коеффиціентомъ*.

Дифференцироватъ функцію, значитъ найти ея дифференціалъ. Дѣйствіе для сего употребляемое называется *дифференцированіемъ*.

По уравненію (4), весьма легко найти дифференціалы тѣхъ функцій, коихъ производныя функціи извѣстны. Приложивъ сіе уравненіе къ простымъ функціямъ, получимъ

$$d(a+x) = dx,\ d(a-x) = -dx,\ d(ax) = adx,\ d\left(\frac{a}{x}\right) = -a\frac{dx}{x^2};$$

$$d(x^a) = ax^{a-1}\,dx;$$

$$d \,.\, A^x = A^x \, l(A) \,.\, dx, \quad d \,.\, e^x = e^x \, dx;$$

$$d \,.\, L(x) = L(e)\frac{dx}{x}, \quad d \,.\, l(x) = \frac{dx}{x};$$

$$d \,.\, \sin x = \cos x \,.\, dx = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx;$$

$$d \,.\, \cos x = -\sin x \,.\, dx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx;$$

$$d \,.\, \text{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \,.\, \text{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Такимъ же образомъ найдемъ

$$d \,.\, \text{tang}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \qquad d \,.\, \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x};$$

$$d\,.\,\text{arc tang}\,x = \frac{dx}{1+x^2},\quad d\,.\,\text{arc cot}\,x = -\frac{dx}{1+x^2};$$

$$d\,.\,\text{séc}\,x = \frac{\sin x\,.\,dx}{\cos^2 x},\quad d\,.\,\text{cosée}\,x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}.$$

Въ сихъ дифференціалахъ количеству x можно приписывать только тѣ величины, для коихъ, въ предъидущемъ урокѣ, мы опредѣлили производныя функціи соотвѣтствующія симъ дифференціаламъ.

А посему, простыя функціи, коихъ дифференціалы мы нашли для всѣхъ вещественныхъ величинъ x, суть слѣдующія,

$$a+x,\ a-x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ A^x,\ e^x,\ \sin x,\ \cos x;$$

къ нимъ можно прибавить и функцію x^a, когда количество a будетъ или цѣлое число или дробь съ нечетнымъ знаменателемъ. Что же касается до дифференціаловъ простыхъ функцій $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\cos x$, $L(x)$, $l(x)$, то въ двухъ первыхъ величина x должна заключаться между предѣлами $+1$, и -1, а въ двухъ послѣднихъ между предѣлами 0 и ∞; между сими послѣдними предѣлами должна заключаться таже величина x въ дифференціалѣ функціи x^a, ежели численная величина количества a будетъ дробь съ четнымъ знаменателемъ или ирраціональное число.

Сообразно съ сказаннымъ нами въ I части *du Cours d'Analyse*, мы будемъ употреблять знакоположенія $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\cos x$, $\text{arc tang}\,x$, $\text{arc cot}\,x$, $\text{arc sec}\,x$, $\text{arc cosec}\,x$, для означенія наименьшей изъ дугъ, соотвѣтствующихъ тригонометрической линіи x; ежели же случится, что одной и той же тригонометрической величинѣ будутъ соотвѣтствовать двѣ равныя дуги, одна положительная, а другая отрицательная, то предъидущія знакоположенія будутъ означать положительную дугу: изъ сего слѣдуетъ, что $\text{arc}\sin x$, $\text{arc tang}\,x$, $\text{arc cot}\,x$, $\text{arc cosec}\,x$, суть дуги, заключающіяся между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, а $\arccos x$, $\operatorname{arc\,séc} x$, заключаются между предѣлами o и π.

Положивъ $y = f(x)$ а $\Delta x = i = \alpha h$, уравненіе (1), коего вторая часть имѣетъ предѣломъ dy, можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{\Delta y}{\alpha} = dy + \beta,$$

гдѣ β означаетъ безконечно-малое количество; отсюда выходитъ

$$\Delta y = \alpha(dy + \beta). \tag{6}$$

Пусть будетъ z другая функція перемѣнной x. То такимъ же образомъ получимъ

$$\Delta z = \alpha(dz + v),$$

гдѣ v означаетъ количество безконечно-малое. Раздѣливъ послѣднее уравненіе на предпослѣднее, получимъ

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz + v}{dy + \beta}$$

потомъ, переходя къ предѣламъ,

$$\text{пр.}\ \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'\,dx}{y'\,dx} = \frac{z'}{y'}. \tag{7}$$

Откуда слѣдуетъ, что *отношеніе безконечно-малыхъ разностей двухъ функцій перемѣнной величины x имѣетъ предѣломъ отношеніе ихъ дифференціаловъ или ихъ производныхъ функцій.*

Теперь положимъ что z есть функція y, выраженная уравненіемъ

$$z = F(y). \tag{8}$$

Отсюда выведемъ

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y};$$

потомъ, переходя къ предѣламъ, и соображаясь съ формулою (7), получимъ

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'} = f'(y),$$

(9) $$dz = F'(y)\,dy, \quad z' = y'\,F'(y).$$

Второе изъ уравненій (9) не разнится отъ формулы (3) предъидущаго урока. Сверхъ того, ежели въ первомъ изъ уравненій (9) вмѣсто z поставимъ $F(y)$, то получимъ слѣдующее уравненіе

(10) $$dF(y) = F'(y)\,dy,$$

коего видъ сходенъ съ видомъ формулы (4) и которое служитъ для дифференцированія функціи y, даже тогда, когда y будетъ зависѣть отъ другой измѣняемой величины.

Примѣры. $d(a+y)=dy$, $d(a-y)=-dy$, $d(ay)=a\,dy$, $de^y=e^y dy$, $dl(y)=\frac{dy}{y}$, $dl(y^2)=\frac{d(y^2)}{y^2}=\frac{2\,dy}{y}$, $d\,\tfrac{1}{2}\,l(y^2)=\frac{dy}{y}$, и проч. . .

$d\,.\,ax^m = ad(x^m) = max^{m-1}dx$, $de^{e^x} = e^{e^x}d(e^x) = e^{e^x}e^x dx$,

$d\,.\,l\sin x = \frac{d\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \frac{dx}{\operatorname{tang} x}$, $d\,.\,l\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\sin x\,.\,\cos x}$, и проч. . . .

Первая изъ сихъ формулъ показываетъ, что *присовокупленіе постоянной величины къ функціи не измѣняетъ ея дифференціала, а слѣдовательно и ея производной функціи.*

УРОКЪ ПЯТЫЙ.

Дифференціалъ суммы нѣсколькихъ функцій равенъ суммѣ ихъ дифференціаловъ. Слѣдствія выводимыя изъ сего правила. Дифференціалы мнимыхъ функцій.

Въ предъидущихъ урокахъ, мы показали какимъ образомъ находятся производныя функціи одной перемѣнной. Теперь войдемъ въ нѣкоторыя подробности по сему предмету.

Пусть будетъ x измѣняемая независимая величина, а $\Delta x = ah = adx$ безконечно-малое приращеніе сей перемѣнной. Означивъ чрезъ $s, u, v, w \ldots\ldots$ нѣсколько функцій x, а чрезъ $\Delta s, \Delta u, \Delta v, \Delta w \ldots\ldots$ приращенія сихъ функцій соотвѣтствующія приращенію Δx измѣняемой x, то изъ самаго опредѣленія дифференціаловъ слѣдуетъ, что сіи дифференціалы будутъ соотвѣтственно равны предѣламъ отношеній

$$\frac{\Delta s}{a},\ \frac{\Delta u}{a},\ \frac{\Delta v}{a},\ \frac{\Delta w}{a},\ \ldots\ldots$$

Предположимъ теперь что

(1) $$s = u + v + w + \text{ и проч.} \ldots\ldots$$

то найдется

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots\ldots,$$

потомъ, раздѣливъ на a, будетъ

$$\frac{\Delta s}{a} = \frac{\Delta u}{a} + \frac{\Delta v}{a} + \frac{\Delta w}{a} + \text{ и проч.},$$

наконецъ, переходя къ предѣламъ,

(2) $$ds = du + dv + dw + \ldots\ldots$$

Сіе уравненіе будучи раздѣлено на dx, доставитъ

(3) $$s' = u' + v' + w' + \ldots .$$

Сравнивъ формулу (2) или (3) съ уравненіемъ (1) окажется, что *производная функція или дифференціалъ суммы нѣсколькихъ функцій равняется суммѣ ихъ производныхъ функцій или ихъ дифференціаловъ.* Изъ сего правила мы выведемъ слѣдующія слѣдствія.

Во первыхъ, означивъ чрезъ m цѣлое число, а чрезъ a, b, $c \ldots p$, q, r постоянныя количества, найдемъ

(4) $d(u+v) = du+dv$, $d(u-v) = du-dv$, $d(au+bv) = adu+bdv$;

(5) $d(au+bv+cw+\ldots) = adu+bdv+cdw+\ldots$;

(6) $$\begin{cases} d(ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+px^2+qx+r) \\ = [max^{m-1}+(m-1)bx^{m-2}+(m-2)cx^{m-3}+\ldots+2px+q]dx. \end{cases}$$

Выраженіе $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+px^2+qx+r$, въ которомъ всѣ члены пропорціональны цѣлымъ степенямъ перемѣнной x, называется *цѣлою функціею* сей перемѣнной. Означивъ сію функцію буквою s, въ силу уравненія (6), получимъ,

$$s' = max^{m-1}+(m-1)bx^{m-2}+(m-2)cx^{m-3}+\ldots+2px+q.$$

И такъ, *для полученія производной какой нибудь цѣлой функціи, должно умножить каждый членъ на соотвѣтствующаго показателя перемѣнной, и уменьшить онаго единицею.* — Легко видѣть, что сія теорема существуетъ и для мнимыхъ величинъ x.

Теперь пусть будетъ

(7) $$s = uvw\ldots .$$

гдѣ функціи u, v, $w \ldots$ суть положительныя величины; взявъ логариѳмы получится

(8) $$l(s) = l(u)+l(v)+l(w)+\ldots .$$

Впрочемъ, каковы бы ни были u, v, $w \ldots$, какъ $s^2 = u^2v^2w^2\ldots$, то будетъ

(9) $$\tfrac{1}{2}\,l\,(s^2) = \tfrac{1}{2}\,l\,(u^2) + \tfrac{1}{2}\,l\,(v^2) + \tfrac{1}{2}\,l\,(w^2) + \ldots,$$

и приложивъ правило выражаемое формулою (8) или формулою (9), найдемъ

(10) $$\frac{ds}{s} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \text{ и проч.} \ldots$$

откуда выводимъ

(11) $$d\,(uvw\ldots) = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right)$$
$$= vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots.$$

Примѣры: $d\,(uv) = udv + vdu$, $d\,(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw$, $d\,.\,xl(x) = [1 + l(x)]\,dx$, $d(x^a e^{-x}) = x^a e^{-x}(\frac{a}{x} - 1)dx$, и проч.

Пусть будетъ

(12) $$s = \frac{u}{v}.$$

То взявъ дифференціалъ $l\,(s)$ или $\frac{1}{2}\,l\,(s^2)$, найдемъ

(13) $$\frac{ds}{s} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v},\quad ds = \frac{u}{v}\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right),$$

и наконецъ

(14) $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Можно дойти до того же самаго вывода, наблюдая что дифференціалъ $d\left(\frac{u}{v}\right)$ равняется $d\left(u\,.\,\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}\,du + u\,d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2}$. *Примѣры:* $d\,.\,\mathrm{tang}\,x = d\,.\,\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\,.\,d\sin x - \sin x\,.\,d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$, $d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{a\,dx}{x^2}$, $d\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{e^{ax}}{x}\left(a - \frac{1}{x}\right)dx$, $d\,\frac{l\,(x)}{x} = \frac{1 - l(x)}{x^2}\,dx$, $d\left(\frac{b}{a+x}\right) = \frac{-b\,dx}{(a+x)^2}$.

Ежели функціи u, v будутъ цѣлыя, то отношеніе $\frac{u}{v}$ приметъ названіе *раціональной дроби*. Легко опредѣлить дифференціалъ оной употребляя формулы (6) и (14).

Сыскавъ дифференціалы произведенія $uvw\ldots$ и частнаго числа $\frac{u}{v}$, легко будетъ найти дифференціалы многихъ другихъ выраженій, каковы суть u^v, $u^{\frac{1}{v}}$, u^{v^w}, и проч. . . . Дѣйствительно, найдется

полагая $s=u^v$; $l(s)=vl(u)$, $\frac{ds}{s}=v\frac{du}{u}+l(u)dv$, $ds=vu^{v-1}du+u^vl(u)dv$;

полагая $s=u^{\frac{1}{v}}$, $l(s)=\frac{1}{v}l(u)$, $\frac{ds}{s}=\frac{du}{uv}-l(u)\frac{dv}{v^2}$, $ds=u^{\frac{1}{v}-1}\frac{du}{v}-u^{\frac{1}{v}}l(u)\frac{dv}{v^2}$;

полагая $s=u^{v^w}$, $l(s)=v^wl(u)$, $ds=u^{v^w}v^w\left[\frac{du}{u}+\frac{w}{v}l(u)dv+l(u).l(v).dw\right]$;

и проч. . . . .

Примѣры: $d(x^x)=x^x[1+l(x)]dx$, $d(x^{\frac{1}{x}})=\frac{1-l(x)}{x^2}x^{\frac{1}{x}}dx$, $d.x^{x^x}=$ и проч. . . . .

Мы окончимъ сей урокъ разысканіемъ дифференціала *мнимой функціи*; сіе названіе дается каждому выраженію могущему принять видъ $u+v\sqrt{-1}$, гдѣ u и v означаютъ вещественныя функціи. Назовемъ *предѣломъ* мнимой функціи то выраженіе въ которое сія функція превратится, когда замѣнятся какъ вещественная ея часть такъ и коеффиціентъ у $\sqrt{-1}$ соотвѣтствующими имъ предѣлами; сверхъ того, распространимъ данныя нами опредѣленія касательно производныхъ функцій и дифференціаловъ вещественныхъ функцій и на мнимыя, то легко окажется, что уравненіе

$$s=u+v\sqrt{-1}$$

доставитъ слѣдующія формулы:

$$\Delta s=\Delta u+\Delta v\sqrt{-1},\quad \frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1},\quad \frac{\Delta s}{\alpha}=\frac{\Delta u}{\alpha}+\frac{\Delta v}{\alpha}\sqrt{-1},$$
$$s'=u'+v'\sqrt{-1},\quad ds=du+dv\sqrt{-1}.$$

Слѣдовательно

$$(1)\qquad d(u+v\sqrt{-1})=du+dv\sqrt{-1}.$$

Видъ сего послѣдняго уравненія сходенъ съ видомъ уравненій (4).

Для примѣра положимъ

$$s = \cos x + \sqrt{-1} \sin x;$$

найдется

$$ds = \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] dx = s \,.\, \sqrt{-1}\, dx.$$

Прибавимъ еще, что формулы (4), (5), (6), (11) и (14) будутъ имѣть мѣсто и тогда, когда постоянныя величины a, b, c . . . p, q, r, или функціи u, v, w . . ., заключающіяся въ сихъ формулахъ сдѣлаются мнимыми.

УРОКЪ ШЕСТОЙ

Употребленіе дифференціаловъ и производныхъ функцій при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ. Наибольшая и наименьшая величина функцій одной измѣняемой. Величины дробей представляющихся въ видѣ $\frac{0}{0}$.

Узнавъ какимъ образомъ сыскиваются производныя функціи и дифференціалы функцій одной перемѣнной, мы покажемъ употребленіе ихъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ.

1-я Задача. *Положимъ, что функція $y = f(x)$ есть непрерывная въ сопредѣльности частной величины $x = x_0$, спрашивается, оная функція будетъ ли увеличиваться или уменьшаться, съ увеличеніемъ или съ уменьшеніемъ, начиная отъ $x = x_0$, самой измѣняемой величины.*

Рѣшеніе. Пусть будутъ Δx, Δy, безконечно-малыя приращенія перемѣнныхъ x, y. Отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ имѣть предѣломъ $\frac{dy}{dx} = y'$. Изъ сего должно заключить, что для весьма малыхъ численныхъ значеній Δx, и для частной величины $x = x_0$, отношеніе $\frac{dy}{dx}$ будетъ положительное, ежели соотвѣтствующая ему величина y' есть количество конечное и положительное, а отрицательное, ежели сія величина y' будетъ конечное но отрицательное количество. Въ первомъ случаѣ, поелику безконечно малыя разности Δx, Δy, имѣютъ одинакой знакъ, то функція y будетъ увеличиваться вмѣстѣ съ перемѣнною x, начиная отъ $x = x_0$. Во второмъ случаѣ, по причинѣ того, что безконечно малыя разности имѣютъ противные знаки, функція y будетъ увеличиваться, когда перемѣнная x будетъ уменьшаться, и на противъ того, оная функціи съ увеличеніемъ измѣняемой будетъ уменьшаться.

Положимъ что функція $y = f(x)$ пребываетъ непрерывною между двумя данными предѣлами $x = x_0$ и $x = X$. Ежели измѣняемая величина x будетъ нечувствительно увеличиваться переходя отъ перваго предѣла ко второму, то функція y будетъ также увеличиваться, когда ея производная функція будетъ положительною; ежели же сія производная функція будетъ отрицательною, то y будетъ уменьшаться. И такъ, функція y можетъ, переставъ увеличиваться, начать уменьшаться, или, переставъ уменьшаться, начать увеличиваться, тогда только, когда производная ея функція y' перейдетъ изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, или на оборотъ. Но чтобы сей переходъ могъ имѣть мѣсто, то необходимо должно, выключая тотъ случай, когда y' сдѣлается прерывною функціею, чтобы оная функція обратилась въ нуль.

Когда какая нибудь величина функціи $f(x)$ превосходитъ всѣ сопредѣльныя съ нею величины, то-есть, всѣ тѣ, кои получатся, измѣняя безконечно мало перемѣнную x, то сія величина функціи называется *наиболѣшею.*

Когда же какая нибудь величина функціи $f(x)$ будетъ менѣе всѣхъ смежныхъ съ нею величинъ, то оная называется *наименѣшею.*

И такъ ясно, что ежели двѣ функціи $f(x)$, $f'(x)$ суть непрерывныя въ сопредѣльности данной величины перемѣнной x; то сія величина доставитъ *наиболѣшую* или *наименѣшую* величину $f(x)$, не иначе какъ уничтоживъ $f'(x)$.

2-я Задача. *Найти наиболѣшія и наименѣшія величины функціи одной перемѣнной.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ $f(x)$ предложенная функція. Разыщемъ сперва величины x, для которыхъ функція $f(x)$ сдѣлается прерывною. Каждой изъ сихъ величинъ будетъ соотвѣтствовать извѣстная величина самой функціи; и обыкновенно случается, что величина сія бываетъ или безконечное количество, или *наиболѣшая* или *наименѣшая* величина функціи.

Потомъ, найдемъ корни уравненія

$$(1) \qquad f'(x) = 0$$

и тѣ величины x, отъ которыхъ $f(x)$ дѣлается прерывною; изъ нихъ самыя примѣчательныя суть корни уравненія

$$(2) \qquad f'(x) = \pm \infty \text{ или } \frac{1}{f'(x)} = 0$$

Пусть будетъ $x = x_0$ одинъ изъ сихъ корней. Соотвѣтственная величина $f(x)$, то-есть $f(x_0)$ будетъ *наиболѣшая*, ежели въ сопредѣльности $x = x_0$, производная функція $f'(x)$ будетъ положительная для $x < x_0$, и отрицательная для $x > x_0$. Напротивъ того, $f(x_0)$ будетъ *наименѣшая*, когда производная функція $f'(x)$ будетъ отрицательная для $x < x_0$, и положительная для $x > x_0$. Наконецъ, ежели въ сопредѣльности $x = x_0$, производная функція $f'(x)$ будетъ постоянно положительная, или постоянно отрицательная, то количество $f(x_0)$ не будетъ ни *наиболѣшею* ни *наименѣшею* величиною.

Примѣры. Функціи $x^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{l(x)}$, при переходѣ величины x чрезъ нуль въ отрицательное состояніе, дѣлаются прерывными; онѣ изъ вещественныхъ становятся мнимыми; величина первой изъ сихъ функцій, для $x=0$, есть *наименьшая*, а величина второй функціи для той же величины измѣняемой x есть *наиболѣшая*.

Выраженія x^2. $x^{\frac{2}{3}}$, имѣющія своими производными: первое функцію переходящую чрезъ нуль изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, а второе функцію переходящую чрезъ безконечность изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, имѣютъ каждое *наименьшую* величину равную нулю. Что же касается до функцій x^3, $x^{\frac{1}{3}}$, коихъ производныя обращаются, для $x=0$, одна въ нуль, а другая въ безконечность, но сами остаются положительными для всѣхъ возможныхъ величинъ x, то онѣ не имѣютъ ни *наиболѣшей*, ни *наименьшей* величины.

Функція x^2+px+q, коей производная функція есть $2x+p$, получаетъ *наименьшую* величину $q-\frac{1}{4}p^2$, когда $x=\frac{1}{2}p$, что легко можно повѣрить, представивъ данную функцію въ слѣдующемъ видѣ: $(x+\frac{1}{2}p)^2+q-\frac{1}{4}p^2$.

Функція $\frac{A^x}{x}$, коей производная есть $\frac{A^x}{x}\left[\frac{1}{L(e)}-\frac{1}{x}\right]$, получаетъ *наименьшую* величину $\frac{e}{L(e)}$, когда $x=L(e)$, и когда A болѣе единицы.

Функція $\frac{L(x)}{x}$, коей производная есть $\frac{1}{x^2}\left[L(e)-L(x)\right]$, получаетъ *наиболѣшую* величину $\frac{L(e)}{e}$, когда $x=e$.

Функція $x^a \cdot e^{-x}$, коей производная есть $x^a \cdot e^{-x}\left(\frac{a}{x}-1\right)$, получаетъ *наиболѣшую* величину $a^a \cdot e^{-a}$, когда $x=a$.

3-я Задача. *Опредѣлить наклонность кривой линіи въ данной точкѣ?*

Рѣшеніе. Представимъ себѣ кривую линію, которой уравненіе между прямоугольными координатами есть $y = f(x)$. Хорда проведенная въ сей кривой изъ точки (x, y) (*) въ точку $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$, составляетъ съ осью x продолженною по направленію абсциссъ положительныхъ, два угла, одинъ острой, другой тупой, изъ коихъ первой измѣряетъ наклоненіе хорды къ оси x. Ежели вторая точка приближится на разстояніе безконечно-малое къ первой, то хорда чувствительно сольется съ касательною, проведенною къ кривой чрезъ первую точку; и наклоненіе хорды къ оси x, будетъ выражать наклоненіе касательной, или какъ то называютъ, *наклоненіе кривой линіи* къ оси x. И такъ, поелику уголъ наклонности хорды будетъ имѣть своимъ тангенсомъ численную величину отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то очевидно, что уголъ наклонности кривой линіи будетъ имѣть своимъ же тангенсомъ предѣлъ упомянутаго отношенія, то-есть, производную функцію $y' = \frac{dy}{dx}$.

Ежели y' равенъ нулю или безконечности, то касательная кривой линіи будетъ параллельна или перпендикулярна къ оси x. Сіе обыкновенно случается тогда, когда ордината y сдѣлается *наибольшею* или *наименьшею*.

Примѣры: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^m$, $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^a$, $y = A^x$, $y = \sin x$, и проч. . . .

(*) Мы означаемъ здѣсь точки посредствомъ ихъ координатъ, заключая ихъ между двумя скобками, что будемъ дѣлать и въ послѣдствіи. Часто также будемъ означать кривыя линіи или кривыя поверхности посредствомъ ихъ уравненій.

4-я Задача. *Требуется найти величину дроби, въ коей числитель и знаменатель суть функціи x, въ томъ случаѣ, когда для данной величины x оная дробь представится въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ $s = \frac{z}{y}$ предложенная дробь, въ коей y и z суть двѣ функціи x; положимъ, что для частной величины $x = x_0$ оная дробь превращается въ $\frac{0}{0}$, то есть, что ея числитель и знаменатель обращаются въ нули. Означимъ чрезъ Δx, Δy, Δz безконечно-малыя соотвѣтствующія приращенія x, y и z, то каковъ бы ни былъ x, получимъ

$$s = \frac{z}{y} = np.\ \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y},$$

для частной же величины $x = x_0$, будетъ

$$(3) \qquad s = np.\ \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}.$$

И такъ, искомая величина дроби s или $\frac{z}{y}$ будетъ равна отношенію $\frac{dz}{dy}$ или $\frac{z'}{y'}$.

Примѣры. Въ предположеніи $x = 0$, будетъ $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = 1$, $\frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x} = 1$; въ случаѣ $x = 1$, $\frac{l(x)}{x-1} = \frac{1}{x} = 1$, $\frac{x-1}{x^{n-1}} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n}$; и проч. . . .

УРОКЪ СЕДЬМОЙ.

О выраженіяхъ представляющихся въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, *и проч. Взаимная зависимость между отношеніемъ конечныхъ разностей и производной функціи.*

Въ предъидущемъ урокѣ мы разсматривали функціи измѣняемой величины x, которыя, для частнаго значенія сей измѣняемой принимали неопредѣленной видъ $\frac{0}{0}$. Часто случается что функція представляется въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞, $0 \times \infty$, 0^0, и проч. . . . И такъ, предположивъ что $f(x)$ увеличивается до безконечности вмѣстѣ съ x, величины функцій

$$\frac{f(x)}{x}, \quad [f(x)]^{\frac{1}{x}},$$

для $x = \infty$, представляются въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0. Сіи величины могутъ быть опредѣлены помощію двухъ теоремъ доказанныхъ нами въ *Analyse algébrique* (Гл. II. стр. 48 и 53). Мы ограничимся нѣсколькими примѣрами, которые покажутъ какимъ образомъ можно рѣшать задачи сего рода.

Пусть $\frac{A^x}{x}$ будетъ предложенная функція, въ коей A больше единицы; и положимъ что ищется истинная величина сей функціи для $x = \infty$. Поелику для величинъ x превосходящихъ $\frac{1}{l(A)}$, производная функція есть положительная, то предложенная функція будетъ увеличиваться вмѣстѣ съ x.

Сверхъ того, изобразивъ чрезъ m цѣлое число могущее увеличиваться до безконечности, очевидно что выраженіе

$$\frac{A^m}{m}=\frac{(1+A-1)^m}{m}=\frac{1}{m}+(A-1)+\frac{m-1}{2}(A-1)^2+\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}(A-1)^3+\ldots.$$

будетъ имѣть предѣломъ положительную безконечность. Слѣдовательно найдется

(1) $$\text{пр.}\,\frac{A^x}{x}=\infty.$$

Изъ сей послѣдней формулы слѣдуетъ, что *неопредѣленно-степенное количество* A^x *увеличивается несравненно скорѣе нежели самая перемѣнная* x*, когда* A *будетъ больше единицы.*

Разыщемъ истинную величину функціи $\frac{L(x)}{x}$ для $x=\infty$, принявъ за основаніе логариѳмовъ число A превышающее единицу. Положивъ $y=L(x)$, найдется $\frac{L(x)}{x}=\frac{y}{A^y}$, и какъ функція $\frac{y}{A^y}$ будетъ имѣть предѣломъ $\frac{1}{\infty}=0$, то изъ сего заключаемъ что

(2) $$\text{пр.}\,\frac{L(x)}{x}=0.$$

И такъ, *въ системѣ коей основаніе превышаетъ единицу, логариѳмы чиселъ увеличиваются гораздо медлѣннѣе нежели самыя числа.*

Опредѣлимъ еще величину $x^{\frac{1}{x}}$ для $x=\infty$. Ясно что $x^{\frac{1}{x}}=A^{\frac{L(x)}{x}}$ слѣдовательно

(3) $$\text{пр.}\,x^{\frac{1}{x}}=A^0=1.$$

Ежели въ формулахъ (2) и (3), замѣнимъ x дробью $\frac{1}{x}$, то увидимъ, что функціи $xL(x)$ и x^x приближаются, когда x уменшаясь стремится къ нулю, первая къ предѣлу 0, а другая къ предѣлу 1.

Мы покажемъ теперь отношеніе (*) существующее между производною функціею $f'(x)$ и разностнымъ отношеніемъ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Положимъ $x=x_0$, и $x_0+h=X$, то предъидущее разностное отношеніе получитъ слѣдующій видъ $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$, и потомъ легко будетъ доказать слѣдующую теорему:

Теорема. *Положивъ что функція $f(x)$ есть непрерывная между предѣлами $x=x_0$ и $x=X$, и означивъ чрезъ A наибольшую, а чрезъ B наименьшую величину ея производной функціи $f'(x)$ между тѣми же предѣлами, окажется что разностное отношеніе*

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \tag{4}$$

необходимо будетъ заключаться между предѣлами A и B.

Доказательство. Означивъ буквами δ, ε, безконечно малыя числа, изъ коихъ первое пусть будетъ такого рода, что для численныхъ величинъ i меньшихъ нежели δ, и для какой нибудь величины x, заключающейся между предѣлами x_0, X, отношеніе

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

пребываетъ всегда болѣе $f'(x)-\varepsilon$, и менѣе $f'(x)+\varepsilon$. Ежели между предѣлами x_0, X, вставимъ $n-1$ новыхъ величинъ перемѣнной x, а именно,

$$x_1, \quad x_2, \; \ldots\ldots \; x_{n-1},$$

такимъ образомъ, чтобы разность $X-x_0$ разложена была на части

$$x_1-x_0, \quad x_2-x_1, \; \ldots\ldots \; X-x_{n-1},$$

(*) По сему предмету можно читать Mémoire de M. *Ampère*, *Journal de l'Ecole polytechnique* 13-e cahier, page 148—181.

которыя, будучи всѣ съ однимъ знакомъ, имѣли бы численныя величины меньшія нежели δ; то дроби

$$(5) \qquad \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{f(X)-f(x_{n-1})}{X-x_{n-1}},$$

заключаясь, первая между предѣлами $f'(x_0)-\varepsilon$, $f'(x_0)+\varepsilon$, вторая между предѣлами $f'(x_1)-\varepsilon$, $f'(x_1)+\varepsilon$, и проч. .... будутъ всѣ болѣе количества $A-\varepsilon$, но менѣе количества $B+\varepsilon$. Сверхъ того, дроби (5) имѣя знаменателей съ однимъ знакомъ, то раздѣливъ сумму ихъ числителей на сумму ихъ знаменателей, получимъ среднюю дробь; то есть, такую которая будетъ заключаться между наименьшею и наибольшею изъ оныхъ дробей (*смотри* Analyse algébrique, примѣчаніе II, теорема 12, или примѣч. I переводчика). Но какъ выраженіе (4) есть ничто иное какъ средняя дробь, то слѣдовательно оно будетъ заключаться между предѣлами $A-\varepsilon$ и $B+\varepsilon$: и какъ сіе заключеніе имѣетъ мѣсто сколь бы мало ни было число ε, то можно утвердить, что выраженіе (4) будетъ заключаться между предѣлами A и B.

Слѣдствіе. Ежели производная функція $f'(x)$ сама будетъ непрерывная между предѣлами $x=x_0$, $x=X$, то переходя отъ однаго предѣла къ другому, сія функція будетъ измѣняться, заключаясь всегда между величинами A и B, и приметъ послѣдовательно всѣ промежуточныя величины. Слѣдовательно, всякое количество между A и B заключающееся, будетъ равно нѣкоторой величинѣ $f'(x)$ соотвѣтствующей величинѣ x содержимой между предѣлами x_0 и $X=x_0+h$, или, что все равно, величинѣ x имѣющей видъ:

$$x_0+\theta h = x_0+\theta(X-x_0),$$

гдѣ θ означаетъ число меньшее единицы. Приложивъ сіе примѣчаніе къ выраженію (4) окажется, что всегда существуетъ такая величина θ, которая заключаясь между предѣлами 0 и 1, удовлетворяетъ уравненію.

$$\frac{f(X)-(x_0)}{X-x_0}=f'[x_0+\theta(X-x_0)],$$

или, что все равно, слѣдующему

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h). \tag{6}$$

Сія послѣдняя формула должна существовать, какую бы величину x мы ни изобразили x_0, лишь бы только функція $f(x)$ и ея производная $f'(x)$ были непрерывными между предѣлами $x=x_0$, $x=x^0+h$; при семъ условіи будемъ имѣть вообще,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h), \tag{7}$$

потомъ подставивъ Δx вмѣсто h, получимъ:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\,.\,\Delta x. \tag{8}$$

Замѣтимъ, что въ уравненіяхъ (7) и (8), θ означаетъ всегда неизвѣстное число, но меньшее единицы, какъ было сказано выше.

Примѣры, Приложивъ формулу (7) къ функціямъ x^a, $l(x)$, найдется

$$\frac{(x+h)^a-x^a}{h}=a(x+\theta h)^{a-1}, \quad \frac{l(x+h)-l(x)}{h}=\frac{1}{x+\theta h}.$$

УРОКЪ ОСЬМОЙ.

Дифференціалы функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Частныя производныя функціи и частные дифференціалы.

Пусть $u = f(x, y, z \ldots.)$ будетъ функція нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ величинъ $x, y, z \ldots.$ Означимъ буквою i безконечно-малое количество и чрезъ

$$\varphi(x, y, z \ldots), \ \chi(x, y, z \ldots..), \ \psi(x, y, z \ldots.) \text{ и проч.} \ldots$$

предѣлы къ коимъ приближаются отношенія

$$\frac{f(x+i, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots)}{i}, \ \frac{f(x, y+i, z \ldots) - f(x, y, z \ldots)}{i},$$
$$\frac{f(x, y, z+i \ldots) - f(x, y, z \ldots)}{i}, \text{ и проч.} \ldots$$

въ то время когда i приближается къ нулю. $\varphi(x, y, z \ldots)$ будетъ производная функція выраженія $u = f(x, y, z \ldots)$, разсматривая въ ономъ измѣняемымъ одно только количество x; сія производная называется *частною производною* количества u относительно къ x. Функціи $\chi(x, y, z \ldots)$, $\psi(x, x, z \ldots)$ и проч. называются частными производными функціи u относительно къ y, z.. и проч....

Теперь, вообразимъ что измѣняемыя $x, y, z \ldots.$ получатъ какія либо приращенія Δx, Δy, $\Delta z \ldots.$ и пусть Δu будетъ соотвѣтствующее приращеніе функціи u, такъ что

$$(1) \quad \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots.) - f(x, y, z \ldots).$$

Ежели приращеніямъ Δx, Δy, $\Delta z \ldots.$ припишутся конечныя величины h, k, $l \ldots.$ то величина Δu, выражаемая уравненіемъ (1) будетъ называться *конечною разностію* функціи u; оная бываетъ обыкновенно количество конечное. Ежели напротивъ того, положимъ

(2) $\Delta x = \alpha h$, $\Delta y = \alpha k$, $\Delta z = \alpha l$, и проч.....

гдѣ α означаетъ безконечно-малое число, то величина Δu, именно,

$$f(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ z+\alpha l,\ldots.)-f(x,y,z\ldots.)$$

будетъ почти всегда количество безконечно-малое; но раздѣливъ сію величину на α, получится дробь

(3) $$\frac{\Delta u}{\alpha}=\frac{f(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ z+\alpha l\ldots)-f(x,\ y,\ z\ldots)}{\alpha}$$

которая, вообще говоря, будетъ стремится къ предѣлу разнствующему отъ нуля. Предѣлъ сей называется *полнымъ дифференціаломъ* или просто *дифференціаломъ* функціи u. Его означаютъ буквою d, такимъ образомъ

$$du \text{ или } df(x,\ y,\ z\ldots.)$$

И такъ, сколько бы ни было перемѣнныхъ независимыхъ заключающихся въ функціи u, дифференціалъ оной всегда опредѣлится формулою

(4) $$du = пр.\ \frac{\Delta u}{\alpha}.$$

Полагая послѣдовательно $u = x$, $u = y$, $u = z$, и проч...; получимъ изъ уравненій (2) и (4)

(5) $dx = h$, $dy = k$, $dz = l$, и проч....

Слѣдовательно, дифференціалы перемѣнныхъ независимыхъ количествъ x, y, z.... суть не иное что какъ постоянныя величины h, k, l....

Ежели частныя производныя функціи $f(x,y,z\ldots)$ будутъ извѣстны, то легко опредѣлится полный ея дифференціалъ. И дѣйствительно, ежели въ сей функціи перемѣнныя x, y,

$z\dots$ будутъ одна послѣ другой получать какія нибудь приращенія Δx, Δy, $\Delta z\dots$, то изъ формулы (8) предъидущаго урока, выведемъ слѣдующія уравненія

$$f(x+\Delta x,\ y,\ z..)-f(x,\ y,\ z..)=\Delta x\,\varphi(x+\theta_1\Delta x,\ y,\ z..),$$
$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z..)-f(x+\Delta x, y, z..)=\Delta y\,\chi(x+\Delta x, y+\theta_2\Delta y, z..),$$
$$f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z..)-f(x+\Delta x,y+\Delta y,z..)=\Delta z\psi(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\theta_3\Delta z..),$$

и проч. . . . .; гдѣ θ_1, θ_2, θ_3, . . . суть количества неизвѣстныя, но заключающіяся между нулемъ и единицею. Сложивъ всѣ сіи уравненія почленно, получится

$$(6)\quad \begin{aligned} f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z\dots)-f(x,y,z\dots)= \\ \Delta x\cdot\varphi(x+\theta_1\Delta x, y, z\dots) \\ +\Delta y\cdot\chi(x+\Delta x,\ y+\theta_2\Delta y,\ z\dots) \\ +\Delta z\cdot\psi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\theta_3\Delta z\dots)+ \text{ и проч.}\end{aligned}$$

Въ семъ послѣднемъ уравненіи вмѣсто перваго члена можно подставить Δu; полагая же послѣ сего подстановленія $\Delta x=\alpha h$, $\Delta y=\alpha k$, $\Delta z=\alpha l$, и раздѣляя потомъ обѣ части на α, получимъ слѣдующую формулу

$$(7)\quad \frac{\Delta u}{\alpha}=h.\varphi(x+\theta_1\alpha h, y, z\dots)+k.\chi(x+\alpha h, y+\theta_2\alpha k, z\dots.)$$
$$+l.\psi(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ z+\theta_3\alpha l\dots)+ \text{ и проч.,}$$ изъ которой, перейдя къ предѣламъ и подставивъ dx, dy, $dz\dots$, вмѣсто h, k, $l\dots$, найдется

$$(8)\quad du=\varphi(x,y,z\dots)dx+\chi(x,y,z\dots)dy+\psi(x,y,z\dots.)dz+ \text{ и проч.}$$

Примѣры: $d(x+y+z\dots.)=dx+dy+dz+\dots.$, $d(x-y)=dx-dy$, $d(ax+by+cz\dots.)=adx+bdy+cdz\dots$, $d(xyz\dots)=yz..dx+xz..dy+xy..dz+\dots$, $d(x^a y^b\dots)=x^a y^b\dots(a\frac{dx}{x}+b\frac{dy}{y}+\dots)$, $d(\frac{x}{y})=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, $d.x^y=yx^{y-1}dx+x^y l(x)dy$, и проч.

Замѣтимъ, что въ величинѣ du доставляемой уравненіемъ (8), членъ $\varphi(x, y, z\ldots)dx$ есть дифференціалъ функціи $u = f(x, y, z\ldots)$ разсматривая въ оной измѣняемымъ одно только количество x, прочія же величины y, $z\ldots$ принимая за постоянныя. По сей то причинѣ членъ сей называется *частнымъ дифференціаломъ* функціи u, взятымъ относительно къ x. Равнымъ образомъ и $\chi(x, y, z\ldots)dy$, $\psi(x, y, z\ldots)dz, \ldots$ суть частныя дифференціалы функціи u относительно къ y, къ $z, \ldots$ Означивъ сіи частныя дифференціалы буквою d, и подписавъ подъ оной ту измѣняемую величину, къ коей дифференціалъ относится, слѣдующимъ образомъ

$$d_x u, \quad d_y u \quad d_z u, \ldots \text{ и проч.}$$

получимъ

$$(9) \quad \varphi(x, y, z\ldots) = \frac{d_x u}{dx}, \ \chi(x, y, z\ldots) = \frac{d_y u}{dy}, \ \psi(x, y, z\ldots) = \frac{d_z u}{dz}, \text{ и проч}\ldots$$

и уравненіе (8) можно будетъ представить или въ видѣ

$$(10) \qquad du = d_x u + d_y u + d_z u + \text{ и проч.},$$

или въ слѣдующемъ

$$(11) \qquad du = \frac{d_x u}{dx}dx + \frac{d_y u}{dy}dy + \frac{d_z u}{dz}dz + \ldots$$

Въ уравненіяхъ (9) буквы поставленныя подъ d для сокращенія не пишутся, а частныя производныя функціи u, взятыя относительно къ x, y, $z\ldots$ изображаются знакоположеніями

$$(12) \qquad \frac{du}{dx}, \ \frac{du}{dy}, \ \frac{du}{dz}, \text{ и проч.}$$

гдѣ $\frac{du}{dx}$ не будетъ уже выражать полнаго дифференціала du раздѣленнаго на dx; и тогда, для означенія частнаго дифференціала количества u взятаго въ разсужденіи x, должно употребить знакоположеніе $\frac{du}{dx}dx$ въ коемъ нельзя сократить числителя съ знаменателемъ. Въ силу сихъ условій формула (11) приводится къ

$$(13) \qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \text{ и проч....}$$

Но какъ въ сей послѣдней формулѣ уже нельзя уничтожить дифференціаловъ dx, dy, dz,... то уравненіе (10) никакимъ другимъ замѣнить не можно.

Данныя нами опредѣленія и формулы, можно, безъ затрудненія, распространить и на тотъ случай когда функція сдѣлается мнимою. Такъ, напримѣръ, полагая $u = x + y\sqrt{-1}$, частныя производныя функціи u, и ея полный дифференціалъ будутъ относительно даны уравненіями

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{du}{dy} = \sqrt{-1}, \quad du = dx + \sqrt{-1}\, dy.$$

Наконецъ, покажемъ весьма простое средство приводить изчисленіе полныхъ дифференціаловъ къ изчисленію производныхъ функцій. Ежели въ выраженіи $f(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ z+\alpha l, ...)$ примемъ одно только количество α за перемѣнное, и въ слѣдствіе сего положимъ

$$(14) \qquad f(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ z+kl\ ....) = F(\alpha),$$

то будетъ, не только

$$(15) \qquad u = F(o),$$

но и $\Delta u = F(\alpha) - F(o)$, а посему

$$(16) \qquad du = np.\ \frac{F(\alpha)-F(o)}{\alpha} = F'(o).$$

И такъ, чтобъ составить полный дифференціалъ du, стоитъ только найти частную величину производной функціи $F'(\alpha)$, для $\alpha = o$.

УРОКЪ ДЕВЯТЫЙ.

Объ употребленіи частныхъ производныхъ при дифференцированіи сложныхъ функцій. Дифференціалы неявныхъ функцій.

Пусть будетъ $s = F(u, v, w \dots)$ какая нибудь функція перемѣнныхъ количествъ $u, v, w \dots$ кои сами суть функціи измѣняемыхъ независимыхъ величинъ $x, y, z \dots$: то s будетъ *сложная функція* сихъ послѣднихъ перемѣнныхъ; и ежели означимъ чрезъ $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ произвольныя приращенія количествъ $x, y, z \dots$ то соотвѣтствующія имъ приращенія $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \dots \Delta s$ функцій $u, v, w, \dots s$ будутъ имѣть между собою слѣдующее отношеніе:

$$(1)\quad \Delta s = F(u + \Delta u,\ v + \Delta v,\ w + \Delta w, \dots) - F(u, v, w \dots).$$

Сверхъ того означимъ чрезъ $\Phi(u, v, w \dots)$, $X(u, v, w \dots)$, $\Psi(u, v, w \dots), \dots$ частныя производныя функціи $F(u, v, w \dots)$ взятыя относительно къ $u, v, w \dots$ Но какъ уравненіе (6) предъидущаго урока имѣетъ мѣсто для какихъ нибудь величинъ перемѣнныхъ $x, y, z \dots$ и ихъ приращеній $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$, то замѣнивъ $x, y, z \dots$ величинами $u, v, w \dots$, а функцію f функціею F, получится

$$(2)\quad F(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w, \dots) - F(u, v, w \dots) = \Delta u\, \Phi(u+\theta_1 \Delta u, v, w \dots) + \Delta v\, X(u+\Delta u, v+\theta_2 \Delta v, w, \dots) + \Delta w\, \Psi(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\theta_3 \Delta w \dots) + \text{и проч.}$$

Въ семъ послѣднемъ уравненіи $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ означаютъ какъ и прежде количества неизвѣстныя, но меньшія единицы. Теперь, полагая $\Delta x = ah = adx$, $\Delta y = ah = ady$, $\Delta z = al = adz, \ldots$, и раздѣляя на α обѣ части уравненія (2), найдемъ

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta s}{\alpha} = \Phi(u+\theta_1 \alpha h, v, w\ldots)\frac{\Delta u}{\alpha} + X(u+\alpha h, v+\theta_2 \alpha k, w\ldots)\frac{\Delta v}{\alpha} \\ + \Psi(u+\alpha h, v+\alpha k, w+\theta_3 \alpha l\ldots)\frac{\Delta w}{\alpha} + \text{ и проч.,} \end{aligned} \right.$$

и наконецъ, полагая $\alpha = 0$,

$$(4)\quad ds = \Phi(u, v, w\ldots)\,du + X(u, v, w\ldots)\,dv + \Psi(u, v, w\ldots)\,dw + \text{ и проч.}$$

Величина ds данная уравненіемъ (4) сходствуетъ съ величиною du доставляемою уравненіемъ (8) предъидущаго урока. Главное различіе состоитъ въ томъ, что дифференціалы dx, dy, $dz, \ldots$ содержащіеся въ величинѣ du суть постоянные произвольные, дифференціалы же du, dv, $dw \ldots$ заключающіеся въ величинѣ ds суть функціи перемѣнныхъ независимыхъ x, y, $z \ldots$ и произвольныхъ постоянныхъ величинъ dx, dy, $dz \ldots$

Приложивъ формулу (4) къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ, найдемъ

$$d(u+v+w\ldots) = du+dv+dw\ldots,\quad d(u-v) = du-dv,\quad d(au+bv+cw\ldots) = adu+bdv+cdw\ldots,\quad d(uvw\ldots) = vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},\quad du^v = vu^{v-1}\,du + u^v\,l(u)\,dv\ldots,\ \text{ и проч.} \ldots$$

Мы уже прежде вывели сіи уравненія (*смотри* 5* урокъ) положивъ что u, v, $w \ldots$ суть функціи одной перемѣнной независимой x; а теперь видимъ, что сіи уравненія имѣютъ мѣсто, сколько бы ни было перемѣнныхъ независимыхъ количествъ.

Уравненіе (4) можно вывести изъ формулы (10) предъидущаго урока, въ томъ частномъ случаѣ, когда величины u, v, $w \ldots$ будутъ: первая, функція одной измѣняемой x, вторая, одной измѣняемой y, третья, одной измѣняемой z.... И дѣйствительно, оная формула доставляетъ

(5) $$ds = d_x s + d_y s + d_z s + \text{ и проч.} \dots$$

И какъ сверхъ того, по предположенію, количество x заключается въ одной только величинѣ u, то разсматривая s, какъ функцію x, формула (10) 4^{го} урока дастъ

$$d_x s = d_x F(u, v, w \dots) = \Phi(u, v, w \dots)\, d_x u = \Phi(u, v, w \dots)\, du;$$

равнымъ образомъ найдется

$$d_y s = X(u, v, w \dots)\, dv, \quad d_z s = \Psi(u, v, w \dots)\, dw, \text{ и проч.}$$

и подставивъ сіи величины $d_x s$, $d_y s$, $d_z s \dots$ въ формулу (5), ясно что оная будетъ одинакова съ уравненіемъ (4).

Теперь пусть будетъ r другая функція перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z.... Ежели, для всѣхъ возможныхъ величинъ сихъ измѣняемыхъ, будемъ имѣть

(6) $$s = r,$$

то можно будетъ заключить что

(7) $$ds = dr.$$

Въ частномъ случаѣ когда функція r или бываетъ равна нулю, или постоянной величинѣ c, найдется $dr = 0$; и потомъ уравненіе

(8) $$s = 0, \quad \text{или} \quad s = c,$$

доставитъ слѣдующее

(9) $$ds = 0.$$

Уравненія (7) и (9) называются *дифференціальными уравненіями*. Второе можетъ быть представлено въ видѣ

(10) $$\Phi(u,v,w\dots)\,du + X(u,v,w\dots)\,dv + \Psi(u,v,w\dots)\,dw + \dots = 0,$$

и имѣетъ мѣсто и тогда, когда нѣкоторыя изъ функцій u, v, w ... сдѣлаются равными нѣкоторымъ изъ измѣняемыхъ независимыхъ x, y, z... Такъ, напримѣръ, найдется

полагая $F(x, v) = 0$, $\Phi(x, v)\, dx + X(x, v)\, dv = 0$;
полагая $F(x,y,w) = 0$, $\Phi(x,y,w)dx + X(x,y,w)dy + \Psi(x,y,w)dw = 0$;
и проч. Очевидно что въ сихъ послѣднихъ уравненіяхъ, v есть неявная функція перемѣнной x, а w неявная функція перемѣнныхъ x, y, и проч. . . .

Также, положивъ что перемѣнныя x, y, z . . . , вмѣсто того чтобъ быть независимыми, будутъ сопряжены между собою уравненіемъ

$$(11) \qquad f(x, y, z \ldots) = 0$$

то, употребивъ знакоположенія приняты нами въ предъидущемъ урокѣ, получимъ дифференціальное уравненіе

$$(12) \quad \varphi(x,y,z\ldots)dx + \chi(x,y,z\ldots)dy + \psi(x,y,z\ldots)dz + \ldots = 0,$$

изъ котораго можно будетъ опредѣлить дифференціалъ одной изъ перемѣнныхъ величинъ, принимаемыхъ за неявную функцію всѣхъ прочихъ. Такъ, напримѣръ, найдется,

полагая $x^2 + y^2 = a^2$, $x dx + y dy = 0$, $dy = -\frac{x}{y} dx$;

полагая $y^2 - x^2 = a^2$, $y dy - x dx = 0$, $dy = \frac{x}{y} dx$;

полагая $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $xdx + ydy + zdz = 0$, $dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy$.

Но какъ при томъ имѣемъ, въ первомъ случаѣ, $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, а во второмъ, $y = \pm\sqrt{a^2 + x^2}$, то изъ предъидущихъ формулъ выведемъ

$$(13) \quad d(\sqrt{a^2 - x^2}) = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}};$$

что легко можно повѣрить.

Означивъ буквою u функцію $f(x, y, z \ldots)$, уравненія (11) и (12) могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ: $u = 0$, $du = 0$.

Ежели бы перемѣнныя x, y, z . . . . , были сопряжены не однимъ уравненіемъ $u = 0$, но двумя условными уравненіями

(14) $$u = 0, \quad v = 0,$$

тогда получили бы два дифференціальныхъ уравненія

(15) $$du = 0, \quad dv = 0,$$

посредствомъ коихъ могли бы опредѣлить дифференціалы двухъ перемѣнныхъ, принимаемыхъ за неявныя функціи всѣхъ прочихъ.

И вообще, ежели n перемѣнныхъ $x, y, z \ldots$ сопряжены будутъ m условными уравненіями

(16) $$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \text{ и проч.} \ldots.$$

то будемъ имѣть m дифференціальныхъ уравненій

(17) $$du = 0, \quad dv = 0, \quad dw = 0, \text{ и проч.} \ldots.$$

помощію коихъ можно будетъ опредѣлить дифференціалы m измѣняемыхъ величинъ, принимаемыхъ за неявныя функціи всѣхъ остальныхъ.

УРОКЪ ДЕСЯТЫЙ.

Теорема однородныхъ функцій. Наибольшія и наименьшія величины *функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ.*

Вообразимъ функцію нѣсколькихъ измѣняемыхъ величинъ, и положимъ что, увеличивъ или уменьшивъ всѣ измѣняемыя количества въ данномъ отношеніи, получаемъ какую нибудь степень сего отношенія помноженную на самую функцію, то сія функція будетъ называться *однородною.* Степень даннаго отношенія, будетъ *измѣреніе* или *степень* предложенной функціи. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что $f(x, y, z \ldots)$ будетъ однородная функція степени a, перемѣнныхъ $x, y, z \ldots$ когда означивъ чрезъ t новую измѣняемую, получимъ для всѣхъ возможныхъ величинъ t,

(1) $$f(tx,\ ty,\ tz\ldots) = t^a f(x,\ y,\ z\ldots).$$

Теорему однородныхъ функцій можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Теорема. *Когда частныя производныя какой нибудь однородной функціи степени a, относительно ко всѣмъ измѣняемымъ величинамъ, соотвѣтственно помножатся на самыя измѣняемыя, то сумма всѣхъ сихъ произведеній будетъ равняться количеству a, помноженному на самую предложенную функцію.*

Доказательство. Пусть будутъ $u = f(x, y, z \ldots)$ данная функція, и $\varphi(x, y, z \ldots)$, $\chi(x, y, z \ldots)$, $\psi(x, y, z \ldots)$ и проч.... частныя производныя оной относительно къ x, къ y, къ z, и проч.... Взявъ дифференціалы обѣихъ частей уравненія

(1), принимая въ немъ только t за перемѣнную величину, получимъ

$$\varphi(tx, ty, tz\ldots)\,x\,dt + \chi(tx, ty, tz\ldots)\,y\,dt + \psi(tx, ty, tz\ldots)\,z\,dt + \ldots = at^{a-1}f(x, y, z\ldots)\,dt;$$

потомъ, раздѣливъ на dt, и положивъ $t = 1$,

(2) $x\varphi(x, y, z..) + y\chi(x, y, z..) + z\psi(x, y, z..) + .. = af(x, y, z..)$,

или, что все равно,

(3) $$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = au.$$

Слѣдствіе. Для однородной функціи степени нуль, будетъ

(4) $$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = 0.$$

Примѣры. Приложить теорему къ функціямъ $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ $L\left(\frac{x}{y}\right)$.

Когда вещественная функція многихъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, $z\ldots$ получитъ величину превосходящую всѣ сопредѣльныя съ нею величины, то есть, всѣ тѣ, которыя получились бы, измѣняя безконечно мало x, y, $z\ldots$; то сія величина функціи называется *наиболвшею величиною.*

Когда же какая нибудь величина вещественной функціи x, y, $z\ldots$ будетъ менѣе всѣхъ сопредѣльныхъ съ нею величинъ, то она принимаетъ названіе *наименвшей величины.*

Изысканіе *наиболвшихъ* и *наименвшихъ величинъ* функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ, легко приводится къ изысканію *наиболвшихъ* и *наименвшихъ величинъ* функціи одной перемѣнной. И въ самомъ дѣлѣ, предположимъ что $u = f(x, y, z\ldots)$ сдѣлается *наиболвшею величиною* для нѣкоторыхъ опредѣленныхъ величинъ количествъ x, y, $z\ldots$; то для сихъ частныхъ значеній, и для безконечно-малыхъ численныхъ величинъ α, получимъ

(5) $\quad f(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ z+\alpha l, \ldots) < f(x,\ y,\ z \ldots),$

какія бы впрочемъ ни были конечныя постоянныя h, k, $l \ldots$, лишь бы только онѣ взяты были такимъ образомъ, чтобъ первая часть формулы (5) оставалась вещественною. Положивъ для краткости

(6) $\quad f(x+\alpha h,\ y+\alpha k,\ z+\alpha l, \ldots) = F(\alpha),$

формула (5) приведется къ слѣдующей

(7) $\quad F(\alpha) < F(o).$

Сіе неравенство должно имѣть мѣсто для положительныхъ и отрицательныхъ величинъ α; откуда слѣдуетъ, что измѣняя одно только количество α, функція $F(\alpha)$ будетъ имѣть наибольшую величину для $\alpha = o$.

Такимъ же образомъ докажется, что ежели $f(x,\ y,\ z \ldots)$ получитъ *наименьшую величину* для нѣкоторыхъ частныхъ значеній x, y, $z \ldots$, то соотвѣтствующая величина функціи $F(\alpha)$ будетъ *наименьшая* для $\alpha = o$.

Теперь замѣтимъ, что ежели обѣ функціи $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ будутъ непрерывныя относительно къ α, въ сопредѣльности величины $\alpha = o$, то сія величина не можетъ дать ни *наибольшей* ни *наименьшей величины* для первой функціи, ежели не уничтожитъ вторую (*смотри* урокъ 6-й), то есть, должно быть

(8) $\quad F'(o) = o.$

Сверхъ того, подставивъ dx, dy, $dz \ldots$ вмѣсто h, k, $l \ldots$, уравненіе (8) получитъ видъ

(9) $\quad du = o,$

(*смотри* урокъ 8-й). Къ тому же, поелику функціи $F(\alpha)$ и $F'(\alpha)$ суть не иное что какъ u и du, когда въ оныя поставимъ $x+\alpha h$ вмѣсто x, $y+\alpha k$ вмѣсто y, $z+\alpha l$ вмѣсто $z \ldots$; то ясно, что ежели обѣ сіи функціи будутъ прерывныя относительно къ α, въ сопредѣльности величины $\alpha = o$, въ такомъ случаѣ оба выраженія u и du, принимаемыя за функціи перемѣнныхъ $x, y, z\ldots$ будутъ также прерывные относительно къ симъ перемѣннымъ въ сопредѣльности частныхъ величинъ имъ приписанныхъ. Присовокупивъ къ симъ замѣчаніямъ сказанное выше, надлежитъ заключитъ что величины $x, y, z\ldots$ могущія доставитъ *наибольшія* или *наименьшія величины* функціи u, суть или тѣ, отъ которыхъ u и du дѣлаются прерывными, или тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію (9) независимо отъ постоянныхъ величинъ $dx, dy, dz\ldots.$ Теперь легко будетъ рѣшитъ слѣдующій вопросъ.

Задача. *Найти наибольшія и наименьшія величины функціи многихъ перемѣнныхъ.*

Рѣшеніе. Пустъ будетъ $u=f(x, y, z\ldots)$ предложенная функція. Сперва найдемъ величины $x, y, z\ldots$ отъ которыхъ функція u или du дѣлается прерывною; къ симъ величинамъ должно отнести тѣ, кои выводятся изъ формулы

$$du=\pm\infty. \tag{10}$$

Потомъ, сыщемъ величины $x, y, z\ldots$ удовлетворяющія уравненію (9), независимо отъ постоянныхъ величинъ $dx, dy, dz\ldots$ Сіе уравненіе можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz+\ldots=0, \tag{11}$$

откуда получаемъ

$$\frac{du}{dx}=0,\ \frac{du}{dy}=0,\ \frac{du}{dz}=0, \text{ и проч.}\ldots; \tag{12}$$

и дѣйствительно, $dx, dy, dz\ldots.$ будучи независимы и какіе нибудь, первое изъ сихъ уравненій получится полагая $dx=1$, $dy=0$, $dz=0\ldots$; второе, полагая $dx=0$, $dy=1$, $dz=0\ldots$; и проч.... Замѣтимъ, что какъ число уравненій (12) равно числу неизвѣстныхъ $x, y, z\ldots$, то чаще всего получимъ опредѣленное число сихъ неизвѣстныхъ (*).

Вообразимъ какую нибудь систему величинъ $x, y, z\ldots$ удовлетворяющихъ уравненіямъ (12); означимъ чрезъ $x_0, y_0, z_0\ldots$ величины принадлежащія къ сей системѣ. Соотвѣтствующая величина функціи $f(x, y, z\ldots)$, именно, $f(x_0, y_0, z_0\ldots)$ будетъ *наибольшая*, когда разность

$$(13)\quad f(x_0+\alpha l,\ y_0+\alpha k,\ z_0+\alpha l\ldots)-f(x_0,\ y_0,\ z_0\ldots)$$

для безконечно-малыхъ численныхъ величинъ α или какихъ нибудь величинъ $h, k, l\ldots$ останется постоянно отрицательною. На оборотъ, $f(x_0, y_0, z_0\ldots)$ будетъ *наименьшая* когда оная разность останется постоянно положительною. Если же, измѣняя величины $h, k, l\ldots$, сія разность будетъ иногда положительная, а иногда отрицательная, то величина $f(x_0, y_0, z_0\ldots)$ не будетъ ни *наибольшая* ни *наименьшая*.

Примѣръ. Функція $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ получаетъ *наибольшую* или *наименьшую величину*, когда $B^2-4AC<0$, но не получаетъ ни той ни другой, когда $B^2-4AC>0$.

Примѣчаніе. Случится можетъ что одна и таже величина функціи u, бо́льшая или ме́ньшая всѣхъ смежныхъ величинъ того же количества, будетъ соотвѣтствовать безконечному множеству различныхъ величинъ приписанныхъ измѣняемымъ $x, y, z\ldots$ Оная величина u будетъ слѣдовательно *наибольшая* или *наименьшая*. Когда сіе случится въ сопредѣльности тѣхъ значеній $x, y, z\ldots$ для которыхъ u и du суть непрерывныя, то сіи количества необходимо будутъ удовлетворять уравненіямъ (12). И такъ, сіи уравненія могутъ иногда относиться къ тѣмъ, кои называются неопредѣленными. И дѣйствитель-

(*) Сочинитель предполагаетъ, что функція u чаще всего алгебрическая.

Примѣчаніе переводчика.

но, можетъ случится что нѣкоторыя изъ нихъ заключаютъ всѣ остальныя.

Примѣръ. Положивъ $u = (cy - bz + l)^2 + (az - cx + m)^2 + (bx - ay + n)^2$, уравненія (12) приводятъ только къ двумъ слѣдующимъ

$$\frac{cy - bz + l}{a} = \frac{az - cx + m}{b} = \frac{bx - ay + n}{c}$$

а величина u соотвѣтствующая безконечному множеству величинъ x, y, z . . . удовлетворяющихъ двумъ послѣднимъ уравненіямъ, будетъ слѣдующая

$$\frac{(al + bm + cn)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

и можетъ быть принимаема за наименьшую.

УРОКЪ ОДИНАДЦАТЫЙ.

Объ употребленіи неопредѣленныхъ множителей при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ.

Означимъ чрезъ

(1) $$u = f(x, y, z \ldots)$$

функцію, заключающую n перемѣнныхъ величинъ $x, y, z \ldots$, и вообразимъ, что сіи измѣняемыя удовлетворяютъ m условнымъ уравненіямъ

(2) $$v = 0, \quad w = 0, \text{ и проч.} \ldots$$

и слѣдовательно зависятъ однѣ отъ другихъ.

Чтобъ приложить способъ показанный для опредѣленія *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ* функціи u и къ настоящему случаю, должно сперва посредствомъ формулъ (2) выключить изъ сей функціи m различныхъ перемѣнныхъ количествъ. Потомъ, разсматривая оставшіяся $n - m$ измѣняемыхъ независимыми, разыскать тѣ величины сихъ перемѣнныхъ, которыя содѣлываютъ функцію u и ея дифференціалъ du прерывными, или тѣ, кои удовлетворяютъ уравненію

(3) $$du = 0$$

независимо отъ дифференціаловъ сихъ самыхъ перемѣнныхъ. Разысканіе *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ* соотвѣтствующихъ уравненію (3) можетъ быть облегчено слѣдующимъ образомъ:

Полный дифференціалъ функціи u, разсматривая въ ней независимыми всѣ величины $x, y, z \ldots$ будетъ

$$(4)\qquad \frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz+ \text{ и проч.}\ldots=o,$$

заключающій n дифференціаловъ $dx, dy, dz\ldots$ Но надлежитъ замѣтить, что изъ нихъ только $n-m$ будетъ произвольныхъ, остальные же будутъ зависѣть отъ первыхъ и отъ самыхъ измѣняемыхъ $x, y, z\ldots$, и сія зависимость опредѣлится уравненіями $du=o$, $dv=o$, $dw=o\ldots$ или, что все равно,

$$(5)\ \frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz+..=o,\ \frac{dw}{dx}dx+\frac{dw}{dy}dy+\frac{dw}{dz}dz+..=o, \text{ и проч..}$$

И такъ, поелику уравненіе (4) должно состояться, какіе бы ни были дифференціалы перемѣнныхъ независимыхъ, то ясно, что ежели выключимъ изъ сего уравненія число m дифференціаловъ помощію формулъ (5), то коеффиціенты $n-m$ остальныхъ дифференціаловъ должны быть порознь равны нулю. Дабы совершить таковое выключеніе, стоитъ только къ уравненію (4) придать формулы (5) помноженныя на *неопредѣленныя количества*, $-\lambda$, $-\mu$, — и проч...., и опредѣлить сіи послѣдніе множители такъ, чтобъ въ получаемомъ послѣ сего уравненіи, коеффиціенты у m зависимыхъ дифференціаловъ уничтожились. Сверхъ того, какъ окончательное уравненіе будетъ имѣть видъ

$$(6)\quad \left(\frac{du}{dx}-\lambda\frac{dv}{dx}-\mu\frac{dw}{dx}-\ldots\right)dx+\left(\frac{du}{dy}-\lambda\frac{dv}{dy}-\mu\frac{dw}{dy}-\ldots\right)dy+\ldots=o,$$

и какъ притомъ, по уничтоженіи въ ономъ коеффиціентовъ m дифференціаловъ, должно будетъ уравнять нулю коеффиціенты остальныхъ дифференціаловъ; то можно заключить, что величины λ, μ, $\nu\ldots$ выведенныя изъ которой нибудь изъ слѣдующихъ формулъ

$$(7)\quad \frac{du}{dx}-\lambda\frac{dv}{dx}-\mu\frac{dw}{dx}-\ldots=o,\ \frac{du}{dy}-\lambda\frac{dv}{dy}-\mu\frac{dw}{dy}-\ldots=o, \text{ и проч.}\ldots$$

должны будутъ удовлетворять всѣмъ прочимъ. Слѣдовательно, величины $x, y, z\ldots$ удовлетворяющія формуламъ (4) и (5) должны также удовлетворять условнымъ уравненіямъ, кои найдутся по изключеніи неопредѣленныхъ λ, μ, ν ... изъ формулъ (7). Число сихъ условныхъ уравненій будетъ $n-m$. Присовокупляя къ онымъ формулы (2), получится всего n уравненій, изъ коихъ выведется для данныхъ перемѣнныхъ x, y, z ... нѣсколько системъ величинъ, между которыми необходимо будутъ находиться и тѣ, кои не содѣлывая прерывною одну изъ функцій u и du, дадутъ для первой *наибольшія* и *наименьшія величины*. Не худо замѣтить, что условныя уравненія произходящія отъ изключенія λ, μ, ν ... изъ формулъ (7), нисколько неизмѣнятся замѣнивъ функцію u какою нибудь изъ функцій v, w, ... и на оборотъ. Слѣдовательно, условныя уравненія не измѣнятся если вмѣсто того чтобъ искать *наибольшія* и *наименьшія величины* функціи u, предполагая $v=0$, $w=0$, ..., искали бы *наибольшія* и *наименьшія величины* функціи w, предполагая $u=0$, $v=0$, ...; и проч. Даже, можно бы было, не измѣняя условныхъ уравненій, подставить $u-a$, $v-b$, $w-c$, ... вмѣсто функцій u, v, w, ... гдѣ a, b, c, ... означаютъ постоянныя произвольныя количества.

Въ частномъ случаѣ, когда желаемъ получить *наибольшія* и *наименьшія величины* функціи u, предполагая что x, y, z, .. должны удовлетворять одному только уравненію

$$v=0, \tag{8}$$

формулы (7) примутъ видъ

$$\frac{du}{dx}-\lambda\frac{dv}{dx}=0,\quad \frac{du}{dy}-\lambda\frac{dv}{dy}=0,\quad \frac{du}{dz}-\lambda\frac{dv}{dz}=0,\quad \text{и проч.} \ldots \tag{9}$$

откуда, изключивъ λ, получаемъ

$$\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dx}\right)}=\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dy}\right)}=\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)}=\text{и проч.}\ldots \tag{10}$$

Сія послѣдняя формула заключаетъ $n-1$ различныхъ уравненій, кои будучи сопряжены съ уравненіемъ (8), опредѣлятъ искомыя величины перемѣнныхъ $x, y, z \ldots$.

1-й *Примѣръ.* Предположимъ что требуется найти *наибольшую* и *наименьшую величину* функціи $u = ax + by + cz + \ldots$, гдѣ $a, b, c \ldots$ суть постоянныя количества, а $x, y, z \ldots$ перемѣнныя удовлетворяющія уравненію

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = r^2 \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - r^2 = 0,$$

гдѣ r означаетъ постоянную величину.

Формула (10) доставитъ

$$(11) \qquad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \text{ и проч.} \ldots,$$

изъ чего выведется (смотри l'Analyse algébrique, note 11, или примѣч. 11 переводчика).

$$\frac{ax + by + cz + \ldots}{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)}}, \text{ или } \frac{u}{r^2} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)}}{r},$$

слѣдственно

$$(12) \qquad u = \pm r \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)}.$$

Дабы удостовѣриться въ томъ, что изъ двухъ величинъ функціи u, доставляемыхъ уравненіемъ (12), одна *наибольшая*, а другая *наименьшая величина*, надлежитъ только замѣтить, что всегда будемъ имѣть

$$(13) \quad \begin{cases} (ax+by+cz+\ldots)^2 + (bx-ay)^2 + (cx-az)^2 + \ldots + (cy-bz)^2 + \ldots \\ = (a^2+b^2+c^2+\ldots)(x^2+y^2+z^2+\ldots), \end{cases}$$

и слѣдовательно $u^2 < (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots) r^2$, исключая тотъ случай, когда величины перемѣнныхъ будутъ удовлетворять формулѣ (11).

2-й *Примѣръ.* Означимъ чрезъ $a, b, c \ldots k$ постоянныя количества, а чрезъ $x, y, z \ldots$ перемѣнныя удовлетворяющія уравненію

$$ax + by + cz + \ldots = k$$

и станемъ искать *наибольшую величину* функціи $u = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots$ Въ семъ предположеніи, получимъ опять формулу (11), изъ коей выведемъ

$$\frac{K}{u} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)}}{\sqrt{(u)}},$$ и слѣдовательно

(14) $$u = \frac{K^2}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots};$$

ежели число перемѣнныхъ $x, y, z \ldots$, будетъ равно тремъ, и ежели положимъ, что оныя означаютъ прямоугольныя координаты, то величина $\sqrt{u}$, слѣдующая изъ уравненій (14), очевидно будетъ изображать кратчайшее разстояніе отъ начала координатъ до опредѣленной плоскости.

3-й *Примѣръ*. Положимъ что требуется сыскать полу-оси эллипса или иперболы отнесенныхъ къ центру, и опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = K.$$

Каждая изъ сихъ полу-осей будетъ *наибольшая* или *наименьшая величина* радіуса вектора r, проведеннаго отъ начала координатъ до кривой, и опредѣляемаго формулою $r^2 = x^2 + y^2$. Поелику будемъ имѣть $dr = \frac{1}{r}(xdx + ydy)$, то нельзя будетъ уничтожить dr иначе, какъ предположивъ $r = \infty$ или $xdx + ydy = 0$. Первое предположеніе можетъ только быть принято въ иперболѣ. Принявъ же второе, въ слѣдствіе формулы (10) имѣемъ

$$\frac{x}{Ax+By} = \frac{y}{Cy+Bx} = \frac{x^2+y^2}{x(Ax+By)+y(Cy+Bx)} = \frac{r^2}{K}, \quad \frac{K}{r^2} - A = B\frac{y}{x}, \quad \frac{K}{r^2} - C = B\frac{x}{y},$$

(15) $$\left(\frac{K}{r^2} - A\right)\left(\frac{K}{r^2} - C\right) = B^2.$$

Теперь замѣтимъ, что вещественнымъ величинамъ количества r, будутъ всегда соотвѣтствовать положительныя величины r^2, и что уравненіе (15) доставляетъ двѣ положительныя величины для r^2 когда $AK > 0$, $AC - B^2 > 0$; одну, когда $AC - B^2 < 0$. И дѣйствительно, въ первомъ случаѣ кривая линія есть эллипсъ, и слѣдовательно будетъ имѣть обѣ оси вещественныя; во второмъ же случаѣ, какъ оная кривая линія есть иперболa, то и будетъ имѣть только одну возможную ось.

УРОКЪ ДВѢНАДЦАТЫЙ.

Дифференціалы и производныя функціи разныхъ порядковъ выраженій заключающихъ одну перемѣнную. Объ измѣненіи перемѣннаго независимаго количества.

Такъ какъ производныя функцій одной перемѣнной x обыкновенно бываютъ другія функціи сей самой перемѣнной, то очевидно что изъ данной функціи $y=f(x)$, можно будетъ вывести вообще множество новыхъ функцій, и каждая изъ нихъ будетъ производною предъидущей. Сіи новыя функціи называются *производными функціями разныхъ порядковъ* количества y или $f(x)$ и оныя означаются знакоположеніями

$$y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, \ldots y^{(n)}$$

или $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), \ldots f^{(n)}(x)$.

И такъ y' или $f'(x)$ будетъ производная функція перваго порядка данной функціи $y=f(x)$; y'' или $f''(x)$ будетъ производная втораго порядка количества y, или производная перваго порядка функціи y'; и проч....; наконецъ $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$ (гдѣ n означаетъ какое нибудь цѣлое число) будетъ производная $n^{\text{го}}$ порядка количества y, или производная перваго порядка функціи $y^{(n-1)}$.

Пусть будетъ теперь $dx=h$ дифференціалъ перемѣнной x разсматриваемой независимою. Изъ сказаннаго выше, получится

$$(1) \qquad y'=\frac{dy}{dx},\ y''=\frac{dy'}{dx},\ y'''=\frac{dy''}{dx}, \ldots y^{(n)}=\frac{dy^{(n-1)}}{dx},$$

или, что все равно,

(2) $dy = y'.h,\ dy' = y''.h,\ dy'' = y'''.h, \ldots dy^{(n)} = y^{(n-1)}.h.$

Сверхъ того, какъ дифференціалъ функціи перемѣнной x есть другая функція сей самой перемѣнной, то посему и можно будетъ дифференцировать y нѣсколько разъ сряду. Такимъ образомъ получимъ *дифференціалы разныхъ порядковъ* функціи y, а именно:

$$dy = y'h = y'dx, \quad ddy = h.dy' = y''h^2 = y''dx^2,$$
$$dddy = h^2dy'' = y'''h^3 = y'''dx^3, \text{ и проч.}$$

Для сокращенія пишется просто d^2y вмѣсто ddy, d^3y вмѣсто $dddy$ и проч....; посему dy изображаетъ дифференціалъ перваго порядка, d^2y дифференціалъ втораго порядка и проч....; и вообще d^ny изображаетъ дифференціалъ $n^{го}$ порядка. Въ слѣдствіе сихъ условій выйдетъ

(3) $dy = y'dx,\ d^2y = y''dx^2,\ d^3y = y'''dx^3,\ d^4y = y^{IV}dx^4, \ldots d^ny = y^{(n)}dx^n,$

отсюда,

(4) $y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3},\ y^{IV} = \frac{d4y}{dx^4}, \ldots y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$

По послѣдней изъ формулъ (3) заключаемъ, что производная функція $n^{го}$ порядка, а именно $y^{(n)}$ есть тотъ самой коеффиціентъ, на который должно умножить $n^{ю}$ степень постоянной величины $h = dx$, чтобъ получить дифференціалъ $n^{го}$ порядка. По сей то причинѣ $y^{(n)}$ называется иногда *дифференціальнымъ коеффиціентомъ $n^{го}$ порядка.*

Объясненныя правила для опредѣленія дифференціаловъ и производныхъ функцій перваго порядка выраженій заключающихъ одну только перемѣнную, послужатъ равно и къ опредѣленію ихъ дифференціаловъ и производныхъ высшихъ порядковъ. Вычисленія сего рода очень просты, что можно видѣть изъ слѣдующихъ примѣровъ.

Возмемъ сперва $y = \sin y$. Означивъ буквою a постоянное количество, получимъ $d\sin(x+a) = \cos(x+a)\,d(x+a) = \sin(x+a+\frac{1}{2}\pi)\,dx$, откуда

$d\sin x = \sin(x+\frac{1}{2}\pi)\,dx$, $\quad d\sin(x+\frac{1}{2}\pi) = \sin(x+\pi)\,dx$,
$d\sin(x+\pi) = \sin(x+\frac{3}{2}\pi)\,dx$ . . ; слѣдовательно получимъ
полагая $y = \sin x$, $\quad y' = \sin(x+\frac{1}{2}\pi)$, $\quad y'' = \sin(x+\pi)$,

$$y''' = \sin(x+\tfrac{3}{2}\pi), \ldots\, y^{(n)} = \sin(x+\tfrac{n}{2}\pi).$$

Подобнымъ образомъ найдется:
полагая $y = \cos x$, $y' = \cos(x+\frac{1}{2}\pi)$, $y'' = \cos(x+\pi)$, $y''' = \cos(x+\frac{3}{2}\pi)$,..

$$y^{(n)} = \cos(x+\tfrac{n}{2}\pi);$$

полагая $y = A^x$, $y' = A^x(lA)$, $y'' = A^x(lA)^2$, $y''' = A^x(lA)^3$, . . .

$$y^{(n)} = A^x(lA)^n;$$

полагая $y = x^a$, $y' = a x^{a-1}$, $y'' = a(a-1)x^{a-2}$, . . .

$$y^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}.$$

Замѣтимъ что каждое изъ выраженій $\sin(x+\frac{1}{2}n\pi)$, $\cos(x+\frac{1}{2}n\pi)$, съ измѣненіемъ n, доставляетъ только четыре величины разнствующія между собою, которыя будутъ всегда возвращаться въ одномъ и томъ же порядкѣ. Сіи четыре величины получатся подставляя вмѣсто n цѣлыя числа вида $4k$, $4k+1$, $4k+2$ и $4h+3$ (гдѣ k цѣлое число), и оныя будутъ по порядку $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, для выраженія $\sin(x+\frac{1}{2}n\pi)$, и $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ для выраженія $\cos(x+\frac{1}{2}n\pi)$. Что касается до выраженій A^x, x^a, то подставляя въ первомъ вмѣсто A основаніе Неперовой системы логариѳмовъ e, а во второмъ n вмѣсто a, увидимъ что всѣ производныя функціи e^x будутъ равны e^x; производная же $n^{\text{го}}$ порядка функціи x^n равна будетъ постоянному количеству $1.2.3\ldots n$, а производныя высшихъ порядковъ уничтожатся.

Вводя дифференціалы вмѣсто производныхъ функцій, въ слѣдствіе доказанныхъ нами формулъ, получимъ

$d^n\sin x = \sin(x+\frac{1}{2}n\pi)dx^n$, $d^n\cos x = \cos(x+\frac{1}{2}n\pi)dx^n$, $d^nA^x = A^x(lA)^n dx^n$, $d^ne^x = e^x dx^n$, $d^n(x^a) = a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}dx^n$, $d^n(x^n) = 1.2.3\ldots n.dx^n$, $d^nl(x) = dx.d^{n-1}(x^{-1}) = (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}dx^n$, и проч....

Разсмотримъ еще двѣ функціи $f(x+a)$ и $f(ax)$. Найдется полагая $y=f(x+a)$, $y'=f'(x+a)$, $y''=f''(x+a)$, .. $y^{(n)}=f^{(n)}(x+a)$,

$$d^ny = f^{(n)}(a+x)\,dx^n.$$

полагая $y=f(ax)$, $y'=af'(ax)$, $y''=a^2f''(ax)$, .. $y^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax)$,

$$d^ny = a^nf(ax)dx^n.$$

Примѣры. $d^n(x+a)^n = 1.2.3\ldots n.dx^n$, $d^n.e^{ax} = a^ne^{ax}dx^n$, $d^n\sin ax =$ и проч....

Теперь пусть будутъ $y=f(x)$ и z двѣ функціи измѣняемой x сопряженныя уравненіемъ

$$(5)\qquad z = F(y),$$

Дифференцируя сіе уравненіе нѣсколько разъ сряду, получится

$$(6)\qquad dz = F'(y)\,dy,\ d^2z = F''(y)\,dy^2 + F'(y)\,d^2y,$$
$$d^3z = F'''(y)\,dy^3 + 3F''(y)\,dy\,.\,d^2y + F'(y)\,d^3y, \text{ и проч.}$$

Примѣры. $d^n(a+y) = d^ny$, $d^n(-y) = -d^ny$, $d^n(ay) = ad^ny$, $d^n(ax^n) = 1.2.3..n.a\,dx^n$, $de^y = e^y dy$, $d^2e^y = e^y(dy^2+d^2y)$, $d^3e^y = e^y(dy^3+3dy\,d^2y+d^3y)$, и проч....

Полагая же перемѣнную x зависимою, уравненіе

$$(7)\qquad y = f(x),$$

будучи дифференцировано нѣсколько разъ сряду, доставитъ новыя формулы совершенно подобныя уравненіямъ (6), именно:

$$(8)\qquad dy = f'(x)\,dx,\ d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x,$$
$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x, \text{ и проч....}$$

изъ которыхъ получимъ

$$(9)\quad \begin{cases} f'(x) = \frac{dy}{dx}, \\ f''(x) = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3} = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right), \\ f'''(x) = \frac{dx(dx d^3y - dy d^3x) - 3d^2x(dx d^2y - dy d^2x)}{dx^6} = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right), \\ \text{и проч.} \ldots \end{cases}$$

Дабы перейти къ тому случаю, въ которомъ x полагается перемѣнною независимою, стоитъ только принять дифференціалъ dx за постоянную величину; посему $d^2x = 0$, $d^3x = 0$ и проч.... Слѣдовательно формулы (9) превратятся въ

$$(10)\quad f'(x) = \frac{dy}{dx},\quad f''(x) = \frac{d^2y}{ax^2},\quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},\ \text{и проч.} \ldots$$

которыя сходны съ уравненіями (4). Сравнивая сіи послѣднія съ уравненіями (9) заключаемъ, что ежели послѣдовательныя производныя $f(x)$ будутъ выражены посредствомъ дифференціаловъ перемѣнныхъ x и $y = f(x)$, то одна только производная перваго порядка $f'(x)$ не измѣнится, будемъ ли принимать x за перемѣнную зависимую, или за перемѣнную независимую. Еще прибавимъ, что дабы перейти отъ перваго случая ко второму, надобно будетъ подставить $\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}$ вмѣсто $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dx(dx d^3y - dy d^3x) - 3d^2x(dx d^2y - dy d^2x)}{dx^6}$ вмѣсто $\frac{d^3y}{dx^3}$, и проч.... Подобными подстановленіями производится *измѣненіе перемѣнной независимой.*

Между сложными функціями одной измѣняемой, находятся такія, коихъ послѣдовательныя дифференціалы представляются въ весьма простомъ видѣ. Положимъ, напримѣръ, что u, v, w.... будутъ означать различныя функціи x. Дифференцируя n разъ каждую изъ сложныхъ функцій

$u + v$, $u - v$, $u + v\sqrt{-1}$, $au + bv + cw + \ldots$, найдется:

(11) $d^n(u+v) = d^n u + d^n v, \quad d^n(u-v) = d^n u - d^n v,$

$$d^n(u+v\sqrt{-1}) = d^n u + d^n v\sqrt{-1}.$$

(12) $d^n(au+bv+cw+\ldots) = a\,d^n u + b\,d^n v + c\,d^n w + \ldots$

Изъ формулы (12) слѣдуетъ, что дифференціалъ $d^n y$ цѣлой функціи

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + px^2 + qx + r$$

обращается, для $n = m$, въ постоянное количество $1.2.3\ldots m.adx^m$, а для $n > m$, въ нуль.

УРОКЪ ТРИНАДЦАТЫЙ.

Дифференціалы разныхъ порядковъ функцій многихъ перемѣнныхъ.

Изобразимъ чрезъ $u = f(x, y, z...)$ функцію многихъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z . . . Дифференцируя сію функцію нѣсколько разъ сряду, относительно ко всѣмъ измѣняемымъ, или къ одной только изъ нихъ, получимъ нѣсколько новыхъ функцій, изъ коихъ каждая будетъ полная производная предъидущей функціи. Даже можно будетъ дифференцировать послѣдовательно функцію $u = f(x, y, z \ldots)$, принимая за перемѣнную то одну, то другую изъ величинъ x, y, z . . . Во всѣхъ случаяхъ, выводъ получаемый чрезъ одно, два, три, . . . дифференцированій, называется *полнымъ* или *частнымъ дифференціаломъ*, перваго, втораго, третьяго . . . . *порядка*. Такъ, напримѣръ, дифференцируя функцію u нѣсколько разъ сряду, относительно ко всѣмъ перемѣннымъ, составимъ полные дифференціалы du, ddu, $dddu$ . . . ., кои для краткости означаются знакоположеніями du, $d^2 u$, $d^3 u$ . . . . Напротивъ того, взявъ дифференціалъ нѣсколько разъ сряду въ разсужденіи измѣняемой x, составимъ частные дифференціалы $d_x u$, $d_x d_x u$, $d_x d_x d_x u$, . . . кои означаются чрезъ $d_x u$, $d_x^2 u$, $d_x^3 u$ . . . Вообще, ежели n будетъ какое нибудь цѣлое число, то полный дифференціалъ $n^{\text{го}}$ порядка изобразится чрезъ $d^n u$, а дифференціалъ того же порядка въ разсужденіи одной изъ измѣняемыхъ x, y, z . . . . чрезъ $d_x^n u$, $d_y^n u$, $d_z^n u$, и проч. . . . Когда будемъ дифференцировать функцію u два или нѣсколько разъ сряду относительно двухъ или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, то получимъ частные дифференціалы втораго или высшихъ порядковъ, которые изображаются такимъ образомъ: $d_x\, d_y\, u$, $d_y\, d_x\, u$, $d_x\, d_z\, u$, ... $d_x\, d_y\, d_z\, u$, ... Легко усмотрѣть, что дифференціалы сего рода сохраняютъ однѣ и тѣже величины каковъ бы ни былъ порядокъ дифференцированій относительно перемѣнныхъ x, y, z... И такъ, напримѣръ, будемъ имѣть

$$(1) \qquad d_x\, d_y\, u = d_y\, d_x\, u.$$

Впрочемъ сіе уравненіе можно доказать слѣдующимъ образомъ.

Означимъ чрезъ Δ_x поставленное впереди функціи $u = f(x, y, z..)$ приращеніе, которое получаетъ сія функція когда увеличиваемъ x количествомъ безконечно-малымъ αdx. Получится

$$(2) \qquad \Delta_x u = f(x + \alpha dx, y, z \ldots) - f(x, y, z \ldots), \quad d_x u = \text{пр.}\, \frac{\Delta_x u}{\alpha},$$

$$(3) \qquad \Delta_x d_y u = d_y (u + \Delta_x u) - d_y u = d_y\, \Delta_x u, \text{ слѣдовательно}$$

$$\frac{\Delta_x d_y u}{\alpha} = \frac{d_y \Delta_x u}{\alpha} = d_y\, \frac{\Delta_x u}{\alpha};$$

потомъ, полагая что α приближается къ нулю, въ слѣдствіе второй изъ формулъ (2) получится уравненіе (1). Подобнымъ образомъ можно доказать и слѣдующія тожественныя уравненія: $d_x\, d_z\, u = d_z\, d_x\, u$, $d_y\, d_z u = d_z\, d_y\, u$, и проч. . . .

Примѣръ. Полагая $u = \text{arc. tang.}\, \frac{x}{y}$, найдется

$$d_x u = \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx, \quad d_y u = \frac{-x}{x^2 + y^2}\, dy, \quad d_y d_x u = d_x d_y u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy.$$

Доказавъ уравненіе (1), выводимъ изъ онаго то слѣдствіе, что въ выраженіи, имѣющемъ видъ $d_x\, d_y\, d_z \ldots u$, всегда можно перемѣщать между собою перемѣнныя, къ коимъ относятся два послѣдовательныя дифференцированія. Посему, легко усмотрѣть, что помощію одного или нѣсколькихъ подобныхъ перемѣщеній, можно будетъ измѣнить по произволу порядокъ дифференцированій. Такъ, напримѣръ, чтобъ доказать равенство двухъ выраженій $d_z\,d_y\,d_x\,u$ и $d_x\,d_y\,d_z\,u$, должно сперва въ послѣднемъ изъ нихъ чрезъ два послѣдовательныя перемѣщенія, перевести букву x на мѣсто буквы z, потомъ перемѣстить буквы y и z, дабы буква y занимала опять второе мѣсто. И такъ, можно утвердить, что величина дифференціала $d_x d_y d_z \ldots u$ совершенно независима отъ порядка, въ которомъ производимы были дифференцированія, относительно къ измѣняемымъ $x, y, z \ldots$. Сіе предложеніе справедливо даже и въ томъ случаѣ, когда нѣсколько дифференцированій относятся къ одной изъ перемѣнныхъ, какъ напримѣръ, въ выраженіяхъ $d_x\,d_y\,d_x\,u$, $d_x\,d_y\,d_x\,d_x\,u$, и проч. Тогда для сокращенія пишется $d^2{}_x$ вмѣсто $d_x\,d_x$, $d^3{}_x$ вмѣсто $d_x\,d_x\,d_x$, и проч. Въ слѣдствіе сего условія, будемъ имѣть

$$d^2{}_x d_y u = d_x d_y d_x u = d_y d^2{}_x u\,,\quad d^3{}_x d_y d_z u = d_x d_y d_x d_z d_x u = d_y d^3{}_x d_z u = \text{ и пр.} \ldots$$
$$d^2{}_x d^3{}_y u = d^3{}_y d^2{}_x u,\quad d_x d^2{}_y d^3{}_z u = d_x d^3{}_z d^2{}_y u = d^2{}_y d_x d^3{}_z u = \text{ и пр.} \ldots$$

и вообще, означая буквами $l, m, n \ldots$ какія нибудь цѣлыя числа, получимъ

$$(4)\quad d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u = d^l{}_x d^n{}_z d^m{}_y \ldots u = d^m{}_y d^l{}_x d^n{}_z \ldots u = \text{ и проч.} \ldots$$

Поелику чрезъ дифференцированіе функціи перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z \ldots$ относительно къ одной изъ нихъ, получится новая функція сихъ самыхъ перемѣнныхъ, умноженная на постоянную конечную величину dx или dy или $dz \ldots$, и какъ сверхъ того при дифференцированіи произведенія, постоянные множители всегда выносятся за знакъ d: то очевидно, что ежели будемъ дифференцировать функцію $u = f(x, y, z \ldots)$, l разъ къ разсужденіи x, m разъ въ разсужденіи y, n разъ въ разсужденіи $z \ldots$, то окончательный дифференціалъ, а именно $d^l{}_x\,d^m{}_y\,d^n{}_z \ldots u$, будетъ равенъ произведенію новой функціи измѣняемыхъ $x, y, z \ldots$ на множителей $dx, dy, dz \ldots$ возвышенныхъ, первой въ степень l, второй въ степень m, третій въ степень n.... Новая функція, о коей здѣсь говорится, называется *частною производною* функціи u, порядка $l+m+n+\ldots$ Означая оную чрезъ $\varpi(x, y, z\ldots)$, будемъ имѣть

(5) $$d^l{}_x\, d^m{}_y\, d^n{}_z \ldots u = \varpi(x, y, z\ldots)\, dx^l\, dy^m\, dz^n \ldots,$$

откуда

(6) $$\varpi(x, y, z\ldots) = \frac{d^l{}_x\, d^m{}_y\, d^n{}_z \ldots u}{dx^l\, dy^m\, dz^n \ldots}.$$

Легко выразить полные дифференціалы d^2u, $d^3u\ldots$ посредствомъ частныхъ дифференціаловъ функціи u, или ихъ частныхъ производныхъ. И дѣйствительно, изъ формулы (10) (8го урока) получится

$$d^2u = ddu = d_x du + d_y du + d_z du + \ldots$$
$$= d_x(d_xu+d_yu+d_zu\ldots)+d_y(d_xu+d_yu+d_zu\ldots)+d_z(d_xu+d_yu+d_zu\ldots)+\ldots,$$

и слѣдовательно

(7) $$d^2u = d^2{}_xu + d^2{}_yu + d^2{}_zu + \ldots + 2d_xd_yu + 2d_xd_zu \ldots + 2d_yd_zu + \ldots,$$

или, что все равно,

(8) $$d^2u =$$
$$\frac{d^2{}_xu}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2{}_yu}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2{}_zu}{dz^2}dz^2 + \ldots$$
$$+ 2\frac{d_xd_yu}{dxdy}dxdy + 2\frac{d_xd_zu}{dxdz}dxdz \ldots + 2\frac{d_yd_zu}{dydz}dydz \ldots$$

Подобнымъ образомъ можно опредѣлить и величины d^3u, d^4u,...

Примѣры. $d^2(xyz) = 2(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$, $d^3(xyz) = 6\,dx\,dy\,dz$, $d^2(x^2+y^2+z^2\ldots) = 2(dx^2+dy^2+dz^2\ldots)$, $d^3(x^3+y^3+z^3\ldots) = 6(dx^3+dy^3+dz^3\ldots)$, и проч....

Для сокращенія, буквы находящіяся подъ характеристикою d, какъ напримѣръ въ уравненіяхъ (6), (8), и проч.... обыкновенно не пишутся, и второй членъ формулы (6) замѣняется просто слѣдующимъ:

(9) $$\frac{d^{l+m+n\dots}u}{dx^l\,dy^m\,dz^n\dots}$$

Посему частныя производныя втораго порядка изображаются такимъ образомъ: $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}\dots$ $\frac{d^2u}{dxdy}$, $\frac{d^2u}{dxdz}\dots$ $\frac{d^2u}{dydz}\dots$, частныя производныя третьяго порядка: $\frac{d^3u}{dx^3}$, $\frac{d^3u}{dx^2dy}$, $\frac{d^3u}{dxdy^2}$, и проч.; величина же для d^2u будетъ слѣдующая

(10) $$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2\dots$$
$$+ 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2u}{dxdz}dxdz\dots + 2\frac{d^2u}{dydz}dydz\dots$$

Но замѣтимъ, что въ сей величинѣ нельзя сократить на дифференціалы dx, dy, $dz\dots$, потому что $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}\dots$ не означаютъ частныхъ чиселъ произшедшихъ отъ раздѣленія d^2u на dx^2 или на $dxdy\dots$.

Ежели, вмѣсто функціи $u=f(x, y, z\dots)$ разсмотримъ слѣдующую:

(11) $$s = F(u, v, w\dots),$$

гдѣ количества u, v, $w\dots$ сами означаютъ какія нибудь функціи перемѣнныхъ независимыхъ x, y, $z\dots$, то величины d^2s, $d^3s\dots$ опредѣлятся безъ малѣйшаго затрудненія по правиламъ выведеннымъ въ девятомъ урокѣ. И дѣйствительно, дифференцируя нѣсколько разъ сряду формулы (11), найдется:

(12) $$\begin{cases} ds = \frac{dF(u,v,w\dots)}{du}du + \frac{dF(u,v,w\dots)}{dv}dv + \frac{dF(u,v,w\dots)}{dw}dw + \dots \\ d^2s = \frac{d^2F(u,v,w\dots)}{du^2}du^2 + \dots + 2\frac{d^2F(u,v,w\dots)}{dudv}dudv + \dots + \frac{dF(u,v,w\dots)}{du}d^2u + \dots \\ \text{и проч.}\dots \end{cases}$$

Примѣры. $d^n(u+v) = d^nu + d^nv$, $d^n(u-v) = d^nu - d^nv$, $d^n(u+v\sqrt{-1}) = d^nu + \sqrt{-1}\,d^nv$, $d^n(au+bv+cw+\dots) = ad^nu + bd^nv + cd^nw + \dots$

Столь же легко опредѣляются и дифференціалы неявныхъ функцій, содержащихъ нѣсколько измѣняемыхъ независимыхъ количествъ. Для сего, должно дифференцировать одинъ разъ или нѣсколько разъ сряду уравненія, опредѣляющія сіи самыя функціи, разсматривая постоянными дифференціалы перемѣнныхъ независимыхъ, и принимая другіе дифференціалы за новыя функціи сихъ самыхъ перемѣнныхъ.

УРОКЪ ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ.

Способы облегчающіе изысканіе полныхъ дифференціаловъ функцій многихъ перемѣнныхъ. Символическія выраженія для сихъ дифференціаловъ.

Пусть $u = f(x, y, z \ldots)$ будетъ функція перемѣнныхъ независимыхъ количествъ x, y, $z \ldots$; сверхъ того изобразимъ чрезъ $\varphi(x, y, z \ldots)$, $\chi(x, y, z \ldots)$, $\psi(x, y, z \ldots)$, и проч. ея частныя производныя функціи перваго порядка, взятыя относительно къ x, y, $z \ldots$. Предположивъ, какъ въ урокѣ 8[мъ],

$$(1) \qquad F(\alpha) = f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz \ldots),$$

и дифференцируя потомъ обѣ части уравненія (1) въ разсужденіи перемѣнной α, найдется:

$$(2) \quad F'(\alpha) = \varphi(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz \ldots)\, dx$$
$$+ \chi(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz \ldots)\, dy$$
$$+ \psi(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz \ldots)\, dz + \ldots;$$

полагая въ сей послѣдней формулѣ $\alpha = 0$, получимъ слѣдующую:

$$(3) \quad F'(0) = \varphi(x, y, z \ldots)\, dx + \chi(x, y, z \ldots)\, dy + \psi(x, y, z \ldots)\, dz + \ldots = du;$$

которая равнозначуща съ уравненіемъ (16) осьмаго урока. Сверхъ того, сравнивая между собою уравненія (1) и (2), легко усмотрѣть что чрезъ дифференцированіе относительно къ α какой нибудь функціи перемѣнныхъ количествъ

$$(4) \qquad x + \alpha dx, \quad y + \alpha dy, \quad z + \alpha dz, \ldots$$

получится производная, которая равна будетъ другой функціи сихъ самыхъ измѣняемыхъ, соединенныхъ извѣстнымъ образомъ съ постоянными величинами dx, dy, dz.... Продолжая дифференцировать относительно къ перемѣнной α, получимъ новыя функцiи такого же рода; изъ сего заключаемъ, что кромѣ выраженiй (4), не будетъ входить другихъ перемѣнныхъ количествъ въ $F(\alpha)$ и $F'(\alpha)$, также и въ $F''(\alpha)$, $F'''(\alpha)\ldots$, и вообще въ $F^{(n)}(\alpha)$, изображая чрезъ n какое нибудь цѣлое число. Слѣдовательно разности

$$F(\alpha)-F(o),\ F'(\alpha)-F'(o),\ F''(\alpha)-F''(o),\ \ldots F^{(n)}(\alpha)-F^{(n)}(o),$$

будутъ равны приращенiямъ, которыя получаютъ функцiи x, y, z,.. выраженныя чрезъ

$$F(o),\quad F'(o),\quad F''(o),\ldots F^{(n)}(o),$$

когда припишемъ перемѣннымъ независимымъ безконечно-малыя приращенiя αdx, αdy, αdz.... На семъ основанiи, поелику $F(o)=u$: то предполагая что α приближается къ предѣлу нуль, найдется постепенно:

$$F'(o)=np.\ \frac{F(\alpha)-F(o)}{\alpha}=np.\ \frac{\Delta u}{\alpha}=du,$$

$$F''(o)=np.\ \frac{F'(\alpha)-F'(o)}{\alpha}=np.\ \frac{\Delta du}{\alpha}=ddu=d^2u,$$

$$F'''(o)=np.\ \frac{F''(\alpha)-F''(o)}{\alpha}=np.\ \frac{\Delta d^2u}{\alpha}=dd^2u=d^3u,$$

и проч....

$$F^{(n)}(o)=np.\ \frac{F^{(n-1)}(\alpha)-F^{(n-1)}(o)}{\alpha}=np.\ \frac{\Delta d^{n-1}u}{\alpha}=dd^{n-1}u=d^nu.$$

Слѣдовательно

$$(5)\quad u=F(o),\ du=F'(o),\ d^2u=F''(o),\ d^3u=F'''(o),\ldots d^nu=F^{(n)}(o).$$

И такъ, для опредѣленiя полныхъ дифференцiаловъ du, $d^2u\ldots d^nu$, стоитъ только вычислить частныя величины производныхъ функцiй $F'(\alpha)$, $F''(\alpha)\ldots F^{(n)}(\alpha)$, въ случаѣ $\alpha=o$.

Къ способамъ облегчающимъ опредѣленiе полныхъ дифференцiаловъ, должно отнести еще и тѣ, которые основаны на разсматриваніи символическихъ величинъ сихъ дифференціаловъ.

Въ анализѣ, *символическимъ выраженіемъ* или просто *символомъ*, называется такое соединеніе алгебрическихъ знаковъ, которое само по себѣ не имѣетъ никакого значенія, или которому условно приписываютъ величину разнствующую отъ настоящей. Равнымъ образомъ, *символическими уравненіями* называются такія уравненія, которыя, будучи разсматриваемы въ строгомъ смыслѣ, согласно съ общепринятыми условіями, суть неточны или не имѣютъ опредѣленнаго смысла, но изъ коихъ однакоже можно вывести заключенія справедливыя, ограничивая или измѣняя, сообразно съ нѣкоторыми правилами, сіи самыя уравненія или знаки входящіе въ оныя. Къ символическимъ уравненіямъ кои могутъ быть полезны (смотри *Analyse algébrique*, Главу VII), отнесемъ и тѣ, которыя будутъ доказаны ниже.

Означивъ чрезъ $a, b, c\ldots$ постоянныя количества, и чрезъ $l, m, n\ldots p, q, r\ldots$ цѣлыя числа, полный дифференціалъ выраженія

$$(6)\qquad a d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u + b d^p{}_x d^q{}_y d^r{}_z \ldots u + \text{ и проч.}\ldots$$

опредѣлится формулою

$$(7)\qquad \begin{aligned} & d\,[a d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u + b d^p{}_x d^q{}_y d^r{}_z \ldots u + \ldots] \\ = {} & d_x\,[a d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u + b d^p{}_x d^q{}_y d^r{}_z \ldots u + \ldots] \\ + {} & d_y\,[a d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u + b d^p{}_x d^q{}_y d^r{}_z \ldots u + \ldots] \\ + {} & d_z\,[a d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u + b d^p{}_x d^q{}_y d^r{}_z \ldots u + \ldots] \ldots \\ = {} & a d^{l+1}{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u + a d^l{}_x d^{m+1}{}_y d^n{}_z \ldots u \\ + {} & a d^l{}_x d^m{}_y d^{n+1}{}_z \ldots u \ldots + b d^{p+1}{}_x d^q{}_y d^r{}_z \ldots u + \ldots \end{aligned}$$

Сличеніе сей формулы съ уравненіемъ (4) 13^го урока, непосредственно приводитъ къ слѣдующему предложенію.

Теорема. *Для опредѣленія полнаго дифференціала выраженія* (6), *стоитъ только умножить на* d *произведеніе двухъ множителей* $a\,d^l{}_x\,d^m{}_y\,d^n{}_z\ldots+b\,d^p{}_x\,d^q{}_y\,d^r{}_z\ldots+\ldots$ *и* u, *полагая* $d=d_x+d_y+d_z+\ldots$, *и производя умноженіе какъ бы знакоположенія* d, d_x, d_y, d_z, ... *изображали настоящія количества различныя между собою, потомъ въ выводѣ умноженія, поставить въ разныхъ членахъ, множителей* a, b, $c\ldots$ *на первое мѣсто, а букву* u *на послѣднее; совершивъ сіе, должно предположить что знаки* d_x, d_y, $d_z\ldots$ *перестали изображать количества, а принимать оные въ прежнемъ ихъ значеніи.*

Примѣры. Опредѣляя, помощію сей теоремы, полный дифференціалъ выраженія

$$d_xu+d_yu+d_zu+\ldots.,\tag{8}$$

окажется, что найденная величина для ddu или d^2u есть та самая, которая выражена формулою (7) въ предъидущемъ урокѣ. Приложивъ теорему къ найденной величинѣ d^2u, получится величина d^3u, и такъ далѣе.

Примѣчаніе. Когда означаемъ только умноженія, помощію коихъ, въ слѣдствіе послѣдней теоремы, можно опредѣлить полный дифференціалъ выраженія (6), то вмѣсто уравненія (7), получится символическая формула

$$\left\{\begin{aligned}&d[a\,d^l{}_xd^m{}_yd^n{}_z\ldots u+bd^p{}_x\,d^q{}_y\,d^r{}_z\ldots u+\ldots]=\\&\quad[a\,d^l{}_xd^m{}_yd^n{}_z\ldots+b\,d^p{}_x\,d^q{}_yd^r{}_z\ldots+\ldots][d_x+d_y+d_z+\ldots]u.\end{aligned}\right.\tag{9}$$

Поелику въ формулѣ (9), знаки d_x, d_y, $d_z\ldots$, должны изображать дифференціалы, то очевидно, что сія формула въ строгомъ смыслѣ не имѣетъ никакого опредѣленнаго значенія; но она становится точною, перемноживъ настоящимъ образомъ множителей второй ея части, помощію обыкновенныхъ правилъ алгебрическаго умноженія, принимая d_z, d_y, $d_z\ldots$ за количества, а не за знаки.

Если выраженіе (6) будетъ замѣнено выраженіемъ (8), то дифференцируя послѣднее нѣсколько разъ сряду, получимъ, помощію тѣхъ же самыхъ способовъ, символическія величины для полныхъ дифференціаловъ d^2u, d^3u . . . , именно, $(d_x+d_y+d_z...)(d_x+d_y+d_z...)u$, $(d_x+d_y+d_z...)(d_x+d_y+d_z...)(d_x+d_y+d_z...)u$, и проч.

Присовокупивъ къ символическимъ симъ выраженіямъ и символическую величину для du, и означивъ сверхъ того чрезъ $(d_x+d_y+d_z...)^2$ выраженіе $(d_x+d_y+d_z...)(d_x+d_y+d_z...)$, чрезъ $(d_x+d_y+d_z...)^3$ выраженіе $(d_x+d_y+d_z...)(d_x+d_y+d_z...)(d_x+d_y+d_z...)$, и проч. . . . составимъ слѣдующія символическія уравненія:

(10) $du=(d_x+d_y+d_z..)u$, $d^2u=(d_x+d_y+d_z..)^2u$, $d^3u=(d_x+d_y+d_z...)^3u$,..

и вообще, означая чрезъ n какое нибудь цѣлое число, будетъ

(11) $$d^nu=(d_x+d_y+d_z\ldots)^n u.$$

Теперь возмемъ

(12) $$s=F(u,\ v,\ w\ldots.),$$

гдѣ u, v, w . . . . изображаютъ функціи перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z . . .; найдется

(13) $$d^ns=(d_x+d_y+d_z\ldots)^n s.$$

Весьма легко разложить вторую часть сего послѣдняго уравненія въ томъ частномъ случаѣ, когда u предполагается функціею одной измѣняемой x, v функціею одной измѣняемой y, w функціею одной измѣняемой z, и проч. . . . Впрочемъ, замѣтимъ, что отъ сего частнаго случая можно перейти и къ общему, подставляя du, d^2u, d^3u... вмѣсто d_xu, d^2_xu, d^3_xu . . ., dv, d^2v . . . вмѣсто d_yv, d^2_yv . . . , и проч. . . . , или, что все равно, не подписывая подъ буквою d перемѣнныхъ x, y, z . . . И такъ, во всѣхъ случаяхъ, легко будетъ опредѣлить помощію формулы (13) величину d^ns. Для объясненія сего способа, возмемъ $s=uv$. По вышесказанному, найдется послѣдовательно:

$$(14)\quad d^n(uv) = u\,d^n{}_y v + \frac{n}{1} d_x u\, d^{n-1}{}_y v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2{}_x u\, d^{n-2}{}_y v + \ldots$$
$$+ \frac{n}{1} d_y v\, d^{n-1}{}_x u + v\, d^n{}_x u,$$

$$(15)\quad d^n(uv) = u\,d^n v + \frac{n}{1} d u\, d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} d^2 u\, d^{n-2} v + \ldots$$
$$+ \frac{n}{1} d v\, d^{n-2} u + v\, d^n u.$$

Послѣдняя формула имѣетъ мѣсто, какія бы нибыли величины u, v въ x, y, и даже въ томъ случаѣ, когда u и v будутъ означать двѣ функціи одной только измѣняемой x.

Примѣръ. $d^n\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{a^n e^{ax}}{x}\left(1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3 x^3} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n x^n}\right) dx^n.$

УРОКЪ ПЯТНАДЦАТЫЙ.

Объ отношеніяхъ существующихъ между функціями одной перемѣнной, ихъ производными и дифференціалами разныхъ порядковъ. Объ употребленіи сихъ дифференціаловъ при разысканіи наибольшихъ *и* наименьшихъ величинъ.

Положимъ что функція $f(x)$ уничтожается для частной величины $x=x_0$. Сверхъ того, допустимъ что сія самая функція и ея послѣдовательныя производныя, до $n^{\text{го}}$ порядка, остаются непрерывными въ сопредѣльности той частной величины о которой говорится, и что сія непрерывность существуетъ для каждой изъ нихъ между двумя предѣлами $x=x_0$, $x=x_0+h$. Уравненіе (6) урока $7^{\text{го}}$ даетъ

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)=hf'(x_0+\theta h),$$

гдѣ θ означаетъ число меньшее единицы; или, что все равно, положимъ

$$(1)\qquad f(x_0+h)=hf'(x_0+h_1),$$

изображая чрезъ h_1 количество имѣющее одинакій знакъ съ h, но численную величину меньшую. Если производныя функціи $f'(x)$, $f''(x)\ldots f^{(n-1)}(x)$ уничтожатся отъ предположенія $x=x_0$, то найдется также:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} f'(x_0+h_1)=h_1f''(x_0+h_2), \\ f''(x_0+h_2)=h_2f'''(x_0+h_3), \\ \text{и проч.}\ \ldots \\ f^{(n-1)}(x_0+h_{n-1})=h_{n-1}f^{(n)}(x_0+h_n); \end{array}\right.$$

гдѣ h_1, h_2, $h_3 \ldots h_n$ изображаютъ количества съ одинакими знаками, но коихъ численныя величины постепенно уменьшаются. Умноживъ уравненіе (1) на всѣ уравненія (2), по сокращеніи получится:

$$(3) \qquad f(x_0+h) = hh_1 h_2 \ldots h_{n-1} f^{(n)}(x_0+h_n),$$

гдѣ h_n будетъ имѣть одинакій знакъ съ h, произведеніе же $hh_1h_2 \ldots h_{n-1}$ одинакій знакъ съ h^n. Прибавимъ, что численныя величины обоихъ отношеній $\frac{h_n}{h}$, $\frac{h h_1 h_2 \ldots h_n}{h^n}$ будутъ содержаться между предѣлами 0 и 1; и ежели означимъ чрезъ θ и Θ два числа сего рода, то уравненіе (3) можно будетъ представить въ такомъ видѣ:

$$(4) \qquad f(x_0+h) = \Theta h^n f^{(n)}(x_0+\theta h).$$

Предположимъ теперь что количество h дѣлается безконечно малымъ; очевидно что формула (4) будетъ имѣть мѣсто и въ семъ члучаѣ; посему, подставляя i вмѣсто h, найдется:

$$(5) \qquad f(x_0+i) = \Theta i^n f^{(n)}(x_0+\theta i).$$

Сверхъ того, какъ для безконечно-малыхъ численныхъ величинъ количества i, выраженіе $f^{(n)}(x_0+\theta i)$ будетъ весьма мало разниться отъ $f^{(n)}(x_0)$, то въ силу уравненія (5), получимъ слѣдующее предложеніе:

1-я Теорема. *Положимъ что функція $f(x)$ и ея послѣдовательныя производныя, до $n^{го}$ порядка, оставаясь непрерывными въ сопредѣльности частной величины $x=x_0$, всѣ уничтожаются, изключая $f^{(n)}(x)$, для сей самой величины $x=x_0$. Въ такомъ случаѣ, означивъ чрезъ i количество безконечно-малое, и полагая $x=x_0+i$, получится для $f(x)$ величина имѣющая одинакій знакъ съ произведеніемъ $i^n f^{(n)}(x_0)$.*

Легко повѣрить сію теорему, полагая напримѣръ, что функція $f(x)$ вида: $(x-x_0)^n \varphi(x)$.

Когда функція $f(x)$ не уничтожается отъ предположенія $x = x_0$, то теорема 1-я можетъ быть замѣнена слѣдующею.

2-я Теорема. *Положимъ что функціи*

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots\ f^{(n)}(x),$$

оставаясь непрерывными относительно къ x въ сопредѣльности частной величины $x = x_0$, всѣ уничтожаются, кромѣ первой $f(x)$ и послѣдней $f^{(n)}(x)$, для сей самой величины $x = x_0$. Изобразивъ чрезъ i количество безконечно-малое, получится для безконечно же малой разности $f(x_0 + i) - f(x_0)$ величина имѣющая одинакій знакъ съ произведеніемъ $i^n f^{(n)}(x_0)$.

Доказательство. Дабы изъ 1-й теоремы вывести 2-ю, стоитъ только вмѣсто функціи $f(x)$ подставить $f(x) - f(x_0)$ имѣющую однѣ и тѣже производныя съ $f(x)$, но которая, сверхъ того, уничтожается для $x = x_0$. Чрезъ таковое подстановленіе, уравненіе (5) приводится къ слѣдующему:

$$f(x_0 + i) - f(x_0) = \Theta i^n f^{(n)}(x_0 + \theta i). \tag{6}$$

Подставивъ x вмѣсто x_0, и полагая $f(x) = y$, $\Delta x = i = \alpha h$, уравненіе (6) приметъ видъ

$$\Delta y = \Theta \alpha^n (d^n y + \beta), \tag{7}$$

гдѣ β и α означаютъ количества безконечно-малыя. Но не должно забывать, что формула (7) будетъ имѣть мѣсто только для частной величины $x = x_0$.

Слѣдствіе. Допустивъ тѣ же самыя условія какъ и во 2-й теоремѣ, и замѣнивъ перемѣнную x частною величиною x_0, положимъ, что сія самая перемѣнная получаетъ безконечно-малое приращеніе. Соотвѣтствующее приращеніе функціи $f(x)$ будетъ количество имѣющее одинакій знакъ съ величиною $f^{(n)}(x)$ или $d^n y$, для $x = x_0$, когда n четное число. Напротивъ того, ежели n будетъ означать нечетное число, то приращеніе функціи перемѣнитъ знакъ вмѣстѣ съ приращеніемъ измѣняемой.

Мы показали въ $6^{мъ}$ урокѣ что *наибольшія* и *наименьшія величины* функціи $f(x)$ соотвѣтствуютъ всегда величинамъ измѣняемой x, удовлетворяющимъ уравненію

(8) $$f'(x) = 0.$$

ежели только для тѣхъ величинъ перемѣнной x, функціи $f(x)$ и $f'(x)$ не дѣлаются прерывными.

Слѣдственно, изъ сказаннаго нами выше, можно будетъ вообще судить, соотвѣтствуетъ ли какой нибудь корень уравненія (8) *наибольшей* или *наименьшей величинѣ* функціи $f(x)$. И дѣйствительно, пусть будетъ x_0 сей корень, а $f^{(n)}(x)$ первая изъ производныхъ функціи $f(x)$, неуничтожающаяся вмѣстѣ съ $f'(x)$, для частнаго значенія $x = x_0$. Сверхъ того, положимъ что въ сопредѣльности сей самой частной величины, функціи $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ остаются всѣ непрерывными относительно къ x. Очевидно изъ $2^{-й}$ теоремы, что величина $f(x_0)$ будетъ *наибольшая*, когда n будетъ четное число, а величина $f^{(n)}(x_0)$ отрицательная; напротивъ того, $f(x_0)$ будетъ *наименьшая*, когда n четное же число, но $f^{(n)}(x_0)$ имѣетъ величину положительную. Если бы n было нечетное число, то приращеніе функціи перемѣняя знакъ вмѣстѣ съ приращеніемъ перемѣнной, величина $f(x_0)$ не была бы ни *наибольшая*, ни *наименьшая*. Посему, наблюдая что дифференціалы $df(x)$, $d^2f(x)$, ... всегда уничтожаются вмѣстѣ съ производными функціями $f'(x)$, $f''(x)$, ... и что сверхъ того, для четныхъ величинъ n, $d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$ имѣетъ одинакій знакъ съ $f^{(n)}(x)$, получимъ слѣдующее предложеніе.

$3^{-я}$ Теорема. *Пусть будетъ* $y = f(x)$ *данная функція перемѣнной* x. *Дабы узнать будетъ ли соотвѣтствовать* наибольшая *или* наименьшая величина *предложенной функціи какому нибудь корню уравненія* $dy = 0$, *вообще достаточно опредѣлить величины для* d^2y, d^3y, d^4y ..., *соотвѣтствующія сему корню.*

Если величина d^2y положителвная или отрицателвная, то величина y будетъ наименьшая *въ первомъ случаѣ, а* наибольшая *во второмъ. Когда же величина d^2y обратится въ нулв, то должно искатв между дифференціалами d^3y, d^4y, . . . перваго которвій бві не уничтожался. Представимъ онвій чрезъ d^ny. Если n нечетное число, то величина y не будетъ ни* наибольшая *ни* наименьшая. *Если же n четное число, то величина y будетъ* наименьшая, *когда дифференціалъ d^ny положителвнвій, а* наибольшая, *когда сей самвій дифференціалъ будетъ отрицателвнвій.*

Примѣчаніе. Въ 3-й теоремѣ, какъ и въ двухъ первыхъ, должно допустить, что функція y и ея послѣдовательныя производныя, до $n^{\text{го}}$ порядка, остаются непрерывными въ сопредѣльности частной величины даваемой перемѣнной x.

Ежели y будетъ неявная функція перемѣнной x, опредѣляемая напримѣръ уравненіемъ $u = 0$, то 3-я теорема будетъ и въ такомъ случаѣ имѣть мѣсто. Только тогда должно будетъ вывести величины dy, d^2y, d^3y . . . изъ дифференціальныхъ уравненій $du = 0$, $d^2u = 0$, $d^3u = 0$, и проч. . . .

Примѣръ. Пусть будетъ $y = x^a \,.\, e^{-x}$, гдѣ a есть количество положительное. Получится $l(y) = al(x) - x$. Дифференцируя два раза сряду послѣднее уравненіе, найдется:

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{a}{x} - 1\right)dx, \quad \frac{d^2y}{y} - \left(\frac{dy}{y}\right)^2 = -a\left(\frac{dx}{x}\right)^2;$$

потомъ полагая $dy = 0$, не принимая въ разсмотрѣніе величины y равной нулю, выйдетъ,

$$(9) \qquad 0 = \frac{a}{x} - 1, \quad \frac{d^2y}{y} = -a\left(\frac{dx}{x}\right)^2.$$

Такъ какъ величина d^2y доставляемая второю изъ формулъ (9) есть отрицательная: то изъ сего слѣдуетъ, что отъ величины $x = a$ выведенной изъ перваго уравненія, функція y получаетъ *наиболвшую величину.*

УРОКЪ ШЕСТНАДЦАТЫЙ.

Объ употребленіи дифференціаловъ разныхъ порядковъ при разысканіи наибольшихъ *и* наименьшихъ величинъ *функцій многихъ перемѣнныхъ.*

Пусть будетъ $u = f(x, y, z \ldots)$ функція перемѣнныхъ независимыхъ x, y, $z \ldots$ и положимъ, какъ въ 10^{мъ} урокѣ,

$$(1) \qquad f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz \ldots) = F(\alpha).$$

Дабы величина u соотвѣтствующая нѣкоторымъ частнымъ значеніямъ измѣняемыхъ $x, y, z \ldots$ была *наибольшая* или *наименьшая*, то для сего необходимо и достаточно будетъ чтобы соотвѣтствующая величина $F(\alpha)$ приводилась къ *наибольшей* или *наименьшей* отъ предположенія $\alpha = 0$. Изъ сего заключаемъ (*смотри* 10^{й} урокъ) что системы величинъ для $x, y, z \ldots$, отъ которыхъ фунція u или du не дѣлаются прерывными, и которыя даютъ для первой *наибольшія* или *наименьшія величины*, необходимо должны удовлетворять уравненію:

$$(2) \qquad du = 0$$

каковы бы ни были dx, dy, $dz \ldots$; а посему получимъ

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \text{ и проч.} \ldots$$

Пусть будутъ x_0, y_0, $z_0 \ldots$ величины $x, y, z \ldots$ принадлежащія одной изъ сихъ системъ. Соотвѣтствующая величина $F(\alpha)$ будетъ *наибольшая* или *наименьшая* для $\alpha = 0$, каковы бы ни были дифференціалы dx, dy, $dz \ldots$, ежели, для всѣхъ возможныхъ величинъ сихъ самыхъ дифференціаловъ, первая изъ неуничтожающихся производныхъ функцій $F'(o)$, $F''(o)$, $F'''(o)$, и проч... будетъ четнаго порядка, и сверхъ того сохранитъ во всѣхъ случаяхъ одинъ и тотъ же знакъ. (*Смотри* 15-й урокъ). Прибавимъ что $F(o)$ будетъ *наибольшая*, когда производная четнаго порядка о которой предъ симъ упомянули, будетъ отрицательная, а *наименьшая*, когда оная будетъ положительная. Если первая изъ неуничтожающихся производныхъ функцій $F'(o)$, $F''(o)$, $F'''(o)$... нечетнаго порядка, для всѣхъ возможныхъ величинъ dx, dy, dz..., или только для частныхъ величинъ сихъ самыхъ дифференціаловъ, или также, когда сія функція будетъ то положительная, то отрицательная, въ такомъ случаѣ $F(o)$ уже не можетъ быть ни *наибольшею*, ни *наименьшею*. Въ силу таковыхъ замѣчаній, и принявъ въ соображеніе уравненія (5) 14го урока, именно,

$$F(o)=u,\ F'(o)=du,\ F''(o)=d^2u, \text{ и проч....}$$

выведется слѣдующее предложеніе.

Теорема. *Изобразимъ чрезъ* $u=f(x, y, z...)$ *данную функцію перемѣнныхъ независимыхъ* x, y, z... *Дабы узнать, соотвѣтствуетъ ли или нѣтъ система величинъ* x, y, z.... *удовлетворяющая формуламъ* (3) наибольшей *или* наименьшей величинѣ *функціи* u, *должно опредѣлить величины дифференціаловъ* d^2u, d^3u, d^4u, *и проч.... для сей самой системы; очевидно, что сіи дифференціалы представляются въ видѣ полиномій, въ коихъ не будетъ другихъ произвольныхъ количествъ кромѣ дифференціаловъ* $dx=h$, $dy=k$, $dz=l$... *Пусть будетъ*

$$(4)\quad d^nu=\frac{d^nu}{dx^n}h^n+\frac{d^nu}{dy^n}k^n+\ldots+\frac{n}{1}\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k+\ldots,$$

первая изъ неуничтожающихся полиномій, въ коей n *означаетъ цѣлое число, могущее зависѣть отъ величинъ дифференціаловъ* h, k, l... *Ежели, для всѣхъ возможныхъ величинъ сихъ диф-*

дифференціаловъ, n есть четное число, а $d^n u$ *количество положительное; то найденная величина для функціи u будетъ* наименьшая. *Оная же выйдетъ* наибольшая, *когда n оставаясь по прежнему четнымъ числомъ, знакъ предъ* $d^n u$ *будетъ постоянно отрицательный. Наконецъ, ежели n будетъ иногда нечетное число, или ежели дифференціалъ* $d^n u$ *будетъ то положительный, то отрицательный; тогда величина найденная для u не будетъ ни* наибольшая, *ни* наименьшая.

Примѣчаніе. Предъидущая теорема справедлива, въ силу правилъ приведенныхъ въ 15мъ урокѣ, когда функціи $F(\alpha)$, $F'(\alpha), \ldots F^{(n)}(\alpha)$ остаются непрерывными относительно къ α, въ сопредѣльности частной величины $\alpha = 0$, или, что все равно, когда u, du, $d^2u \ldots d^n u$ непрерывны, относительно къ измѣняемымъ x, y, $z \ldots$ въ сопредѣльности тѣхъ частныхъ значеній, которыя мы приписываемъ симъ самымъ перемѣннымъ.

Слѣдствіе 1ое. Сдѣлаемъ приложеніе для сей теоремы. Опредѣлимъ сперва величину выраженія

$$(5) \qquad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \frac{d^2u}{dy^2}k^2 + \ldots + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}hk + \ldots,$$

подставляя въ производныя функціи $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\ldots \frac{d^2u}{dx\,dy}$, $\ldots$ величины x, y, $z \ldots$ доставляемыя формулами (3). Искомая величина для d^2u будетъ равна нулю, если всѣ сіи производныя уничтожатся. Въ противномъ случаѣ, d^2u будетъ однородная функція произвольныхъ количествъ $h, k, l \ldots$; въ семъ предположеніи, измѣняя количества h, k, $l \ldots$, могутъ произойти три случая. Или дифференціалъ d^2u будетъ удерживать постоянно одинъ и тотъ же знакъ, не обращаясь при томъ въ нуль; или онъ уничтожится для нѣкоторыхъ частныхъ величинъ h, k, $l \ldots$ и приметъ прежній знакъ, когда перестанетъ обращаться въ нуль; или наконецъ, оный дифференціалъ, будетъ то положительный, то отрицательный. Величина опредѣленная для u будетъ всегда или *наибольшая* или *наименьшая* въ первомъ случаѣ, иногда во второмъ, но никогда въ третьемъ. Прибавимъ, что во второмъ случаѣ получится *наибольшая* или *наименьшая величина*, ежели для каждой изъ системъ величинъ h, k, l . . . удовлетворяющихъ уравненію $d^2u = 0$, первый изъ неуничтожающихся дифференціаловъ d^3u, d^4u . . . . будетъ всегда четнаго порядка, имѣя одинакій знакъ съ дифференціалами d^2u, не обращающимися въ нуль.

Слѣдствіе 2ᵉ. Ежели подстановленіе найденныхъ величинъ для x, y, z . . . обращаетъ въ нуль всѣ производныя втораго порядка, то какъ въ семъ случаѣ d^2u будетъ тожественно равенъ нулю, посему и не можетъ быть ни *наибольшей*, ни *наименьшей величины*, развѣ что чрезъ таковое подстановленіе уничтожится и d^3u, когда всѣ производныя третьяго порядка обратятся въ нули.

Слѣдствіе 3ᵉ. Ежели бы чрезъ подстановленіе найденныхъ величинъ для x, y, z . . . уничтожились всѣ производныя втораго и третьяго порядка, то получились бы тожественныя уравненія $d^2u = 0$, $d^3u = 0$, и надлежало бы прибѣгнуть къ первому изъ дифференціаловъ d^4u, d^5u . . . который тожественно не обращается въ нуль. Ежели сей дифференціалъ будетъ нечетнаго порядка, то функція u не можетъ имѣть ни *наибольшей*, ни *наименьшей величины*. Полагая же что дифференціалъ четнаго порядка, а посему вида

$$(6)\quad d^{2m}u = \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}h^{2m} + \frac{d^{2m}u}{dy^{2m}}k^{2m} + \ldots + \frac{2m}{1}\,\frac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}h^{2m-1}k + \ldots,$$

могли бы произойти опять три случая. Или дифференціалъ о которомъ говорится, удержитъ одинъ и тотъ же знакъ не обращаясь въ нуль, когда станемъ измѣнять величины количествъ h, k. l . . .; или онъ уничтожится для нѣкоторыхъ частныхъ значеній h, k, $l\ldots$, и приметъ прежній знакъ, когда перестанетъ обращаться въ нуль; или наконецъ, сей дифференціалъ будетъ то положительный, то отрицательный. Найденная величина для u будетъ всегда *наибольшая* или *наименьшая* въ первомъ случаѣ, иногда во второмъ, но никогда въ третьемъ. Сверхъ того, дабы судить, имѣется ли или нѣтъ во второмъ случаѣ *наибольшая* или *наименьшая величина*, надлежитъ для каждой системы величинъ $h, k, l\ldots$ удовлетворяющихъ уравненію $d^{2m}u=o$, найти между дифференціалами порядка превышающаго $2m$, первый неуничтожающійся дифференціалъ, и разсмотрѣть, будетъ ли оный всегда четнаго порядка, и сверхъ того, имѣетъ ли онъ одинакій знакъ съ величинами $d^{2n}u$ разнствующими отъ нуля.

Необходимо замѣтить, что поелику величина $d^{2m}u$, доставляемая формулою (6) есть функція цѣлая относительно количествъ $h, k, l\ldots$, то посему и не можетъ переходить, при измѣненіи сихъ количествъ, изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, не обратившись въ нуль въ промежуткѣ. Замѣтимъ еще, что еслибъ u была неявная функція перемѣнныхъ x, y, $z\ldots$, или еслибъ нѣкоторыя изъ сихъ измѣняемыхъ сдѣлались неявными функціями всѣхъ прочихъ, то каждое изъ количествъ du, d^2u, $d^3u\ldots$ опредѣлилось бы посредствомъ одного или нѣскольких дифференціальныхъ уравненій, въ функціи дифференціаловъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Примѣръ. Положимъ что a, b, c, $\ldots$ k, p, q, r $\ldots$ означаютъ постоянныя положительныя количества, а x, y, $z\ldots$ перемѣнныя удовлетворяющія уравненію

$$ax+by+cz+\ldots=k,$$

и что ищется *наибольшая величина* функціи $u=x^p y^q z^r\ldots$; найдется:

$$\frac{du}{u}=p\frac{dx}{x}+q\frac{dy}{y}+r\frac{dz}{z}+.., \quad \frac{d^2u}{u}-\left(\frac{du}{u}\right)^2=-p\left(\frac{dx}{x}\right)^2-q\left(\frac{dy}{y}\right)^2-r\left(\frac{dz}{z}\right)^2-...,$$

слѣдовательно изъ формулы (10) (11го урока) выведемъ:

$$\frac{p}{ax}=\frac{q}{by}=\frac{r}{cz}=...=\frac{p+q+r..}{k}, \quad x=\frac{p}{a}\cdot\frac{k}{p+q+r..}, \quad y=\frac{q}{b}\cdot\frac{k}{p+q+r..}, \quad z= \text{ и пр.}$$

Такъ какъ предъидущія величины для x, y, z . . . всегда обращатъ du въ нуль, а d^2u въ величину отрицательную, то посему заключаемъ, что онѣ соотвѣтствуютъ *наибольшей величинѣ* функціи u.

УРОКЪ СЕМНАДЦАТЫЙ.

Объ условіяхъ кои должны быть выполнены для того, чтобы полный дифференціалъ не перемѣнялъ знака, тогда, какъ измѣняются величины дифференціаловъ перемѣнныхъ независимыхъ количествъ.

Мы видѣли въ предъидущихъ урокахъ, что означая чрезъ u функцію перемѣнныхъ независимыхъ количествъ $x, y, z \ldots$, и не принимая въ разсмотрѣніе тѣхъ величинъ сихъ перемѣнныхъ отъ которыхъ одна изъ функцій u, du, d^2u, и проч. . . . дѣлается прерывною, функція u будетъ *наибольшею* или *наименьшею* только въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ полныхъ ея дифференціаловъ d^2u, d^4u, $d^6u \ldots$, а именно, первой изъ тѣхъ кои не будутъ всегда уничтожаться, удержитъ одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ возможныхъ величинъ произвольныхъ количествъ $dx = h$, $dy = k$, $dz = l \ldots$, или по крайнѣй мѣрѣ, для тѣхъ величинъ сихъ количествъ кои не обратятъ его въ нуль. Прибавимъ еще, что въ послѣднемъ предположеніи, каждая изъ системъ величинъ $h, k, l \ldots$ обращающая въ нуль полный дифференціалъ о которомъ говорится, должна будетъ перемѣнить другой полный дифференціалъ четнаго порядка, въ количество имѣющее тотъ же самой знакъ какой удерживаетъ первой дифференціалъ, коль скоро оный не уничтожается. Замѣтимъ, что дифференціалы d^2u, d^4u, $d^6u \ldots$, для опредѣленныхъ величинъ $x, y, z \ldots$, обращаются въ цѣлыя и однородныя функціи произвольныхъ количествъ $h, k, l \ldots$ Сверхъ шого, означая буквами r, s, t . . . отношенія перваго, втораго, третьяго . . . изъ сихъ количествъ, къ послѣднему изъ оныхъ, очевидно что дифференціалъ

$$(1)\quad d^m u = \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}h^{2m} + \frac{d^{2m}u}{dy^{2m}}k^{2m} + \frac{d^{2m}u}{dz^{2m}}l^{2m} + \ldots + \frac{2m}{1}\,\frac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}\,h^{2m-1}k + \ldots$$

будетъ имѣть одинакій знакъ съ цѣлою функціею r, s, t . . ., которая получится раздѣливъ $d^{2m}u$ на $2m^{ю}$ степень послѣдняго изъ количествъ h, k, l . . ., слѣдовательно будетъ имѣть одинъ и тотъ же знакъ съ полиноміею

$$(2)\quad \frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}r^{2m} + \frac{d^{2m}u}{dy^{2m}}s^{2m} + \frac{d^{2m}u}{dz^{2m}}t^{2m} + \ldots + \frac{2m}{1}\,\frac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}\,r^{2m-1}s + \ldots$$

Замѣняя таковою же полиноміею каждый изъ дифференціаловъ четнаго порядка, увидимъ что открытіе признаковъ *наиболъшихъ* и *наименьшихъ величинъ* требуетъ рѣшенія слѣдующихъ вопросовъ.

1-я Задача. *Найти условія которыя должны быть выполнены для того, чтобы цѣлая функція количествъ* r, s, t . . . *не перемѣняла знака, когда сіи количества измѣняются.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ $F(r, s, t \ldots)$ данная функція, и положимъ сперва что оная содержитъ только одно количество r. Дабы функція $F(r)$ не могла перемѣнить знака, то необходимо и достаточно того, чтобъ уравненіе

$$(3)\qquad F(r) = 0$$

не имѣло корней вещественныхъ неравныхъ, а также и нечетнаго числа вещественныхъ корней равныхъ между собою. И дѣйствительно, еслибъ имѣли

$$F(r) = (r - r_0)R \quad \text{или} \quad F(r) = (r - r_0)^{2m+1}R,$$

гдѣ r_0 означаетъ вещественный корень уравненія (3), m цѣлое число, а R полиномію которая не дѣлится на $r - r_0$, то легко усмотрѣть, что для двухъ величинъ r весьма мало разнствующихъ отъ r_0, но изъ коихъ одна болѣе, а другая менѣе r_0, функція $F(r)$ получила бы двѣ величины съ противными знаками. Сверхъ того, поелику непрерывная функція количества r не можетъ перемѣнить знака, съ измѣненіемъ r между двумя данными предѣлами, не обратясь въ нуль въ промежуткѣ: то утвердительно можно сказать, что если уравненіе (3) не будетъ имѣть вещественныхъ корней, то первая часть онаго удержитъ всегда одинъ и тотъ же знакъ, и никогда не обратится въ нуль; если же $F(r)$ иногда и обратится въ нуль, удерживая прежній знакъ, то оная будетъ равна произведенію нѣскольких множителей вида $(r-r_0)^{2m}$ на полиномію, которая не можетъ обратиться въ нуль ни для какой возможной величины r.

Теперь разсмотримъ общій случай, когда имѣемъ функцію содержащую какое ни есть число количествъ r, s, $t\ldots$ Тогда, чтобы $F(r, s, t\ldots)$ не могла перемѣнить знака, необходимое и притомъ достаточное условіе будетъ то, чтобъ уравненіе

(4) $$F(r, s, t\ldots)=0$$

разрѣшенное относительно къ r, не могло имѣть ни вещественныхъ корней неравныхъ, также и нечетнаго числа вещественныхъ корней равныхъ, полагая впрочемъ s, $t\ldots$ совершенно произвольными.

Слѣдствіе 1ᵉ. Функція $F(r)$ или $F(r, s, t\ldots)$ удерживаетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ, когда уравненіе (3) или (4) не имѣетъ вещественныхъ корней. (*Смотри* статью объ опредѣленіи числа вещественныхъ корней алгебрическихъ уравненій, въ 17ʸ тетради сочиненія *Journal de l'Ecole polytechnique*, стр. 457).

Слѣдствіе 2ᵉ. Пусть будетъ $u=f(x, y)$. Полный дифференціалъ

$$(5)\qquad d^2u=\frac{d^2u}{dx^2}h^2+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+\frac{d^2u}{dy^2}k^2$$

удержитъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ, когда уравненіе

$$(6)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}r^2+2\frac{d^2u}{dxdy}r+\frac{d^2u}{dy^2}=0$$

не будетъ имѣть вещественныхъ корней, то-есть когда

$$(7)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2>0.$$

Тотъ же самый дифференціалъ (5) могъ бы обратиться въ нуль, удерживая постоянно одинъ и тотъ же знакъ, еслибъ первый членъ формулы (7) уничтожился; но еслибы сей первый членъ сдѣлался отрицательнымъ, то оный дифференціалъ получилъ бы величины съ противными знаками.

Слѣдствіе 3^e^. Пусть будетъ $u=f(x,y,z)$. Полный дифференціалъ

$$(8)\quad d^2u=\frac{d^2u}{dx^2}h^2+\frac{d^2u}{dy^2}k^2+\frac{d^2u}{dz^2}l^2+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+2\frac{d^2u}{dxdz}hl+2\frac{d^2u}{dydz}kl$$

постоянно удержитъ одинъ и тотъ же знакъ, когда уравненіе

$$(9)\quad \frac{d^2u}{dx^2}r^2+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}s+\frac{d^2u}{dxdz}\right)r+\frac{d^2u}{dy^2}s^2+2\frac{d^2u}{dydz}s^2+\frac{d^2u}{dz^2}=0,$$

разрѣшенное относительно къ r, вовсе не будетъ имѣть вещественныхъ корней, то есть, когда полагая s совершенно произвольнымъ, имѣемъ неравенство

$$(10)\quad \left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right]s^2+2\left[\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dydz}-\frac{d^2u}{dxdy}\frac{d^2u}{dxdz}\right]s+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dz^2}-\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)^2>0.$$

Сіе послѣднее условіе будетъ выполнено, если слѣдующія два неравенства будутъ имѣть мѣсто,

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{d^2u}{dy^2}-\left(\dfrac{d^2u}{dxdy}\right)^2>0,\quad\text{и} \\ \left[\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{d^2u}{dy^2}-\left(\dfrac{d^2u}{dxdy}\right)^2\right]\left[\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{d^2u}{dz^2}-\left(\dfrac{d^2u}{dxdz}\right)^2\right]-\left[\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{d^2u}{dydz}-\dfrac{d^2u}{dxdy}\dfrac{d^2u}{dxdz}\right]^2>0. \end{cases}$$

Примѣчаніе. Пусть будетъ $u=f(x,y,z\ldots)$ функція n измѣняемыхъ независимыхъ величинъ x, y, $z\ldots$, и положимъ

$$(12) \qquad F(r,\ s,\ t\ldots)=$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}r^2+\frac{d^2u}{dy^2}s^2+\frac{d^2u}{dz^2}t^2+\ldots+2\frac{d^2u}{dx\,dy}rs+2\frac{d^2u}{dx\,dz}rt+2\frac{d^2u}{dy\,dz}st+\ldots$$

Дифференціалъ d^2u и функція $F(r,\ s,\ t\ldots)$ всегда будутъ имѣть одинакіе знаки съ количествомъ $\frac{d^2u}{dx^2}$, если произведеніе $\frac{d^2u}{dx^2}F(r,\ s,\ t\ldots)$ во всѣхъ случаяхъ будетъ имѣть положительный знакъ, что очевидно случится, когда *наименьшія* величины каждаго изъ произведеній

$$(13) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}F(r),\quad \frac{d^2u}{dx^2}F(r,\ s),\quad \frac{d^2u}{dx^2}F(r,\ s,\ t),\ \text{и проч.}$$

будутъ положительныя. Сверхъ того, полагая

$$D_1=\frac{d^2u}{dx^2},\quad D_2=\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2}-\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)^2,\ \text{и проч.}\ldots$$

и изображая вообще чрезъ D_n общаго знаменателя входящаго въ величины для $h, k, l \ldots$ выведенныя изъ уравненій (смотри *Analyse algebrique* стр. 80)

$$(14) \qquad \left\{\begin{array}{l}\frac{d^2u}{dx^2}h+\frac{d^2u}{dx\,dy}k+\frac{d^2u}{dx\,dz}l+\ldots=1,\\[4pt] \frac{d^2u}{dx\,dy}h+\frac{d^2u}{dy^2}k+\frac{d^2u}{dx\,dz}l+\ldots=1,\\[4pt] \frac{d^2u}{dx\,dz}h+\frac{d^2u}{dy\,dz}k+\frac{d^2u}{dz^2}l+\ldots=1,\end{array}\right.$$

легко докажется, что *наибольшія* и *наименьшія величины* функцій $F(r)$, $F(r,\ s)$, $F(r,\ s,\ t)$, и проч. будутъ соотвѣтственно равны

$$(15) \qquad \frac{D_2}{D_1},\quad \frac{D_3}{D_2},\quad \frac{D_4}{D_3},\ \text{и проч.}\ldots\ \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

И такъ дифференціалъ d^2u удержитъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ, если произведеніе каждой изъ дробей (15) на D_1 будетъ положительное, или, что все равно, ежели

D_2, D_3, D_4.., D_n будутъ имѣть одинакіе знаки съ количествами D^2_1, D^3_1, D^4_1...D^n_1.

Полагая функцію u зависящею отъ трехъ только перемѣнныхъ количествъ x, y, z, очевидно что найденныя нами условія приведутся къ двумъ слѣдующимъ: $D_2 > 0$, $D_1 D_3 > 0$, равнозначущія съ тѣми кои даютъ формулы (11).

2-я Задача. *Даны двѣ цѣлыя функціи перемѣнныхъ r, s, t..., найти условія необходимыя для того, чтобы вторая функція удерживала опредѣленный знакъ въ тѣхъ случаяхъ, когда первая изъ нихъ уничтожается.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ $F(r, s, t\ldots)$ первая функція а $R = \varpi(r, s, t\ldots)$ вторая. Изъ двухъ уравненій $F(r, s, t\ldots) = 0$ и $R = \varpi(r, s, t\ldots)$ исключимъ r. Разрѣшая, относительно къ R уравненіе получаемое чрезъ исключеніе r, необходимо, чтобы найденная величина для R имѣла требуемый знакъ, когда перемѣннымъ s, t... припишутся вещественныя величины коимъ соотвѣтствуетъ также вещественная величина для измѣняемой r.

УРОКЪ ОСЬМНАДЦАТЫЙ.

Дифференціалы какой либо функціи многихъ перемѣнныхъ величинъ, изъ коихъ каждая есть линейная функція другихъ перемѣнныхъ независимыхъ количествъ. Разложеніе цѣлыхъ функцій на вещественные множители первой и второй степени.

Пусть будутъ $a, b, c \ldots k$ постоянныя количества, а

$$(1) \qquad u = ax + by + cz + \ldots + k$$

линейная функція перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z \ldots$ Дифференціалъ

$$(2) \qquad du = a\,dx + b\,dy + c\,dz + \ldots$$

будетъ постоянное же количество, и слѣдовательно дифференціалы d^2u, $d^3u, \ldots$ обратятся всѣ въ нули. Сіе самое приводитъ насъ къ заключенію что послѣдовательные дифференціалы функцій $f(u)$, $f(u, v)$, $f(u, v, w \ldots)$, и проч. сохраняютъ одинъ и тотъ же видъ, когда перемѣнныя $u, v, w \ldots$ принимаются за независимыя, или когда $u, v, w \ldots$ изображаютъ линейныя функціи перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z \ldots$ И такъ, полагая $s = f(u)$, въ томъ и въ другомъ случаѣ найдется:

$$(3) \quad ds = f'(u)\,du,\; d^2s = f''(u)\,du^2,\; d^3s = f'''(u)\,du^3, \ldots d^ns = f^{(n)}(u)\,du^n;$$

полагая $s = f(u, v)$,

$$(4) \qquad d^n s = \frac{d^n f(u, v)}{du^n}\,du^n + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^n f(u, v)}{du^{n-1}dv}\,du^{n-1}\,dv + \ldots$$

$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{d^n f(u, v)}{du\,dv^{n-1}}\,du\,dv^{n-1} + \frac{d^n f(u, v)}{dv^n}\,dv^n;$$

полагая $s = f(u) \cdot f(v)$,

(5) $$d^n s =$$

$$f^{(n)}(u) f(v)\, du^n + \frac{n}{1} f^{(n-1)}(u) f'(v)\, du^{n-1}\, dv + \ldots$$
$$+ \frac{n}{1} f'(u) f^{(n-1)}(v)\, du\, dv^{n-1} + f(u) f^{(n)}(v)\, dv^n,$$

и проч.... Изобразивъ чрезъ $f(u)$, $f(v)$, $f(u, v)$ ... цѣлыя функціи перемѣнныхъ u, v, w..., и положивъ что u, v, w ... суть линейныя функціи перемѣнныхъ x, y, z ..., легко удостовѣриться, что формулы (3), (4), (5) ... будутъ справедливы и въ томъ даже случаѣ, когда постоянныя количества a, b, c ... k и проч. входящія въ u, v, w ... сдѣлаются мнимыми. Напримѣръ, полагая $s = f(x + y\sqrt{-1})$, получимъ,

(6) $$ds = f'(x + y\sqrt{-1}) \cdot (dx + \sqrt{-1}\, dy), \ldots$$
$$d^n s = f^{(n)}(x + y\sqrt{-1}) \cdot (dx + \sqrt{-1}\, dy)^n;$$

полагая $s = f(x - y\sqrt{-1})$,

(7) $$ds = f'(x - y\sqrt{-1})(dx - \sqrt{-1}\, dy), \ldots$$
$$d^n s = f^{(n)}(x - y\sqrt{-1})(dx - \sqrt{-1}\, dy)^n;$$

полагая $s = f(x + y\sqrt{-1}) \cdot f(x - y\sqrt{-1})$,

(8) $$d^n s = f^{(n)}(x + y\sqrt{-1}) \cdot f(x - y\sqrt{-1}) \cdot (dx + \sqrt{-1}\, dy)^n$$
$$+ \frac{n}{1} f^{(n-1)}(x + y\sqrt{-1}) . f'(x - y\sqrt{-1}) . (dx + \sqrt{-1}\, dy)^{n-1}(dx - \sqrt{-1}\, dy) + \ldots$$
$$+ \frac{n}{1} f'(x + y\sqrt{-1}) . f^{(n-1)}(x - y\sqrt{-1}) . (dx + \sqrt{-1}\, dy)(dx - \sqrt{-1}\, dy)^{n-1}$$
$$+ f(x + y\sqrt{-1}) . f^{(n)}(x - y\sqrt{-1}) . (dx - \sqrt{-1}\, dy)^n.$$

Изъ сей послѣдней формулы легко вывести слѣдующее предложеніе.

1-я Теорема. *Пусть будетъ $f(x)$ вещественная и цѣлая функція измѣняемой x. Полагая*

(9) $$s = f(x + y\sqrt{-1}) \cdot f(x - y\sqrt{-1}),$$

всегда можно будетъ удовлетворить вещественными величинами перемѣнныхъ x *и* y *уравненію*

(10) $$s = 0$$

Доказательство. Пусть будетъ n степень функціи $f(x)$; слѣдовательно имѣемъ

(11) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

гдѣ a_0, a_1, ... a_{n-1}, a_n означаютъ постоянныя количества, изъ коихъ первое, именно a_0, не можетъ быть равно нулю. Сверхъ того, принявъ перемѣнныя x, y вещественными, означимъ чрезъ r, ϱ, R, R_1, R_2, и проч.... модули (*) мнимыхъ выраженій

$$x+y\sqrt{-1},\ dx+dy\sqrt{-1},\ f(x+y\sqrt{-1}),\ f'(x+y\sqrt{-1}),$$
$$f''(x+y\sqrt{-1}),\ \text{и проч.} \ldots$$

и въ слѣдствіе сего, положимъ

(12)
$$x + y\sqrt{-1} = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$
$$dx + dy\sqrt{-1} = \varrho(\cos\tau + \sqrt{-1}\sin\tau);$$

(13)
$$\left\{\begin{array}{l} f(x+y\sqrt{-1}) = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T), \\ f'(x+y\sqrt{-1}) = R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1), \\ f''(x+y\sqrt{-1}) = R_2(\cos T_2 + \sqrt{-1}\sin T_2) \ldots \\ f^{(n)}(x+y\sqrt{-1}) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n). \end{array}\right.$$

r, ϱ, R, R_1, R_2 ... R_n будутъ количества положительныя; t, τ, T, T_1, T_2 ... T_n вещественныя дуги; посему будемъ имѣть

(14) $$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

(*) Подъ названіемъ: *модуль* мнимаго выраженія $X + Y\sqrt{-1}$, сочинитель разумѣетъ положительную величину $\sqrt{X^2 + Y^2}$.

Примѣчаніе Переводчика.

$$(15)\quad s = R^2 = [a_0 r^n \cos nt + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)t + \ldots + a_{n-1} r \cos t + a_n]^2$$
$$+ [a_0 r^n \sin nt + a_1 r^{n-1} \sin(n-1)t + \ldots + a_{n-1} r \sin t]^2$$
$$= r^{2n}\left[a^2_0 + \frac{2a_0 \cdot a_1 \cos t}{r} + \frac{a^2_1 + 2a_0 a_2 \cos t}{r^2} + \ldots\right].$$

Изъ сихъ послѣднихъ формулъ слѣдуетъ, что количество s, изображающее функцію цѣлую и слѣдовательно непрерывную относительно перемѣнныхъ x, y, останется всегда положительнымъ и безпрестанно будетъ возрастать, когда станемъ давать симъ двумъ перемѣннымъ, или только одной изъ нихъ, а слѣдовательно и модулю r, численныя величины постепенно возрастающія. Изъ чего должно заключить, что функція s способна будетъ принять одну или нѣсколько *наименьшихъ величинъ* соотвѣтствующихъ одной или нѣсколькимъ системамъ конечныхъ величинъ для перемѣнныхъ x и y. Разсмотримъ въ частности одну изъ сихъ системъ, и опредѣлимъ соотвѣтствующія онымъ величины выраженій

$$(16)\quad f'(x+y\sqrt{-1}),\ f''(x+y\sqrt{-1}), \ldots f^{(n)}(x+y\sqrt{-1}).$$

Нѣкоторыя изъ сихъ величинъ могутъ быть равны нулю; но невозможно чтобы всѣ въ одно время уничтожились, ибо выраженіе $f^{(n)}(x+y\sqrt{-1})$, обращается вмѣстѣ съ $f^{(n)}(x)$ въ произведеніе $1 . 2 . 3 \ldots n . a_0$, и слѣдовательно равняется постоянной величинѣ и разнствуетъ отъ нуля. И такъ, пусть будетъ $f^{(m)}(x+y\sqrt{-1})$ первое изъ неуничтожающихся выраженій (16). Ежели самая функція $f(x+y\sqrt{-1})$ не обратится въ нуль, то $d^m s$ будетъ, въ силу формулы (8), первый изъ неуничтожающихся дифференціаловъ функціи s. Напротивъ того, ежели

$$(17)\qquad f(x+y\sqrt{-1}) = 0,$$

то и дифференціалъ $d^m s$ обратится въ нуль. Легко видѣть, что сей послѣдній только случай можно допустить. Ибо въ первомъ предположеніи, вывели бы изъ формулы (8)

$$(18)\qquad d^m s =$$

$$f^{(m)}(x+y\sqrt{-1})\,f(x-y\sqrt{-1})\,(dx+\sqrt{-1}\,dy)^m$$
$$+f(x+y\sqrt{-1})\,f^{(m)}(x-y\sqrt{-1})\,(dx-\sqrt{-1}\,dy)^m$$
$$=2RR_m\varrho^m\cos(T_m-T+m\tau);$$

и слѣдовательно, дифференціалъ $d^m s$, перемѣняя знакъ когда вмѣсто τ подставимъ $\tau+\frac{\pi}{2}$, не будетъ для всѣхъ возможныхъ величинъ количествъ dx и dy имѣть положительный знакъ, что есть необходимое условіе, когда функція s будетъ *наименьшая*. И такъ всѣ системы величинъ для x и y, соотвѣтствующія *наименьшимъ величинамъ* функціи s, будутъ удовлетворять уравненію (17), которое также можно представить въ видѣ: $R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T)=0$, откуда извлекается $R=0$, $s=R^2=0$. Слѣдовательно функція s обратится въ нуль при вещественныхъ и конечныхъ величинахъ перемѣнныхъ x и y, всякой разъ какъ оная достигнетъ одной изъ тѣхъ *наименьшихъ величинъ*, коей существованіе мы выше сего доказали.

Слѣдствіе. Поелику вещественная функція $s=R^2$ не можетъ уничтожиться иначе какъ въ случаѣ $R=0$; то и мнимыя функціи

$$f(x+y\sqrt{-1})=R(\cos T+\sqrt{-1}\sin T),$$
$$f(x-y\sqrt{-1})=R(\cos T-\sqrt{-1}\sin T)$$

уничтожатся также въ одно время съ s. Слѣдовательно всѣ вещественныя величины измѣняемыхъ x и y, удовлетворяющія уравненію (10), будутъ также удовлетворять уравненію (17) и еще слѣдующему:

$$(19) \qquad f(x - y\sqrt{-1}) = 0.$$

Симъ величинамъ x и y будутъ соотвѣтствовать вещественныя величины r и t удовлетворяющія двумъ уравненіямъ

$$(20) \quad f(r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}) = 0, \quad f(r\cos t - r\sin t\sqrt{-1}) = 0.$$

Въ частномъ случаѣ, когда величина y обращается въ нуль, уравненія (17), (19) и (20) приводятся къ одному, именно:

$$(21) \qquad f(x) = 0,$$

которому слѣдовательно удовлетворяетъ въ настоящемъ случаѣ вещественная величина x. Сіи примѣчанія непосредственно приводятъ насъ къ слѣдующему предложенію.

2-я Теорема. *Ежели $f(x)$ означаетъ вещественную функцію перемѣнной x, то всегда можно удовлетворить уравненію (21), или вещественными величинами сей перемѣнной, или парными мнимыми величинами вида*

$$(22) \quad x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t), \quad x = r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t).$$

Примѣчаніе. Изобразивъ чрезъ x_0 вещественный или мнимый корень уравненія (20), полиномія $f(x)$ будетъ дѣлиться на множителя первой степени $x - x_0$. И такъ, двумъ парнымъ мнимымъ корнямъ вида

$$r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t), \quad r(\cos t - \sqrt{-1}\sin t),$$

будутъ соотвѣтствовать два множителя первой степени $x - r\cos t - r\sin t\sqrt{-1}$, $x - r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}$, кои будучи перемножены между собою, даютъ вещественный множитель второй степени, именно: $(x-r\cos t)^2+r^2\sin^2 t = x^2-2rx\cos t+r^2$. На семъ основаніи, въ силу 2-й теоремы, слѣдуетъ, что всякая вещественная и цѣлая функція перемѣнной x, дѣлится на вещественный множитель или первой, или второй степени. По раздѣленіи, получится въ частномъ другая вещественная и цѣлая функція, которая также сама будетъ дѣлиться на другаго множителя. Продолжая такимъ образомъ, данная функція $f(x)$, разложится на вещественные множители первой и второй степени. Уравнивая сихъ множителей нулю, опредѣлятся вещественные или мнимые корни уравненія (21), число коихъ будетъ равно числу единицъ, заключающихся въ степени функціи $f(x)$. (Смотри *Analyse algébrique*, Главу X).

УРОКЪ ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ.

Объ употребленіи производныхъ функцій и дифференціаловъ разныхъ порядковъ при разложеніи функцій.

Легко разложить цѣлую функцію количества x по возрастающимъ цѣлымъ степенямъ сей перемѣнной, когда даны частныя величины самой функціи и ея послѣдовательныхъ производныхъ для $x=0$. И дѣйствительно, означивъ чрезъ $F(x)$ предложенную функцію, чрезъ n степень сей функціи, и чрезъ a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ неизвѣстные коеффиціенты при разныхъ степеняхъ x въ искомомъ разложеніи, будемъ имѣть

$$F(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots+a_n x^n. \tag{1}$$

Дифференцируя n разъ сряду уравненіе (1), получится:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} F'(x)=1 \cdot a_1+2 a_2 x+\ldots+n a_n x^{n-1}, \\ F''(x)=1 \cdot 2 \cdot a_2 \cdot+\ldots+(n-1) n a_n x^{n-2}, \\ \text{и проч.} \ldots \\ F^{(n)}(x)=1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n a_n. \end{array}\right.$$

Полагая во всѣхъ сихъ уравненіяхъ $x=0$ найдемъ:

$$(3)\quad a_0=F(o),\ a_1=\frac{1}{1}F'(o),\ a_2=\frac{1}{1.2}F''(o), \ldots a_n=\frac{1}{1.2.3..n}F^{(n)}(o),$$

слѣдовательно уравненіе (1) дасть

$$(4)\quad F(x)=F(o)+\frac{x}{1}F'(o)+\frac{x^2}{1.2}F''(o)+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3..n}F^{(n)}(o).$$

Примѣръ. Возмемъ $F(x)=(1+x)^n$; получимъ извѣстную формулу:

(5) $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{n}{1}x^{n-1} + x^n.$

Теперь изобразимъ чрезъ $u = f(x, y, z \ldots)$ цѣлую функцію перемѣнныхъ x, y, $z \ldots$, а чрезъ n степень сей функціи, то есть, наибольшую сумму, могущую произойти отъ сложенія показателей разныхъ перемѣнныхъ взятыхъ въ одномъ и томъ же членѣ. Пусть будетъ

$$F(\alpha) = f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz \ldots),$$

то $F(\alpha)$ можно принимать за цѣлую функцію количества α, степени n, а посему будемъ имѣть

$$F(\alpha) = F(o) + \frac{\alpha}{1}F'(o) + \frac{\alpha^2}{1.2}F''(o) + \frac{\alpha^3}{1.2.3}F'''(o) + \ldots + \frac{\alpha^n}{1.2.3 \ldots n}F^{(n)}(o).$$

Сія послѣдняя формула, въ силу предложеній доказанныхъ въ 14мъ урокѣ, можетъ быть изображена слѣдующимъ образомъ:

$$(6) \qquad f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz \ldots)$$
$$= u + \frac{\alpha}{1}du + \frac{\alpha^2}{1.2}d^2u + \frac{\alpha^3}{1.2.3}d^3u + \ldots + \frac{\alpha^n}{1.2.3 \ldots n}d^nu.$$

Прибавимъ, что таковое разложеніе будетъ справедливо для какихъ ни есть величинъ α, или конечныхъ, или безконечно-малыхъ. Принимая, для краткости, $\alpha = 1$, найдется:

$$(7) \qquad f(x + dx,\ y + dy,\ z + dz \ldots)$$
$$= u + \frac{1}{2}du + \frac{1}{1.2}d^2u + \frac{1}{1.2.3}d^3u + \ldots + \frac{1}{1.2.3 \ldots n}d^nu.$$

Въ частномъ случаѣ, когда вмѣсто функціи $f(x, y, z \ldots)$ будемъ разсматривать функцію одной перемѣнной x, получимъ $u = f(x)$, $du = f'(x)dx$, $d^2u = f''(x)dx^2 \ldots d^nu = f^{(n)}(x)dx^n$, въ силу же формулы (7), подставивъ h вмѣсто dx, найдемъ:

$$(8)\ f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3 \ldots n}f^{(n)}(x).$$

Впрочемъ, можно было бы прямо вывести сіе послѣднее уравненіе изъ формулы (4).

Примѣръ. Полагая $f(x)=x^n$, найдется:

$$(9)\qquad (x+h)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}h^2+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2h^{n-2}+\frac{n}{1}xh^{n-1}+h^n.$$

Примѣчаніе. Если $f(x)$ дѣлится на $(x-a)^m$, то есть, когда будетъ

$$(10)\qquad f(x)=(x-a)^m\varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ означаетъ цѣлую функцію перемѣнной x, то разложеніе величины $f(a+h)$, по возрастающимъ степенямъ h, очевидно будетъ дѣлиться на h^m. Въ силу доказаннаго выше, сіе разложеніе будетъ

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(a)+ \text{ и проч.}\ldots$$

И такъ, когда $f(x)=(x-a)^m\varphi(x)$, то докажется что $f(a)=0$, также и $f'(a)=0$, $f''(a)=0,\ldots f^{(m-1)}(a)=0$. Тоже самое можно доказать дифференцируя нѣсколько разъ сряду уравненіе (10), изъ котораго, помощію формулы (15) (14$^{\text{го}}$ урока) послѣдовательно выводимъ:

$$(11)\qquad \begin{cases} f'(x)=(x-a)^m\varphi'(x)+m(x-a)^{m-1}\varphi(x), \\ f''(x)=(x-a)^m\varphi''(x)+2m(x-a)^{m-1}\varphi'(x)+m(m-1)(x-a)^{m-2}\varphi(x), \\ \text{и проч.}\ldots \\ f^{(m-1)}(x)=(x-a)^m\varphi^{(m-1)}(x)+\ldots+m(m-1)\ldots3.2(x-a)\varphi(x). \end{cases}$$

И такъ, когда $f(x)$ будетъ цѣлая функція перемѣнной x, можно утвердить, что если уравненіе

$$(12)\qquad f(x)=0$$

имѣетъ m корней равныхъ, то каждому изъ производныхъ уравненій

$$(13)\quad f'(x)=0,\ f''(x)=0,\ f'''(x)=0, \text{ и проч.}\ldots f^{(m-1)}(x)=0$$

будетъ удовлетворено величиною для x равною a. Замѣтимъ еще, что поелику $f(x)$ дѣлится на $(x-a)^m$, то $f'(x)$ будетъ дѣлиться на $(x-a)^{m-1}$, $f''(x)$ на $(x-a)^{m-2}$, и проч.... наконецъ $f^{(m-1)}(x)$ только на $x-a$. Что касается до функціи $f^{(m)}(x)$, то поелику оная опредѣляется формулою

$$(14)\ f^{(m)}(x)=(x-a)^m\varphi^{(m)}(x)+\frac{m}{1}m(x-a)^{m-1}\varphi^{(m-1)}(x)+\text{и проч...}$$
$$+\frac{m}{1}m(m-1)\ldots3.2.(x-a)\varphi'(x)+m(m-1)\ldots3.2.1.\varphi(x),$$

посему для частной величины $x=a$, оная изобразится чрезъ

$$(15)\qquad f^{(m)}(a)=1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)\,m\,.\,\varphi(a).$$

Всѣ сіи замѣчанія справедливы даже и въ томъ случаѣ, когда въ величинѣ $f(x)$ выраженной уравненіемъ (10), $\varphi(x)$ не будетъ изображать цѣлую функцію перемѣнной x. Впрочемъ, извѣстно какимъ образомъ сіи примѣчанія приводятъ къ опредѣленію равныхъ корней въ алгебрическихъ уравненіяхъ.

Теперь пусть будутъ $y=F(x)$, и $z=f(x)$ двѣ цѣлыя функціи перемѣнной x, обѣ дѣлимыя на $(x-a)^m$. Если число m больше единицы, то величины дробей $\frac{z}{y}$, и $\frac{dz}{dy}=\frac{z'}{y'}$, для $x=a$, представятся въ одно и тоже время въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$, и слѣдовательно дробь $\frac{z'}{y'}$ будетъ безполезна для опредѣленія истиннаго значенія дроби $\frac{z}{y}$ для частной величины $x=a$ (*смотри* 6[й] урокъ). Не смотря на то, истинная величина дроби $\frac{z}{y}$ и въ настоящемъ случаѣ есть предѣлъ къ коему стремится отношеніе $\frac{\Delta z}{\Delta y}$, тогда какъ разности Δy, Δz приближаются къ нулю. Положимъ что x получаетъ безконечно-малое приращеніе $\Delta x=\alpha\,dx$, то въ силу формулы (6), получимъ:

$$\Delta y=y+\frac{\alpha}{1}dy+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2y\ldots+\frac{\alpha^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}d^{m-1}y$$
$$+\frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m}d^my+\frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}d^{m+1}y+\ldots$$

$$\Delta z = z + \frac{\alpha}{1} dz + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 z \ldots + \frac{\alpha^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} d^{m-1} z$$
$$+ \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m} d^m z + \frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)} d^{m+1} z + \ldots$$

Теперь, подставляя вмѣсто x частную величину a, очевидно что отъ таковаго подстановленія производныя функціи y', $y'' \ldots y^{(m-1)}$, z', $z'' \ldots z^{(m-1)}$, а слѣдовательно и дифференціалы dy, $d^2y, \ldots d^{(m-1)}y$, dz, $d^2z, \ldots d^{(m-1)}z$, всѣ уничтожатся; посему получимъ:

$$\Delta y = \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m} d^m y + \frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)} d^{m+1} y + .. = \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m}\left(d^m y + \frac{\alpha}{m+1} d^{m+1} y + ..\right)$$
$$\Delta z = \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m} d^m z + \frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)} d^{m+1} z + .. = \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m}\left(d^m z + \frac{\alpha}{m+1} d^{m+1} z + ..\right)$$

откуда

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{d^m z + \frac{\alpha}{m+1} d^{m+1} z + \ldots}{d^m y + \frac{\alpha}{m+1} d^{m+1} y + \ldots};$$

потомъ, полагая $\alpha = 0$, найдется:

$$\text{пр.} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{d^m z}{d^m y} = \frac{z^{(m)}}{y^{(m)}}.$$

И такъ величина дроби $\frac{z}{y}$ или $\frac{f(x)}{F(x)}$, для $x = a$, будетъ равна дроби

$$\frac{d^m z}{d^m y} \text{ или } \frac{f^{(m)}(x)}{F^{(m)}(x)},$$

гдѣ должно также положить $x = a$.

Примѣръ. Ежели $\varphi(x)$ означаетъ цѣлую функцію, которая не дѣлится на $x - a$, а $F(x)$ другую, цѣлую же функцію, дѣлимую на $(x - a)^m$, то для $x = a$, будемъ имѣть

$$(16)\ \frac{(x-a)^m \varphi(x)}{F(x)} = \frac{1.2.3\ldots m\varphi(x) + 2.3\ldots m.m(x-a)\varphi'(x) + \text{ и проч.}}{F^{(m)}(x)} = \frac{1.2.3\ldots m.\varphi(a)}{F^{(m)}(a)}.$$

УРОКЪ ДВАДЦАТЫЙ.

Разложеніе раціональныхъ (соизмѣримыхъ) дробей.

Изобразимъ чрезъ $f(x)$ и $F(x)$ двѣ цѣлыя функціи перемѣнной x, изъ коихъ первая степени m, а вторая степени n. Частное $\frac{f(x)}{F(x)}$ принимаетъ названіе *раціональной дроби*. Сверхъ того, уравненіе

$$(1) \qquad F(x) = 0$$

будетъ имѣть n вещественныхъ или мнимыхъ корней, равныхъ или неравныхъ; предположивъ сперва что они неравны, и означивъ оные чрезъ x_0, x_1, x_2, ... x_{n-1}, необходимо будемъ имѣть

$$(2) \qquad F(x) = k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

гдѣ k есть коеффиціентъ стоящій предъ x^n въ $F(x)$, на семъ основаніи пусть будетъ

$$(3) \qquad \varphi(x) = k(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}), \text{ и } \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = A_0.$$

Уравненіе (2) приметъ видъ

$$(4) \qquad F(x) = (x - x_0)\,\varphi(x);$$

и поелику разность

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A_0 = \frac{f(x) - A\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

обратится въ нуль для $x = x_0$, то въ семъ предположеніи и полиномія $f(x) - A_0\varphi(x)$ также уничтожится. И такъ сію полиномію можно будетъ раздѣлить алгебрически на $x - x_0$; слѣдовательно будетъ $f(x) - A_0\varphi(x) = (x - x_0)\,\chi(x)$, или

$$(5) \qquad f(x) = A_0\varphi(x) + (x - x_0)\,\chi(x),$$

гдѣ $\chi(x)$ изображаетъ другую цѣлую функцію перемѣнной x. Раздѣливъ же обѣ части уравненія (5) на $F(x)$, получимъ:

$$(6)\quad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{x-x_0}+\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_0}{x-x_0}+\frac{\chi(x)}{k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}.$$

И такъ можно отъ раціональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ отдѣлить простую дробь вида $\frac{A_0}{x-x_0}$, гдѣ A_0 есть количество постоянное; въ остаткѣ же получится другая раціональная дробь коей знаменатель будетъ функція въ которую обратится полиномія $F(x)$ когда оную раздѣлимъ на линейнаго множителя $x-x_0$. Положимъ, что такимъ образомъ, отдѣлили послѣдовательно отъ $\frac{f(x)}{F(x)}$, потомъ отъ $\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, и проч...., рядъ простыхъ дробей

$$\frac{A_0}{x-x_0},\ \frac{A_1}{x-x_1},\ \frac{A_2}{x-x_2},\ldots\frac{A_{n-1}}{x-x_{n-1}},$$

такъ что наконецъ въ остаткѣ имѣемъ раціональную дробь, коей знаменатель есть постоянное количество k; слѣдовательно сей остатокъ будетъ цѣлая функція перемѣнной x. Означивъ оную чрезъ Q, получимъ:

$$(7)\quad \frac{f(x)}{F(x)}=Q+\frac{A_0}{x-x_0}+\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-x_{n-1}}$$

откуда

$$(8)\quad f(x)=QF(x)+A_0\frac{F(x)}{x-x_0}+A_1\frac{F(x)}{x-x_1}+A_2\frac{F(x)}{x-x_2}+\ldots+A_{n-1}\frac{F(x)}{x-x_{n-1}}.$$

Въ семъ уравненіи всѣ члены слѣдующіе за произведеніемъ $QF(x)$ суть цѣлыя функціи перемѣнной x степени низшей чѣмъ n; посему заключаемъ что Q изображаетъ частное число происшедшее отъ алгебрическаго дѣленія $f(x)$ на $F(x)$. Сверхъ того, поелику каждый изъ членовъ второй части уравненія (8) дѣлится на $x-x_0$, а $f(x)$ не дѣлится, то очевидно будемъ имѣть, для $x=x_0$,

$$(9)\qquad f(x)=A_0\frac{F(x)}{x-x_0}=A_0\frac{dF(x)}{dx}=A_0F'(x).$$

И такъ, чтобъ получить величину A_0, стоитъ только подставить x_0 вмѣсто x въ дробь $\frac{f(x)}{F'(x)}$. Такимъ же образомъ опредѣлятся величины для A_1, $A_2 \ldots$; слѣдовательно имѣемъ:

$$(10)\quad A_0 = \frac{f(x_0)}{F'(x_0)},\quad A_1 = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)},\quad A_2 = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)},\ \ldots\ A_{n-1} = \frac{f(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}.$$

Видъ въ коемъ представляются сіи величины, показываетъ что онѣ совершенно независимы отъ вида производимаго разложенія $\frac{f(x)}{F(x)}$ на частныя дроби. Прибавимъ, что величина A_0, доставляемая формулою (9), можетъ быть представлена или дробью $\frac{f(x_0)}{F'(x_0)}$ или $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$; откуда слѣдуетъ, что первая изъ формулъ (10) равнозначуща со вторымъ изъ уравненій (3). Когда два корня x_0, x_1 будутъ мнимые и парные, то есть вида $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, и $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, то означивъ чрезъ A и B два вещественныя количества удовлетворяющія уравненію

$$(11)\qquad A - B\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})},$$

найдемъ, что простыя дроби, соотвѣтствующія симъ корнямъ, будутъ

$$(12)\qquad \frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}},\qquad \frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}.$$

Сложивъ сіи двѣ дроби, получится слѣдующая:

$$(13)\qquad \frac{2A(x-\alpha) + 2B\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2},$$

коей числитель будетъ вещественная и линейная функція перемѣнной x, а знаменатель, множитель второй степени полиноміи $F(x)$.

Примѣры. Разложеніе дробей $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{x}{x^2-1}$, $\frac{x^m}{x^n \pm 1}$, $\frac{x^{n-1}}{x^n \pm 1}$, и проч.

Разсмотримъ случай, когда уравненіе (1) имѣетъ равные корни. Изобразивъ чрезъ a, b, $c \ldots$ различные корни, чрезъ

p, q, r . . . цѣлыя числа, и чрезъ k постоянный коеффиціентъ, полиномія $F(x)$ будетъ вида

$$(14) \qquad F(x) = k(x-a)^p (x-b)^q (x-c)^r \ldots$$

Положимъ для сокращенія

$$(15) \qquad \varphi(x) = k(x-b)^q (x-c)^r \ldots, \quad \text{и} \quad \frac{f(a)}{\varphi(a)} = A,$$

то уравненіе (14) получитъ видъ

$$(16) \qquad F(x) = (x-a)^p \varphi(x);$$

а какъ обѣ разности $\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A$, $f(x) - A\varphi(x)$ уничтожаются въ предположеніи $x = a$, то необходимо будетъ

$$(17) \qquad f(x) = A\varphi(x) + (x-a)\chi(x),$$

гдѣ $\chi(x)$ означаетъ новую цѣлую функцію перемѣнной x. На семъ основаніи, изъ уравненій (14), (16) и (17) выведемъ

$$(18) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{\chi(x)}{(x-a)^{p-1}\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{\chi(x)}{k(x-a)^{p-1}(x-b)^q(x-c)^r\ldots}.$$

И такъ, отдѣляя отъ раціональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ простую дробь, вида $\frac{A}{(x-a)^p}$, въ остаткѣ получится другая раціональная дробь коей знаменатель будетъ равенъ частному произходящему отъ раздѣленія полиноміи $F(x)$ на одного изъ множителей равныхъ $x-a$. Положимъ что помощію нѣсколькихъ подобныхъ разложеній, отдѣлили послѣдовательно отъ знаменателя остальной дроби, во 1$^{\text{хъ}}$. всѣхъ множителей равныхъ $x-a$; во 2$^{\text{хъ}}$. всѣхъ множителей равныхъ $x-b$; въ 3$^{\text{хъ}}$. всѣхъ множителей равныхъ $x-c$, и проч. . . . Послѣдній изъ всѣхъ остатковъ будетъ раціональная дробь имѣющая постояннаго знаменателя, то есть, цѣлая функція перемѣнной x: и означивъ чрезъ Q сію цѣлую функцію, а чрезъ $A, A_1, A_2, \ldots A_{p-1}$, B, B_1, $B_2 \ldots B_{q-1}$, C, C_1, $C_2 \ldots C_{r-1}$, и проч. . . постоянныхъ числителей различныхъ простыхъ дробей, получимъ:

$$(19) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = Q + \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A_1}{(x-a)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^q} + \ldots + \frac{C}{(x-c)^r} + \ldots$$

Дабы доказать во 1^{хъ}. что полиномія Q есть частное произшедшее отъ алгебрическаго дѣленія $f(x)$ на $F(x)$, во 2^{хъ}. что величины постоянныхъ количествъ A, A_1, ... A_{p-1}, B, и проч.... совершенно независятъ отъ вида производимаго разложенія $\frac{f(x)}{F(x)}$, стоитъ только разсмотрѣть слѣдующую формулу:

(20) $f(x)=QF(x)+A\frac{F(x)}{(x-a)^p}+A_1\frac{F(x)}{(x-a)^{p-1}}+..+A_{p-1}\frac{F(x)}{x-a}+B\frac{F(x)}{(x-b)^q}+..$,

получаемую чрезъ умноженіе уравненія (19) на $F(x)$; въ формулѣ (20) всѣ члены слѣдующіе за произведеніемъ $QF(x)$ суть цѣлыя функціи перемѣнной x, степени низшей противъ степени функціи $F(x)$; сверхъ того, если въ сей формулѣ (20) положимъ $x=a+z$, и разложимъ потомъ обѣ части уравненія по возрастающимъ степенямъ перемѣнной z, (*смотри* 19^{й} урокъ), то сравненіе постоянныхъ членовъ и коеффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ z въ обоихъ разложеніяхъ, доставитъ слѣдующія уравненія:

(21) $f(a)=\frac{AF^{(p)}(a)}{1.2.3...p}$, $f'(a)=A\frac{F^{(p+1)}(a)}{1.2.3...(p+1)}+A_1\frac{F^{(p)}(a)}{1.2.3...p}$, $f''(a)=$ и пр.

изъ коихъ выведемъ для постоянныхъ количествъ A, A_1, A_2, ... одну только систему величинъ, именно:

(22) $A=\frac{1.2.3...p.f(a)}{F^{(p)}(a)}$, $A_1=\frac{1.2.3...(p+1)f'(a)-AF^{(p+1)}(a)}{(p+1)F^{(p)}(a)}$, и проч.

Такимъ же точно образомъ получатся величины для B, B_1, B_2, ... C, C_1, C_2 ... Замѣтимъ что первая изъ формулъ (22) даетъ для постоянной A величину получаемую дробью $\frac{(x-a)^p f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда въ оной положимъ $x=a$, и слѣдовательно равную дроби $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$. (Подробнѣе о семъ предметѣ изложено въ *Analyse algébrique*, Гл. XI).

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ПЕРВЫЙ.

Объ опредѣленныхъ (междупредѣлвныхъ или частныхъ) интегралахъ.

Положимъ что функція $y = f(x)$ есть непрерывная относительно къ перемѣнной x между двумя конечными предѣлами $x = x_0$, $x = X$, и означимъ чрезъ x_1, x_2, . . x_{n-1} другія величины перемѣнной x вставленныя между сими двумя предѣлами, и которыя постепенно или возрастаютъ, или уменьшаются отъ перваго предѣла до втораго. Посредствомъ сихъ промежуточныхъ величинъ, можно будетъ разложить разность $X - x_0$ на элементы

$$(1) \qquad x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, \ldots X - x_{n-1},$$

которые будутъ имѣть всѣ одинъ знакъ. Далѣе, положимъ что каждый изъ сихъ элементовъ помножили на величину $f(x)$, соотвѣтствующую *началу* сего самаго элемента, именно, элементъ $x_1 - x_0$ на $f(x_0)$, элементъ $x_2 - x_1$ на $f(x_1)$ и проч..., наконецъ элементъ $X - x_{n-1}$ на $f(x_{n-1})$; и пусть будетъ

$$(2) \quad S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

сумма всѣхъ сихъ произведеній. Количество S очевидно будетъ зависѣть, во 1^{хъ}. отъ числа n элементовъ, на которые разложена будетъ разность $X - x_0$, во 2^{хъ}. отъ самыхъ величинъ сихъ элементовъ, и слѣдовательно отъ образа производимаго разложенія. Необходимо замѣтить, что если численныя величины элементовъ принимаются весьма малыми, а число n весьма большимъ; то образъ производимаго разложенія будетъ имѣть весьма малое вліяніе на величину S, что можетъ быть доказано слѣдующимъ образомъ.

Если бы, вмѣсто всѣхъ элементовъ, разсматривалась только одна разность $X-x_0$, то имѣли бы

(3) $$S=(X-x_0)f(x_0).$$

Но ежели возмемъ выраженія (1) за элементы разности $X-x_0$, то величина S, опредѣленная въ семъ случаѣ уравненіемъ (2), равна суммѣ всѣхъ элементовъ умноженной на среднюю величину функцій

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2), \ldots f(x_{n-1})$$

(*смотри* предварительныя предложенія въ *Cours d'analyse*, слѣдствіе 3-й теоремы, или III примѣч. перев.). Сверхъ того, поелику сіи коеффиціенты равны частнымъ значеніямъ выраженія

$$f[x_0+\theta(X-x_0)]$$

соотвѣтствующимъ величинамъ θ, заключающимся между предѣлами нуль и единица, то докажется, подобно какъ въ 7мъ урокѣ, что средняя величина, объ которой предъ симъ упомянули, изобразится также чрезъ $f[x_0+\theta(X-x_0)]$, гдѣ θ означаетъ, какъ и выше, число большее нуля, но меньшее единицы. Итакъ, вмѣсто уравненія (2), можно будетъ принять слѣдующее:

(4) $$S=(X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)].$$

Чтобъ перейти отъ образа разложенія который мы предъ симъ употребляли къ другому, въ коемъ численныя величины элементовъ разности $X-x_0$ были бы еще меньше, достаточно каждую изъ разностей (1) разложить на новые элементы. Тогда должно будетъ, во второй части уравненія (2), вмѣсто произведенія $(x_1 - x_0) f(x_0)$, подставить сумму подобныхъ произведеній, и потомъ сію последнюю сумму замѣнить выраженіемъ вида

$$(x_1 - x_0) f[x_0 + \theta(x_1 - x_0)],$$

гдѣ θ будетъ означать число меньшее единицы, ибо между сею суммою и произведеніемъ $(x_1 - x_0) f(x_0)$ существуетъ зависимость точно такая, какъ и между величинами S данными уравненіями (4) и (3). По той же причинѣ должно будетъ поставить вмѣсто произведенія $(x_2 - x_1) f(x_1)$ такую сумму членовъ, которая можетъ быть изображена въ видѣ

$$(x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)],$$

гдѣ θ_1 означаетъ число меньшее единицы. Продолжая такимъ образомъ далѣе, заключимъ наконецъ, что при новомъ образѣ разложенія, величина S будетъ вида

$$(5)\quad S = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)] + \ldots \\ + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1} (X - x_{n-1})].$$

Полагая въ семъ последнемъ уравненіи

$$f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0,\ f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ f[x_{n-1} + \theta_{n-1} (X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1},$$

выведемъ

$$(6)\quad S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \ldots \\ + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}]$$

потомъ, перемноживъ настоящимъ образомъ, будетъ

$$(7)\quad S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\ \pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1 (x_2 - x_1) \pm \ldots \pm \varepsilon_{n-1} (X - x_{n-1}).$$

Прибавимъ, что если численныя величины элементовъ $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots X - x_{n-1}$ будутъ весьма малы, то каждое изъ количествъ $\pm \varepsilon_0$, $\pm \varepsilon_1, \ldots \pm \varepsilon_{n-1}$ будетъ весьма мало разнствовать отъ нуля, а посему и самая сумма

$$\pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1 (x_2 - x_1) \pm \ldots\ldots \pm \varepsilon_{n-1} (X - x_{n-1}),$$

равная произведенію $X - x_0$ на среднюю величину между количествами $\pm \varepsilon_0$, $\pm \varepsilon_1$, ... $\pm \varepsilon_{n-1}$. Слѣдовательно, чрезъ сравненіе уравненій (2) и (7) заключаемъ, что величина S, опредѣленная по образу разложенія, въ коемъ элементы разности $X - x_0$ имѣютъ весьма малыя численныя величины, весьма мало измѣнится, если перейдемъ къ другому образу разложенія, гдѣ каждый изъ сихъ элементовъ подраздѣляется еще на нѣсколько другихъ.

Положимъ теперь, что разсматриваются въ одно время два образа разложенія разности $X - x_0$, и что въ каждомъ изъ нихъ элементы сей разности имѣютъ весьма малыя численныя величины. Сіи два образа разложенія можно будетъ сравнить съ третьимъ, такимъ, чтобы каждый элементъ, или перваго, или втораго образа разложенія, былъ составленъ изъ суммы нѣсколькихъ элементовъ третьяго. Дабы выполнить сіе условіе, достаточно будетъ чтобы всѣ величины перемѣнной x, вставленныя въ двухъ первыхъ разложеніяхъ между предѣлами x_0, X, были введены въ третій образъ разложенія, и тогда докажется что величина S весьма мало измѣняется, при переходѣ отъ перваго или втораго образа къ третьему, слѣдовательно также переходя и отъ перваго ко второму. И такъ, когда элементы разности $X - x_0$ принимаются безконечно-малыми, то образъ разложенія имѣетъ только безконечно-малое вліяніе на величину S; и если мы будемъ безпрестанно уменьшать численныя величины сихъ элементовъ, увеличивая число оныхъ, то величина S сдѣлается наконецъ почти постоянною, то есть, оная достигнетъ нѣкотораго предѣла, который будетъ зависѣть единственно отъ вида функціи $f(x)$, и предѣльныхъ величинъ перемѣнной x, именно:

x_0, X. Сей-то предѣлъ и называется *опредѣленнымъ*, или *междупредѣлвнымъ*, или еще *частнымъ интеграломъ*.

Замѣтимъ теперь, что изображая чрезъ $\Delta x = h = dx$ конечное приращенѣе перемѣнной x, всѣ члены составляющіе величину S, каковы суть произведенія $(x_1 - x_0)f(x_0)$, $(x_2 - x_1)f(x_1)$, и проч.... будутъ заключаться въ общей формулѣ:

$$(8) \qquad hf(x) = f(x)\,dx,$$

изъ коей они выведутся одинъ за другимъ, полагая сперва $x = x_0$ и $h = x_1 - x_0$, потомъ $x = x_1$, и $h = x_2 - x_1$, и проч... Посему можно принять количество S за сумму произведеній подобныхъ выраженію (8); что означаютъ иногда характеристикою Σ такимъ образомъ:

$$(9) \qquad \Sigma hf(x) = \Sigma f(x)\,\Delta x$$

Что касается до опредѣленнаго интеграла, къ коему приближается количество S, между тѣмъ какъ элементы разности $X - x_0$ дѣлаются безконечно-малыми: то оный условились изображать знакоположеніемъ $\int hf(x)$ или $\int f(x)\,dx$, гдѣ буква $\int$ поставленная вмѣсто буквы Σ, означаетъ уже не сумму произведеній подобныхъ выраженію (8), но предѣлъ таковой суммы. Сверхъ того, поелику величина разсматриваемаго нами опредѣленнаго интеграла, зависитъ отъ предѣльныхъ величинъ перемѣнной x, именно отъ x_0 и X: то условились также ставить сіи двѣ величины, первую въ низу, а вторую въ верху буквы $\int$, или писать ихъ съ боку интеграла, въ такомъ видѣ:

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}.$$

Первое изъ сихъ знакоположеній, въ первый разъ употребленное Г. *Фурье*, есть самое удобное. Въ частномъ случаѣ, когда вмѣсто функціи $f(x)$ имѣемъ постоянное количество a; то каковъ бы ни былъ образъ разложенія разности $X - x_0$ на элементы, найдется,

$$S = a(X - x_0),$$

слѣдовательно

$$\int_{x_0}^{X} a\,dx = a(X - x_0). \tag{11}$$

Полагая въ сей послѣдней формулѣ $a = 1$, получимъ:

$$\int_{x_0}^{X} dx = X - x_0. \tag{12}$$

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ВТОРОЙ.

Формулы опредѣляющія точныя или приближенныя величины междупредѣленныхъ интеграловъ.

Изъ сказаннаго нами въ послѣднемъ урокѣ слѣдуетъ, что если разность $X - x_0$, будетъ разложена на безконечно-малые элементы $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, . . . $X - x_{n-1}$; то сумма

$$(1) \quad S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

будетъ стремиться къ предѣлу, который изображается опредѣленнымъ интеграломъ

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx.$$

Изъ правилъ, на коихъ мы основали сіе предложеніе, слѣдуетъ также, что тотъ же самой предѣлъ получили бы опредѣляя величину для S изъ уравненій (5) и (6) (21$^{\text{го}}$ урока), вмѣсто того чтобы выводить оную по формулѣ (1), то есть, предположивъ

$$(3) \quad S = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)] + \ldots$$
$$+ (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1} (X - x_{n-1})],$$

гдѣ θ_0, $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}$ означаютъ какія нибудь числа меньшія единицы, или,

$$(4) \quad S = (x_1 - x_0)\, [f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)\, [f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \ldots$$
$$+ (X - x_{n-1})\, [f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}],$$

гдѣ ε_0, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$ означаютъ числа уничтожающіяся вмѣстѣ съ элементами разности $X - x_0$. Первая изъ двухъ предъидущихъ формулъ обратится въ уравненіе (1), когда возмемъ $\theta_0 = \theta_1 = \ldots = \theta_{n-1} = 0$. Напротивъ того, полагая $\theta_0 = \theta_1 = \ldots = \theta_{n-1} = 0$, найдется:

$$(5)\quad S = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \ldots + (X - x_{n-1})f(X).$$

Ежели въ сей послѣдней формулѣ, перемѣнимъ между собою два количества x_0, X, равно какъ и всѣ члены, находящіеся на равныхъ разстояніяхъ отъ двухъ крайнихъ въ ряду x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$, X; то получимъ новую величину для S равную той, которую даетъ уравненіе (1), но только съ противнымъ знакомъ. Предѣлъ, къ коему будетъ стремиться сія новая величина S, долженъ быть равенъ интегралу (2), съ противнымъ знакомъ; слѣдовательно сей новый интегралъ выводится изъ (2) чрезъ измѣненіе порядка предѣловъ. Посему

$$(6)\qquad \int_X^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^X f(x)\,dx.$$

Формулы (1) и (5) часто употребляются при изысканіи приближенныхъ величинъ опредѣленныхъ интеграловъ. Для большей удобности въ выкладкахъ, обыкновенно предполагаютъ, что количества x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$, заключающіяся въ сихъ формулахъ, составляютъ ариѳметическую прогрессію. Тогда каждый элементъ разности $X - x_0$ равенъ дроби $\frac{X - x_0}{n}$, и означивъ сію дробь чрезъ i, уравненія (1) и (5) обратятся въ два слѣдующія:

$$(7)\quad S = i[f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - 2i) + f(X - i)],$$
$$(8)\quad S = i[f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - 2i) + f(X - i) + f(X)].$$

Можно также положить, что количества x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$, X составляютъ геометрическую прогрессію, коей знаменатель весьма мало разнствуетъ отъ единицы.

Въ семъ предположеніи, сдѣлавъ $\left(\frac{X}{x_0}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha$, изъ формулъ (1) и (5) получимъ двѣ новыя величины для S; первая изъ нихъ будетъ

$$(9)\quad S = \alpha\{x_0 f(x_0) + x_0(1+\alpha) f[x_0(1+\alpha)] + \ldots + \frac{X}{1+\alpha} f\left(\frac{X}{1+\alpha}\right)\}.$$

Замѣтимъ, что во многихъ случаяхъ, изъ уравненій (7) и (9) можно вывести, не только приближенныя величины интеграла (2), но даже и точную его величину, равную $пр.\ S$. На примѣръ, найдется,

$$(10)\quad \int_{x_0}^{X} x\,dx = пр.\ \frac{(X-x_0)(X+x_0-i)}{2} = пр.\ \frac{X^2-x_0^2-i(X-x_0)}{2} = \frac{X^2-x_0^2}{2};$$

$$(11)\quad \int_{x_0}^{X} A^x\,dx = пр.\ \frac{i(A^X-A^{x_0})}{A^i-1} = \frac{A^X-A^{x_0}}{l(A)},\quad \int_{x_0}^{X} e^x\,dx = e^X - e^{x_0};$$

$$(12)\quad \int_{x_0}^{X} x^a dx = пр.\ \frac{\alpha(X^{a+1}-x_0^{a+1})}{(1+\alpha)^{a+1}-1} = \frac{X^{a+1}-x_0^{a+1}}{a+1},\ \int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x} = пр.\ n\alpha = l\left(\frac{X}{x_0}\right);$$

послѣднее уравненіе должно быть допускаемо только въ томъ случаѣ, когда количества x_0, X имѣютъ одинакіе знаки. Прибавимъ еще, что часто легко бываетъ найти зависимость между однимъ опредѣленнымъ интеграломъ и другимъ того же рода. Такъ, напримѣръ, изъ формулы (1) выводимъ:

$$(13)\quad \int_{x_0}^{X} a\varphi(x)dx = пр.\ a[(x_1-x_0)\varphi(x_0) + \ldots + (X-x_{n-1})\varphi(x_{n-1})]$$
$$= a\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx;$$

$$(14)\quad \int_{x_0}^{X} f(x+a)dx = пр.\ [(x_1-x_0)f(x_0+a) + \ldots + (X-x_{n-1})f(x_{n-1}+a)]$$
$$= \int_{x_0+a}^{X+a} f(x)\,dx;$$

$$(15)\quad \int_{x_0}^{X} f(x-a)\,dx = \int_{x_0-a}^{X-a} f(x)\,dx,\ \int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x-a} = \int_{x_0-a}^{X-a}\frac{dx}{x} = l\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right);$$

послѣднее уравненіе должно быть допускаемо только въ томъ случаѣ, когда $x_0 - a$ и $X - a$ изображаютъ количества имѣющія одинакіе знаки. Сверхъ того, полагая $x_0 = 0$ въ формулѣ (8), и подставляя потомъ $f(X-x)$ вмѣсто $f(x)$, получимъ:

$$(16) \int_0^X f(X-x)dx = np.i[f(X-i)+f(X-2i)+\ldots+f(2i)+f(i)+f(0)] = \int_0^X f(x)\,dx;$$

отсюда, соображаясь съ уравненіемъ (14), выводимъ

$$(17) \int_0^{X-x_0} f(X-x)\,dx = \int_0^{X-x_0} f(x+x_0)\,dx = \int_{x_0}^X f(x)\,dx.$$

Также, подставляя въ формулѣ (9) $\frac{1}{x\,l(x)}$ вмѣсто $f(x)$ и β вмѣсто $l(1+\alpha)$, получимъ:

$$(18) \int_{x_0}^X \frac{dx}{x\,l(x)} = np.\beta\left[\frac{1}{l(x_0)}+\frac{1}{l(x_0)+\beta}+\ldots+\frac{1}{l(X)-\beta}\right]\left(\frac{e^\beta-1}{\beta}\right) = \int_{l(x_0)}^{l(X)} \frac{dx}{x} = l\left[\frac{l(X)}{l(x_0)}\right],$$

гдѣ количества x_0, X должны быть положительныя, и оба больше, или оба меньше единицы.

Здѣсь необходимо замѣтить, что видъ, въ которомъ представляется величина для S, въ уравненіяхъ (4) и (5) предъидущаго урока, приличествуетъ равно и интегралу (2). И дѣйствительно, сіи уравненія, оба имѣя мѣсто, тогда какъ или разность $X-x_0$, или количества x_1-x_0, x_2-x_1, ... $X-x_{n-1}$ разложены на безконечно-малые элементы, будутъ справедливы и при переходѣ къ предѣлу; посему будемъ имѣть

$$(19) \int_{x_0}^X f(x)\,dx = (X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)], \text{ и}$$

$$(20) \int_{x_0}^X f(x)dx = (x_1-x_0)f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)]+(x_2-x_1)f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)] + \ldots\ldots\ldots + (X-x_{n-1})f[x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1})],$$

гдѣ θ, θ_0, θ_1 ... θ_{n-1} изображаютъ величины неизвѣстныя, но кои всѣ меньше единицы. Предположивъ, для большей простоты, что количества $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots X - x_{n-1}$ равны между собою, и сдѣлавъ $i = \frac{X - x_0}{n}$, найдется:

$$(21)\ \int_{x_0}^{X} f(x)dx = i[f(x_0 + \theta_0 i) + f(x_0 + i + \theta_1 i) + \ldots + f(X - i + \theta_{n-1} i)].$$

Когда функція $f(x)$ будетъ постоянно или возрастать или уменьшаться отъ $x = x_0$ до $x = X$, то вторая часть формулы (21), очевидно будетъ заключаться между двумя величинами S, данными уравненіями (7) и (8); и поелику разность сихъ величинъ есть $\pm i\,[f(X) - f(x_0)]$, то принявъ въ семъ предположеніи, полу-сумму сихъ двухъ величинъ, то есть выраженіе

$$(22)\ i[\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - 2i) + f(X - i) + \tfrac{1}{2}f(X)]$$

за приближенную величину интеграла (21), возможная погрѣшность будетъ меньше полу-разности $\pm i\,[\frac{1}{2}f(X) - \frac{1}{2}f(x_0)]$.

Примѣръ. Возмемъ $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, $x_0 = 0$, $X = 1$, $i = \frac{1}{4}$; выраженіе (22) обратится въ $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{4}\right] = 0{,}78\ldots$ А посему 0,78 есть приближенная величина интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$. Въ семъ случаѣ, возможная погрѣшность не можетъ превышать $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$. И дѣйствительно, оная будетъ менѣе одной сотой, какъ мы то въ послѣдствіи увидимъ. Когда же функція $f(x)$, то возрастаетъ, то уменьшается между предѣлами $x = x_0$, $x = X$; то возможная погрѣшность, когда примемъ одну изъ величинъ S доставляемыхъ уравненіями (7) и (8) за приближенную величину интеграла (2), очевидно будетъ менѣе произведенія количества $n i = X - x_0$ на наибольшую численную величину какую можетъ получить разность

$$(23)\qquad f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$$

когда x предполагается заключающимся между предѣлами x_0, X, а Δx между предѣлами о и i. И такъ, изображая буквою k самую большую изъ численныхъ величинъ какую получаетъ $f(x)$, тогда какъ x измѣняется отъ $x = x_0$, до $x = X$, возможная погрѣшность въ величинѣ интеграла (2), будетъ заключаться между предѣлами

$$-ki(X - x_0), \quad +ki(X - x_0).$$

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ТРЕТІЙ.

Разложеніе опредѣленнаго интеграла на нѣсколько другихъ. Мнимые опредѣленные интегралы. Геометрическое значеніе вещественныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Разложеніе функціи находящейся подъ знакомъ $\int$ на два множителя, изъ коихъ второй удерживаетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ.

Для разложенія опредѣленнаго интеграла

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

на нѣсколько другихъ такого же рода, надлежитъ разложить, или функцію стоящую подъ знакомъ $\int$, или разность $X - x_0$, на нѣсколько частей. Положимъ сперва что $f(x) = \varphi(x) + \chi(x) + \psi(x) + \ldots$; получимъ:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_0) f(x_0) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) = (x_1 - x_0)\,\varphi(x_0) + \ldots \\ + (X - x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1}) \\ + (x_1 - x_0)\chi(x_0) + \ldots + (X - x_{n-1})\,\chi(x_{n-1}) + (x_1 - x_0)\,\psi(x_0) + \ldots \\ + (X - x_{n-1})\,\psi(x_{n-1}) + \text{ и проч.}\end{aligned}$$

потомъ, переходя къ предѣламъ,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx + \text{ и проч.} \ldots$$

Посему, означая чрезъ u, v, $w \ldots$ различныя функціи перемѣнной x, и чрезъ a, b, $c \ldots$ постоянныя количества, основываясь на уравненіи (13) (22^го^ урока), получимъ:

$$(2) \quad \int_{x_0}^{X} (u + v + w + \ldots)\,dx = \int_{x_0}^{X} u\,dx + \int_{x_0}^{X} v\,dx + \int_{x_0}^{X} w\,dx + \ldots;$$

(3) $\int_{x_0}^{X}(u+v)dx=\int_{x_0}^{X}udx+\int_{x_0}^{X}vdx,\ \int_{x_0}^{X}(u-v)dx=\int_{x_0}^{X}udx-\int_{x_0}^{X}vdx,$

(4) $\int_{x_0}^{X}(au+bv+cw\ldots)dx=a\int_{x_0}^{X}udx+b\int_{x_0}^{X}vdx+c\int_{x_0}^{X}wdx+\ldots$

Разпространимъ опредѣленіе данное интегралу (1) и на тотъ случай, когда функція $f(x)$ будетъ мнимая; посему уравненіе (4) будетъ имѣть мѣсто и для мнимыхъ величинъ постоянныхъ количествъ a, b, $c\ldots$; слѣдовательно

(5) $$\int_{x_0}^{X}(u+v\sqrt{-1})\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx+\sqrt{-1}\int_{x_0}^{X}v\,dx.$$

Разложимъ теперь разность $X-x_0$ на конечное число элементовъ x_1-x_0, $x_2-x_1\ldots X-x_{n-1}$, и каждый изъ сихъ элементовъ подраздѣлимъ на другіе, коихъ численныя величины безконечно-малы; въ слѣдствіе сего измѣнится и самая величина для S данная уравненіемъ (1) (22^го урока). Произведеніе $(x_1-x_0)f(x_0)$ должно будетъ замѣнить суммою подобныхъ произведеній, имѣющею предѣломъ интегралъ $\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx$: Равнымъ образомъ и произведенія $(x_2-x_1)f(x_1)\ldots(X-x_{n-1})$ $f(x_{n-1})$ слѣдуетъ замѣнить суммами, коихъ соотвѣтственными предѣлами будутъ опредѣленные интегралы $\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx$, и проч... $\int_{x_{n-1}}^{X}f(x)\,dx$. Далѣе, сложивъ всѣ сіи различныя суммы, получимъ полную сумму, предѣломъ коей будетъ самый интегралъ (1). Но поелику предѣлъ суммы нѣсколькихъ величинъ, равенъ суммѣ ихъ предѣловъ: то будемъ имѣть

(6) $$\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{n-1}}^{X}f(x)\,dx.$$

Впрочемъ не должно забывать что цѣлое число n изображаетъ величину конечную. Когда между предѣлами x_0, X включимъ одну только величину перемѣнной x, именно ξ: то уравненіе (6) обратится въ

$$(7) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx.$$

Легко доказать что уравненія (6) и (7) имѣютъ мѣсто даже и въ томъ случаѣ, когда нѣкоторыя изъ количествъ x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$, ξ не заключаются между предѣлами x_0, X, или еще, когда разности $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots X - x_{n-1}$, $\xi - x_0$, $X - \xi$ не всѣ имѣютъ одинакіе знаки. Положимъ, напримѣръ, что разности $\xi - x_0$, $X - \xi$ съ противными знаками. Въ такомъ случаѣ, смотря по тому, будетъ ли x_0 взятъ между предѣлами ξ и X, или X между x_0 и ξ, найдется:

$$\int_{\xi}^{X} f(x)\,dx = \int_{\xi}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \text{ или}$$
$$\int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + \int_{X}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Изъ формулы (6) ($22^{\text{го}}$ урока) видимъ почему сіи два уравненія согласуются съ уравненіемъ (7). И какъ послѣднее доказано во всѣхъ предположеніяхъ: то посему изъ онаго можно будетъ прямо вывести уравненіе (6), каковы бы ни были x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$.

Въ предъидущемъ урокѣ видѣли, какъ легко опредѣляются, не только приближенныя величины интеграла (1), но даже и предѣлы возможныхъ погрѣшностей, когда функція $f(x)$ постоянно возрастаетъ или уменьшается отъ $x = x_0$, до $x = X$. Когда сіе условіе не выполнено, то очевидно что помощію формулы (6), можно будетъ разложить интегралъ (1) на нѣсколько другихъ, въ разсужденіи которыхъ сему условію будетъ удовлетворено.

Положимъ теперь что предѣлъ X больше предѣла x_0, и что функція $f(x)$ есть положительныя отъ $x = x_0$ до $x = X$; пусть будутъ x и y прямоугольныя координаты, а A площадь заключающаяся съ одной стороны между осью x и кривою линіею $y = f(x)$, а съ другой стороны между ординатами $f(x_0)$, и $f(X)$. Сія площадь, имѣющая основаніемъ линію $X - x_0$

взятую на оси абсциссъ, будетъ средняя между площадями двухъ прямоугольниковъ построенныхъ на основаніи $X - x_0$, и имѣющими высоты равныя, первый: мéньшей, а второй: бóльшей изъ двухъ ординатъ соотвѣтствующихъ крайнимъ точкамъ сего основанія. И такъ сія площадь равна прямоугольнику, коего высота есть средняя ордината выраженная чрезъ $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; слѣдовательно

$$(8) \qquad A = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

гдѣ θ означаетъ число меньшее единицы. Если основаніе $X - x_0$ будетъ разложено на безконечно-малые элементы $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots X - x_{n-1}$, то и площадь A также разложится на соотвѣтствующіе имъ элементы, коихъ величины будутъ выражены уравненіями подобными формулѣ (8). Посему, имѣемъ также

$$(9) \quad A = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \ldots \\ + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})],$$

гдѣ θ_0, $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}$ изображаютъ, какъ выше, числа меньшія единицы. Полагая что въ семъ послѣднемъ уравненіи, численныя величины элементовъ разности $X - x_0$ безконечно-малы, и переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$(10) \qquad A = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx.$$

Примѣры. Приложить формулу (10) къ кривымъ даннымъ по уравненіямъ: $y = ax^2$, $xy = 1$, $y = e^x, \ldots$

Оканчивая сей урокъ, покажемъ замѣчательное свойство вещественныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Предположимъ что $f(x) = \varphi(x) \cdot \chi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ изображаютъ двѣ новыя функціи перемѣнной x, непрерывныя между предѣлами $x = x_0$, $x = X$, и изъ коихъ, сверхъ того, вторая удерживаетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ между сими предѣлами; величина S данная уравненіемъ (1) (22го урока) обратится въ слѣдующую:

(11) $S = (x_1 - x_0)\,\varphi(x_0)\,\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\,\varphi(x_1)\,\chi(x_1) + \ldots$
$+ (X - x_{n-1})\,\varphi(x_{n-1})\,\chi(x_{n-1})$

и будетъ равна суммѣ

$$(x_1 - x_0)\,\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\,\chi(x_1) + \ldots (X - x_{n-1})\,\chi(x_{n-1})$$

умноженной на среднюю величину между коеффиціентами $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_{n-1})$, или, что все равно, на функцію вида $\varphi(\xi)$, гдѣ ξ означаетъ величину перемѣнной x, заключающуюся между двумя предѣлами x_0 и X. И такъ будетъ

(12) $S = [(x_1 - x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\chi(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})\chi(x_{n-1})] \cdot \varphi(\xi)$,

откуда, переходя къ предѣлу величины S,

(13) $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot \chi(x)\,dx = \varphi(\xi) \int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx$,

гдѣ ξ имѣетъ прежнее же значеніе.

Примѣры. Принимая постепенно

$$\chi(x) = 1, \quad \chi(x) = \frac{1}{x}, \quad \chi(x) = \frac{1}{x-a},$$

получимъ формулы:

(14) $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(\xi) \int_{x_0}^{X} dx = (X - x_0) f(\xi)$,

(15) $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \xi f(\xi) \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \xi f(\xi) \cdot l\left(\frac{X}{x_0}\right)$,

(16) $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (\xi - a) f(\xi - a) \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x-a} = (\xi - a) f(\xi - a) . l\left(\frac{X-a}{x_0 - a}\right)$,

изъ коихъ первая равнозначуща съ уравненіемъ (19) 22го урока. Прибавимъ что отношеніе $\frac{X}{x_0}$ во второй формулѣ и отношеніе $\frac{X-a}{x_0-a}$ въ третьей, предполагаются положительными.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ.

О частныхъ интегралахъ, величины коихъ суть или безконечныя или неопредѣленныя. Главныя величины неопредѣленныхъ интеграловъ.

Въ предъидущихъ урокахъ мы доказали нѣсколько замѣчательныхъ свойствъ опредѣленнаго интеграла

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

но предполагая во 1$^{\text{хъ}}$: что предѣлы x_0, X были конечныя количества, во 2$^{\text{хъ}}$: что функція $f(x)$ оставалась конечною и непрерывною между сими самыми предѣлами. Когда сіи два условія выполнены; то означивъ чрезъ x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$ новыя величины перемѣнной x, вставленныя между предѣльными величинами x_0, X, получимъ

$$(2) \quad \int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx.$$

Положимъ теперь что имѣемъ только двѣ промежуточныя величины ξ_0 и ξ, изъ коихъ первая, весьма мало разнствуетъ отъ x_0, а вторая, отъ X; уравненіе (2) обратится въ слѣдующее:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi_0} f(x)\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx,$$

которое можно написать такимъ образомъ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (\xi_0 - x_0) f[x_0 + \theta_0(\xi_0 - x_0)] + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)dx + (X - \xi) f[\xi + \theta(X - \xi)],$$

гдѣ θ_0 и θ суть два числа меньшія единицы. Если, въ сей последней формулѣ, ξ_0 будетъ стремиться къ предѣлу x_0, а ξ къ предѣлу X, то, переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = пр.\int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Когда предѣльныя величины x_0, X полагаются безконечными, или когда функція $f(x)$ не будетъ, какъ выше, конечною и непрерывною отъ $x = x_0$ до $x = X$: то въ такомъ случаѣ нельзя судить, имѣетъ ли количество означенное въ предъидущихъ урокахъ чрезъ S, опредѣленный предѣлъ, и слѣдовательно не знаемъ также какой смыслъ заключаетъ въ себѣ знакоположеніе (1), вообще означающее предѣлъ величины S. Для избѣжанія недоразумѣнія, мы распространимъ, по аналогіи, формулы (2) и (3) и на тѣ случаи, когда оныя не могутъ быть строго доказаны; посему знакоположеніе (1) во всѣхъ случаяхъ будетъ имѣть ясное и опредѣленное значеніе. Нижеслѣдующіе примѣры объяснятъ сіе на самомъ дѣлѣ.

Разсмотримъ, во первыхъ, интегралъ

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx.$$

Означивъ чрезъ ξ_0 и ξ два перемѣнныя количества, изъ коихъ первое стремится къ предѣлу $-\infty$, а второе къ предѣлу $+\infty$: то изъ формулы (3) получится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = пр.\int_{\xi_0}^{\xi} e^x dx = пр.\ (e^{\xi} - e^{\xi_0}) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty.$$

И такъ, интегралъ (4) равенъ безконечной положительной величинѣ.

Во вторыхъ, разсмотримъ интегралъ

$$(5) \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x},$$

взятый между двумя предѣлами, изъ коихъ одинъ есть безконечный, между тѣмъ какъ другой обращаетъ функцію подъ знакомъ $\int$, именно $\frac{1}{x}$, въ безконечную величину. Означимъ чрезъ ξ_0 и ξ два постоянныя количества, изъ коихъ первое стремится къ предѣлу нуль, а второе къ предѣлу ∞; изъ формулы (3) выведемъ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = пр. \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x} = пр. \, l\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) = l\left(\frac{\infty}{0}\right) = \infty.$$

И такъ, интегралъ (5) имѣетъ также безконечную положительную величину.

Замѣтимъ, что если перемѣнная x и функція $f(x)$ остаются обѣ конечными для одного изъ предѣловъ интеграла (1): то формулу (3) можно будетъ замѣнить одною изъ двухъ слѣдующихъ:

$$(6) \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = пр. \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = пр. \int_{\xi_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Въ слѣдствіе сихъ послѣднихъ формулъ, найдемъ напримѣръ:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{0} e^x dx = e^0 - e^{-\infty} = 1, \int_0^\infty e^x dx = e^\infty - e^0 = \infty; \\ \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = l(0) = -\infty, \int_0^1 \frac{dx}{x} = l\left(\frac{1}{0}\right) = \infty. \end{array} \right.$$

Разсмотримъ теперь интегралъ

$$(8) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x},$$

въ коемъ функція подъ знакомъ $\int$, именно $\frac{1}{x}$, обращается въ безконечность для частной величины $x = 0$, заключающейся между предѣлами $x = -1$, $x = +1$. По формулѣ (2) получимъ:

$$(9) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty$$

И такъ, величина интеграла (8) кажется неопредѣленною, а чтобъ увѣриться, что оная дѣйствительно такова, надлежитъ только замѣтить, что если означимъ чрезъ ε безконечно-малое число, а чрезъ μ, ν два количества постоянныя и положительныя, но произвольныя; то въ силу формулъ (6), будемъ имѣть

$$(10)\qquad \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}=np.\int_{-1}^{-\varepsilon\mu}\frac{dx}{x},\quad \int_{0}^{1}\frac{dx}{x}=np.\int_{\varepsilon\nu}^{1}\frac{dx}{x}.$$

Слѣдовательно, формула (9) обратится въ

$$(11)\ \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=np.\left\{\int_{-1}^{-\varepsilon\mu}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon\nu}^{1}\frac{dx}{x}\right\}=np.\left[l(\varepsilon\mu)+l\left(\tfrac{1}{\varepsilon\nu}\right)\right]=l\left(\tfrac{\mu}{\nu}\right),$$

и доставитъ для интеграла (8), величину совершенно неопредѣленную, поелику сія величина равняется Неперову логариѳму постояннаго произвольнаго количества $\frac{\mu}{\nu}$.

Положимъ теперь что функція $f(x)$ дѣлается безконечною между предѣлами $x=x_0$, $x=X$, отъ частныхъ величинъ перемѣнной x, именно, отъ $x=x_1$, $x=x_2$ . . . . $x=x_m$. Означимъ чрезъ ε безконечно-малое количество, а чрезъ μ_1, ν_1, μ_2, ν_2, . . . μ_m, ν_m постоянныя положительныя количества, но произвольныя; то изъ формулъ (2) и (3) выведемъ

$$(12)\ \int_{x_0}^{X}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_m}^{X}f(x)\,dx$$
$$=np.\left\{\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1}f(x)\,dx+\int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2}f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{X}f(x)\,dx\right\}.$$

Замѣняя же предѣлы x, X, предѣлами $-\infty$ и $+\infty$, получимъ

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=$$
$$np.\left\{\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1}f(x)dx+\int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2}f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}}f(x)\,dx\right\},$$

гдѣ μ, ν означаютъ опять количества постоянныя и положительныя, но произвольныя. Прибавимъ, что во второй части формулы (13), должно будетъ поставить X вмѣсто $\frac{1}{\varepsilon\nu}$, или x_0 вмѣсто $-\frac{1}{\varepsilon\mu}$, если одинъ только изъ предѣловъ x_0, X, будетъ безконечный. Во всѣхъ случаяхъ, величины интеграловъ

$$(14) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

доставляемыя уравненіями (12) и (13), могутъ быть, по свойству функціи $f(x)$, или безконечныя, или конечныя и совершенно опредѣленныя количества, или еще величины неопредѣленныя, кои будутъ зависѣть отъ частныхъ значеній постоянныхъ произвольныхъ количествъ μ, ν, μ_1, ν_1, ... μ_m, ν_m.

Положивъ въ формулахъ (12) и (13) что постоянныя произвольныя величины μ, ν, μ_1, ν_1 ... μ_m, ν_m всѣ равны единицѣ, получимъ:

$$(15) \quad \int_{x}^{X} f(x)dx = \text{пр.}\left\{\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)dx\right\},$$

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \text{пр.}\left\{\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)dx\right\}.$$

Когда интегралы (14) дѣлаются неопредѣленными, то уравненія (15) и (16) доставляютъ для каждаго изъ нихъ одну только частную величину, которую и назовемъ *главною величиною*. Если возмемъ, напримѣръ, интегралъ (8), коего общая величина неопредѣленная; то увидимъ, что главная величина сего интеграла обращается въ нуль.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ПЯТЫЙ.

О близкопредѣльныхъ частныхъ интегралахъ.

Положимъ что интегралъ относительный къ x, и въ коемъ функція подъ знакомъ $\int$ означена чрезъ $f(x)$, взятъ между двумя предѣлами безконечно близкими къ нѣкоторой частной величинѣ x, означенной чрезъ a. Если сія величина a есть количество конечное, и если, сверхъ того, функція $f(x)$ будетъ конечная и непрерывная въ сопредѣльности частнаго значенія $x = a$: то, въ слѣдствіе формулы (19) (22$^{\text{го}}$ урока), найдется, что разсматриваемый интегралъ равенъ нулю. Но сей самый интегралъ можетъ получить величину конечную, разнствующую отъ нуля, или даже величину безконечную, если будетъ $a = \pm \infty$, или $f(a) = \pm \infty$. Интегралъ относящійся къ сему послѣднему предположенію, мы назовемъ *близкопредѣльнымъ частнымъ интеграломъ*. Величина онаго вообще легко опредѣлится помощію формулъ (15) и (16) (23$^{\text{го}}$ урока), какъ мы то ниже покажемъ

Пусть будутъ ε безконечно-малое число, а μ, ν два постоянныя положительныя количества, но впрочемъ произвольныя. Если a будетъ количество конечное, удовлетворяющее уравненію $f(x) = \pm \infty$, и если означимъ чрезъ f предѣлъ къ коему приближается произведеніе $(x - a) f(x)$, между тѣмъ какъ первый его множитель приближается къ нулю: то величины близкопредѣльныхъ интеграловъ $\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx$, $\int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$, въ слѣдствіе формулы (16) (23$^{\text{го}}$ урока), будутъ весьма мало разнствовать отъ

$$(1)\ \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,.\,l\,(\mu),\quad (2)\int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,.\,l\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Напротивъ того, полагая $a = \pm\infty$, и изобразивъ буквою f предѣлъ къ коему приближается произведеніе $xf(x)$, между тѣмъ какъ перемѣнная x приближается къ предѣлу $\pm\infty$, получимъ для интеграловъ (по уравненію (15), 23$^{\text{го}}$ урока) слѣдующія величины, весьма мало разнствующія отъ настоящихъ,

$$(3)\quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,.\,l\,(\mu),\quad (4)\ \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,.\,l\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Необходимо замѣтить, что предѣлъ произведенія $(x-a)f(x)$ или $xf(x)$, зависитъ иногда отъ знака предъ первымъ его множителемъ. Такъ напримѣръ, произведеніе $x\,(x^2+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ приближается къ предѣлу $+1$, или -1, смотря по тому, будетъ ли первый множитель, именно x, приближаясь къ нулю, переходить изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, или обратно. Изъ сего замѣчанія слѣдуетъ, что количество f можетъ иногда имѣть двѣ различныя величины въ уравненіяхъ (1) и (2), также въ уравненіяхъ (3) и (4).

Разсматриваніе близкопредѣльныхъ частныхъ интеграловъ приводитъ къ опредѣленію общей величины неопредѣленнаго интеграла, когда главная его величина извѣстна. И дѣйствительно, возмемъ интегралъ

$$(5)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx\,,$$

и, сохранивъ знакоположенія предъидущаго урока, положимъ

$$(6)\ E = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{X} f(x)\,dx,$$

$$(7)\ F = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx.$$

Сверхъ того, пусть будетъ $A = пр. E$ общая величина, а $B = пр. F$ главная величина интеграла (5). Разность $A - B = пр. (E - F)$ будетъ равна суммѣ близкопредѣльныхъ интеграловъ

$$(8) \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)dx,\ \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_1+\varepsilon} f(x)dx,\ \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)dx, \ldots \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{x_m+\varepsilon} f(x)dx,$$

то есть, предѣлу къ коему приближается сумма интеграловъ (8), между тѣмъ какъ ε постепенно уменьшаясь стремится къ нулю. Далѣе, изобразивъ чрезъ $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_m$ предѣлы, къ коимъ приближаются произведенія

$$(x - x_1) f(x), \quad (x - x_2) f(x) \ldots (x - x_m) f(x),$$

между тѣмъ какъ первые ихъ множители стремятся къ нулю, найдемъ, что ежели сіи предѣлы не зависятъ отъ знаковъ сихъ первыхъ множителей: то сумма интеграловъ (8) весьма мало будетъ разнствовать отъ величины

$$(9) \qquad \mathfrak{f}_1 . l \left(\tfrac{\mu_1}{\nu_1}\right) + \mathfrak{f}_2 . l \left(\tfrac{\mu_2}{\nu_2}\right) + \ldots + \mathfrak{f}_m . l \left(\tfrac{\mu_m}{\nu_m}\right).$$

Когда $x_1 = x_0$ или $x_m = X$, то въ разности $A - B$ одинъ близкопредѣльный интегралъ уничтожится, именно, или первый или послѣдній изъ интеграловъ (8). Если возмемъ $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, то уравненія (6) и (7) обратятся въ слѣдующія:

$$(10)\ E = \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)dx,$$

$$(11)\ F = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)dx.$$

Въ томъ же самомъ предположеніи, къ интеграламъ (8) должно присовокупить еще другіе, именно:

$$(12) \qquad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\, dx,\ \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\mu}} f(x)\, dx,$$

коихъ сумма будетъ весьма мало разнствовать отъ величины выраженія

$$(13) \qquad \mathfrak{f} . l\left(\frac{\mu}{\nu}\right),$$

если произведеніе $x f(x)$ стремится къ предѣлу $\mathfrak{f}$, между тѣмъ какъ перемѣнная x приближается къ одному изъ двухъ предѣловъ $-\infty$, $+\infty$. Когда же одинъ только изъ предѣловъ x_0, X равенъ безконечности: то въ разности $A-B$ должно сохранить одинъ только изъ интеграловъ (12).

Когда для безконечно-малыхъ величинъ ε, и для конечныхъ или безконечно-малыхъ значеній произвольныхъ коеффиціентовъ μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m, всѣ близкопредѣльные интегралы (8) и (12), или по крайнѣй мѣрѣ нѣкоторые изъ нихъ, обращаются въ безконечныя величины, или въ конечныя, но разнствующія отъ нуля: то очевидно что интегралы $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ получаютъ величины безконечныя или неопредѣленныя; а сіе случится, когда количества $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_m$ не будутъ всѣ въ одно время равны нулю. Но обратное сему предложеніе не справедливо; дѣйствительно, можетъ случится что всѣ величины $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_m$ обратятся въ нули, между тѣмъ какъ интегралы (8) и (12), или по крайней мѣрѣ нѣкоторые изъ нихъ, будутъ имѣть величины конечныя, разнствующія отъ нуля, для безконечно-малыхъ значеній коеффиціентовъ μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m. Напримѣръ, возмемъ $f(x) = \frac{1}{x l(x)}$; произведеніе $x f(x)$ уничтожится отъ предположенія $x=0$, не смотря на то, близкопредѣльный интегралъ

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon\nu} \frac{dx}{x l(x)} = l\left[1 + \frac{l(\nu)}{l(\varepsilon)}\right]$$

не обратится въ нуль для безконечно-малыхъ величинъ количества ν.

Когда близкопредѣльные интегралы, входящіе въ разность $A - B$ всѣ уничтожаются для безконечно-малыхъ величинъ количества ε, какія бы впрочемъ ни были конечныя или безконечно-малыя величины коеффиціентовъ μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m: то можно заключить, что общая величина интеграла (5) обращается въ конечное и определенное количество. И дѣйствительно, означимъ въ семъ предположеніи чрезъ δ безконечно-малое число, а чрезъ ε такое количество, что для величинъ коеффиціентовъ μ, ν, μ_1, ν_1, $\ldots \mu_m$, ν_m ме́ньшихъ единицы, каждый изъ интеграловъ (8) и (12) имѣетъ численную величину менѣе $\frac{1}{2(m+1)}\delta$. Приближенная величина для B, изображенная чрезъ F, будетъ количество конечное, не содержащее уже никакой величины произвольной; и уменьшая потомъ коеффиціенты μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m до безконечности, очевидно что E будетъ болѣе и болѣе приближаться къ равенству съ A, заключаясь между предѣлами $F - \delta$ и $F + \delta$. И такъ A будетъ заключаться между сими же самыми предѣлами; слѣдовательно, можно найти такое конечное количество F, что разность $A - F$ будетъ менѣе даннаго числа δ. Изъ сего должно заключить, что общая величина A интеграла (5), въ настоящемъ предположеніи, будетъ равняться конечному и опредѣленному количеству.

Въ силу сихъ правилъ, получимъ слѣдующее предложеніе.

Теорема. *Дабы общая величина интеграла* (1) *была конечная и опредѣленная, то для сего необходимо и при томъ достаточно, чтобъ величины близкопредѣлeныхъ интеграловъ* (8) *и* (12) *входящихъ въ разность* $A - B$, *обратились въ нуль, для безконечно-малыхъ величинъ количества* ε, *какія бы впрочемъ ни были конечныя или безконечно-малыя величины коеффиціентовъ* μ, ν, μ_1 $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m.

Примѣръ. Пусть $\frac{f(x)}{F(x)}$ будетъ раціональная дробь. Дабы интегралъ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}dx$ имѣлъ конечную и опредѣленную величину; то для сего необходимо и достаточно во 1$^{\text{хъ}}$: чтобъ уравненіе $F(x)=0$ не имѣло вещественныхъ корней; во 2$^{\text{хъ}}$: чтобъ степень знаменателя $F(x)$, превосходила бы степень числителя $f(x)$, по крайней мѣрѣ двумя единицами.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ШЕСТОЙ.

О неопредѣленныхъ интегралахъ.

Если, въ опредѣленномъ интегралѣ $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, будемъ измѣнять одинъ изъ двухъ предѣловъ, напримѣръ, количество X: то и самая величина сего интеграла будетъ также измѣняться вмѣстѣ съ симъ предѣломъ; поставляя же x вмѣсто предѣла X, полагаемаго перемѣннымъ, получится новая функція измѣняемой x, которая называется интеграломъ взятымъ отъ *начала* $x = x_0$. Пусть будетъ

$$(1) \qquad \Phi(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

сія новая функція. Изъ формулы (19) (22$^{\text{го}}$ урока) получимъ

$$(2) \qquad \Phi(x) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad \Phi(x_0) = 0,$$

гдѣ θ есть число меньшее единицы; въ силу же формулы (7) (23$^{\text{го}}$ урока), имѣемъ

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx = \alpha f(x + \theta\alpha), \text{ или}$$

$$(3) \qquad \Phi(x+\alpha) - \Phi(x) = \alpha f(x + \theta\alpha).$$

Изъ уравненій (2) и (3) слѣдуетъ, что если функція $f(x)$ будетъ конечная и непрерывная въ сопредѣльности какой либо частной величины перемѣнной x; то новая функція $\Phi(x)$ будетъ не только конечною, но и непрерывною въ сопредѣльности сей же самой величины, ибо безконечно-малому приращенію перемѣнной x, будетъ соотвѣтствовать безконечно же малое приращеніе функціи $\Phi(x)$. И такъ, если функція $f(x)$ есть конечная и непрерывная отъ $x=x_0$ до $x=X$: то и функція $\Phi(x)$ будетъ таковою же между сими самыми предѣлами. Прибавимъ, что раздѣливъ обѣ части формулы (3) на α, и переходя потомъ къ предѣламъ, получимъ:

$$\Phi'(x)=f(x). \tag{4}$$

Слѣдовательно производная интеграла (1), принимая оный за функцію перемѣнной x, равна функціи $f(x)$ находящейся подъ интегральнымъ знакомъ $\int$. Подобнымъ образомъ докажется что производная интеграла $\int_x^X f(x)\,dx=-\int_X^x f(x)\,dx$, принимаемаго за функцію перемѣнной x, равна функціи $-f(x)$; посему

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^x f(x)\,dx=f(x), \text{ и } \frac{d}{dx}\int_x^X f(x)\,dx=-f(x). \tag{5}$$

Основываясь на предъидущихъ формулахъ, а также и на уравненіи (6) ($7^{\text{го}}$ урока), легко будетъ рѣшить слѣдующія задачи.

1-я Задача. *Найти такую функцію $\varpi(x)$, для которой бы производная $\varpi'(x)$ обращалась въ нуль. Или, иначе, рѣшить уравненіе*

$$\varpi'(x)=0. \tag{6}$$

Рѣшеніе. Ежели допустимъ что функція $\varpi(x)$ остается конечною и непрерывною отъ $x=-\infty$ до $x=+\infty$: то означивъ чрезъ x_0 какую ни есть частную величину перемѣнной x, изъ формулы (6) ($7^{\text{го}}$ урока) выведемъ:

$\varpi(x)-\varpi(x_0)=(x-x_0)\varpi'[x_0+\theta(x-x_0)]=0$, и слѣдовательно

$$\varpi(x)=\varpi(x_0), \tag{7}$$

или, изобразивъ чрезъ c постоянное количество $\varpi(x_0)$,

$$\varpi(x)=c. \tag{8}$$

И такъ, функція $\varpi(x)$ обращается въ постоянное количество c, и будетъ равна сей величинѣ c, отъ $x=-\infty$ до $x=\infty$. Прибавимъ, что сія постоянная величина совершенно произвольная, поелику формула (8) удовлетворяетъ уравненію (6), каково бы ни было количество c.

Если допустимъ, что функція $\varpi(x)$ дѣлается прерывною для нѣкоторыхъ частныхъ значеній перемѣнной x, и означимъ сіи частныя значенія измѣняемой x чрезъ x_1, $x_2 \ldots x_m$, предполагая, что оныя поставлены по порядку, ихъ величинъ: то уравненіе (7) будетъ имѣть мѣсто только отъ $x = -\infty$ до $x = x_1$, или отъ $x = x_1$ до $x = x_2$ и проч. . . или наконецъ, отъ $x = x_m$ до $x = +\infty$, смотря по тому, будетъ ли частная величина перемѣнной x, означенная чрезъ x_0, заключаться между предѣлами $-\infty$ и x_1, или между предѣлами x_1 и x_2 и проч.... или наконецъ между предѣлами x_m и $+\infty$. Слѣдовательно, не будетъ никакой необходимости чтобъ функція $\varpi(x)$ сохраняла одну и ту же величину отъ $x = -\infty$ до $x = +\infty$, но достаточно того, чтобы только оная оставалась постоянною между двумя послѣдовательными членами ряда

$$-\infty,\ x_1,\ x_2 \ldots x_m,\ +\infty.$$

Сіе можно видѣть, полагая напримѣръ

$$(9)\quad \varpi(x) = \frac{c_0 + c_m}{2} + \frac{c_1 - c_0}{2}\frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2}} + \frac{c_2 - c_1}{2}\frac{x - x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2}} + \ldots + \frac{c_m - c_{m-1}}{2}\frac{x - x_m}{\sqrt{(x-x_m)^2}},$$

гдѣ c_0, c_1, $c_2 \ldots c_m$ означаютъ количества постоянныя, но произвольныя. И дѣйствительно, въ семъ случаѣ, функція $\varpi(x)$, между предѣлами $x = -\infty$, $x = x_1$, будетъ равна постоянной величинѣ c_0; между предѣлами $x = x_1$ и $x = x_2$, оная будетъ равна количеству c_1, и проч. . . . наконецъ функція $\varpi(x)$ равна постоянной величинѣ c_m между предѣлами $x = x_m$, $x = \infty$.

Если пожелаемъ чтобъ $\varpi(x)$ обратилась въ c_0 для отрицательныхъ величинъ перемѣнной x, и въ c_1 для положительныхъ: то для сего стоитъ только взять

(10) $$\varpi(x) = \frac{c_0 + c_1}{2} + \frac{c_1 - c_0}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2}}.$$

2-я Задача. *Найти общую величину функціи y, удовлетворяющую уравненію*

(11) $$dy = f(x)\,dx.$$

Рѣшеніе. Означимъ чрезъ $F(x)$ частную величину неизвѣстной функціи y, а чрезъ $F(x) + \varpi(x)$ общую ея величину; изъ формулы (11), коей обѣ сіи величины должны удовлетворять, выведемъ $F'(x) = f(x)$, $F'(x) + \varpi'(x) = f(x)$, и слѣдовательно $\varpi'(x) = 0$. Но въ силу перваго изъ уравненій (5) слѣдуетъ, что формулѣ (11) можно удовлетворить взявъ $y = \int_{x_0}^{x} f(x) dx$. И такъ общая величина неизвѣстной функціи y будетъ:

(12) $$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \varpi(x),$$

гдѣ $\varpi(x)$ означаетъ функцію удовлетворяющую уравненію (6). Сія общая величина неизвѣстной y, которая заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, интегралъ (1), и сохраняетъ тотъ же видъ, какое бы ни было *начало* x_0 сего интеграла, изображена просто въ изчисленіяхъ чрезъ $\int f(x)\,dx$, и называется *неопредѣленнымъ интеграломъ*. Посему, формула (11) приводится къ слѣдующей:

(13) $$y = \int f(x)\,dx,$$

и обратно, будемъ также имѣть:

(14) $$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Если функція $F(x)$ разнится отъ интеграла (1), то общая величина неизвѣстной y, или $\int f(x)\,dx$, можетъ быть всегда представлена въ видѣ:

(15) $$\int f(x)\,dx = F(x) + \varpi(x),$$

и должна будетъ обратиться въ интегралъ (1), для частной величины функціи $\varpi(x)$ удовлетворяющей въ одно время, какъ уравненію (6), такъ и слѣдующему:

$$(16)\qquad \Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) + \varpi(x).$$

Сверхъ того, если функціи $f(x)$ и $\Phi(x)$ обѣ непрерывны между предѣлами $x = x_0$, $x = X$: то функція $F(x)$ будетъ сама также непрерывна, и слѣдовательно $\varpi(x) = \Phi(x) - F(x)$ постоянно сохранитъ одну и туже величину между сими предѣлами, между коими имѣемъ: $\varpi(x) = \varpi(x_0)$,

$$\Phi(x) - F(x) = \Phi(x_0) - F(x_0) = -F(x_0),\quad \Phi(x) = F(x) - F(x_0),$$

$$(17)\qquad \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Наконецъ, полагая въ уравненіи (17) $x = X$, найдется

$$(18)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0).$$

Изъ уравненій (15), (17) и (18) слѣдуетъ, что если дана будетъ частная величина $F(x)$ неизвѣстной y, удовлетворяющая формулѣ (11); то изъ оной можно вывести, во 1[хъ]: величину неопредѣленнаго интеграла $\int f(x)\,dx$, во 2[хъ]: величины двухъ опредѣленныхъ интеграловъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ и $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, въ томъ случаѣ, когда функціи $f(x)$ и $F(x)$ остаются непрерывными между предѣлами сихъ двухъ интеграловъ.

Примѣръ. Поелику удовлетворяемъ уравненію $dy = \frac{dx}{1+x^2}$ взявъ $y = \operatorname{arc\,tang} x$, и какъ обѣ функціи $\frac{1}{1+x^2}$ и $\operatorname{arc\,tang} x$, остаются конечными и непрерывными между предѣлами $x = -\infty$, $x = \infty$: то изъ формулъ (15), (17) и (18) выводимъ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + \varpi(x)$, $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x$, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots$

Примѣчаніе. Когда въ уравненіи (17) намѣрены распространить величину перемѣнной x далѣе предѣла для котораго функція $f(x)$ имѣетъ разрывъ непрерывности: то обыкновенно должно прибавлять ко второй части сей формулы одинъ или нѣсколько близкопредѣльныхъ интеграловъ.

Примѣръ. Поелику удовлетворяемъ уравненію $dy = \frac{dx}{x}$ принимая $y = \frac{1}{2} l(x^2)$; то означивъ чрезъ ε безконечно-малое число, а чрезъ μ, ν два положительные коеффиціента, для $x < 0$ найдемъ

$$\int_{-1}^{x} \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} l(x^2) - \tfrac{1}{2} l(1) = \tfrac{1}{2} l(x^2); \text{ а для } x > 0,$$

$$\int_{-1}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\nu\varepsilon}^{x} \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} l(x^2) - \tfrac{1}{2} l(1) + l\left(\tfrac{\mu}{\nu}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} l(x^2) + \int_{-\varepsilon}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\nu}^{\varepsilon} \frac{dx}{x}.$$

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЙ.

Различныя свойства неопредѣленныхъ интеграловъ. Способы служащіе для опредѣленія оныхъ.

Изъ сказаннаго нами въ предъидущемъ урокѣ, слѣдуетъ, что неопредѣленной интегралъ

(1) $$\int f(x)\,dx$$

есть не иное что, какъ общая величина неизвѣстной функціи y, удовлетворяющая дифференціальному уравненію

(2) $$dy = f(x)\,dx.$$

Мы видѣли также, что по данной частной величинѣ $F(x)$ той же самой неизвѣстной функціи y, легко опредѣляется и общая величина для оной, придавъ къ $F(x)$ функцію $\varpi(x)$, удовлетворяющую уравненію $\varpi'(x) = 0$, или, что все равно, придавая къ $F(x)$ алгебрическое выраженіе, принимающее на себя конечное число постоянныхъ величинъ, изъ коихъ каждая, имѣетъ мѣсто между извѣстными предѣлами, приписанными перемѣнной x. Для краткости, мы будемъ впредь означать буквою C выраженіе такаго рода, и назовемъ оное *произвольнымъ постояннымъ количествомъ*, что впрочемъ не будетъ значить, что оно сохраняетъ всегда одну и ту же величину, какова бы ни была измѣняемая x. На семъ основаніи, имѣемъ

(3) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Когда вмѣсто функціи $F(x)$ поставимъ интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$, который есть частная величина неизвѣстной функціи y: то формула (3) обратится въ слѣдующую:

$$(4) \qquad \int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C.$$

Распространивъ опредѣленіе данное интегралу (1) и на тотъ случай, когда функція $f(x)$ предполагается мнимою, удостовѣримся, что и въ семъ предположеніи, уравненія (3) и (4) будутъ также имѣть мѣсто. Только, тогда произвольное постоянное количество C обратится въ мнимое количество въ одно время съ $f(x)$, то есть, оно приметъ видъ $C_1 + C_2\sqrt{-1}$, гдѣ C_1 и C_2 будутъ означать два произвольныя постоянныя, но вещественныя количества.

Прежде нежели поступимъ далѣе, замѣтимъ что составивъ сумму или разность, или даже какую нибудь линейную функцію двухъ или нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ количествъ, получимъ въ выводѣ новое произвольное постоянное же количество.

Чрезъ сличеніе уравненія (4) съ формулами (13) (22[го] урока) и (2), (3), (4), (5) (23[го] урока), выводимъ различныя замѣчательныя свойства неопредѣленныхъ интеграловъ. И дѣйствительно, поставляя x вмѣсто X въ обѣ части каждой изъ сихъ формулъ, и придавъ къ интеграламъ, заключающимся въ сихъ частяхъ, произвольныя постоянныя количества, найдемъ:

$$(5) \qquad \int au\,dx = a\int u\,dx,$$

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int (u + v + w \ldots)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx \ldots, \\ &\int (u - v)\,dx = \int u\,dx - \int v\,dx, \\ &\int (au + bv + cw \ldots)\,dx = a\int u\,dx + b\int v\,dx + c\int w\,dx + \ldots, \\ &\int (u + v\sqrt{-1})\,dx = \int u\,dx + \sqrt{-1}\int v\,dx, \end{aligned}\right.$$

гдѣ a, b, c ... означаютъ данныя постоянныя количества, а u, v, w ... какія нибудь функціи перемѣнной x.

Сіи послѣднія уравненія имѣютъ мѣсто даже и въ томъ случаѣ, когда a, b, c ... u, v, w будутъ изображать величины мнимыя.

Интегрировать дифференціальную функцію $f(x)\,dx$, или иначе, *интегрировать* уравненіе (2), значить найти величину неопредѣленнаго интеграла $\int f(x)\,dx$. Самое же дѣйствіе называется *неопредѣленнымъ интегрированіемъ*. *Опредѣленное же интегрированіе* состоитъ въ изысканіи величины опредѣленнаго интеграла $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$. Теперь мы покажемъ четыре главные способа, помощію коихъ можно производить, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, неопредѣленное интегрированіе.

Непосредственное интегрированіе. Когда въ формулѣ $f(x)dx$ узнаёмъ точный дифференціалъ опредѣленной функціи $F(x)$, то величина неопредѣленнаго интеграла $\int f(x)\,dx$ непосредственно выводится изъ уравненія (3). Число случаевъ въ коихъ сей родъ интегрированія удается, увеличивается, наблюдая что постоянные множители при функціи $f(x)$, могутъ быть поставлены по произволу подъ знакомъ $\int$ или внѣ онаго (*смотри* уравненіе (5)).

Примѣры. $\int a dx = ax + C$, $\int (a+1)x^a dx = x^{a+1} + C$, $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$,

$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$, $\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}} + c$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$,

$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(x^2) + c$, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctang}\,x + c$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = c + \frac{1}{2}\pi - \arccos x$,

$\int e^x dx = e^x + c$, $\int A^x (lA)\,dx = A^x + c$, $\int A^x dx = \frac{A^x}{l(A)} + c$,

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c,\quad \int \sin x\,dx = -\cos x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\,x + c,\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c.$$

Интегрированіе чрезъ подстановленіе. Положимъ, что вмѣсто перемѣнной x ввели другую измѣняемую z, сопряженную съ первою такимъ уравненіемъ, которое даетъ $z = \varphi(x)$ и $x = \chi(z)$. Формула (2) замѣнится слѣдующею:

(7) $$dy = f[\chi(z)] \cdot \chi'(z)\,dz.$$

Сдѣлавъ для краткости $f[\chi(z)]\cdot\chi'(z)=\mathrm{f}(z)$, общая величина неизвѣстной y, выведенная изъ уравненія (7), будетъ представлена чрезъ неопредѣленной интегралъ $\int\mathrm{f}(z)\,dz$. Сверхъ того, сія общая величина должна согласоваться съ интеграломъ (1). Но какъ, въ силу отношенія, существующаго между x и z, имѣемъ тожественно

(8) $$f(x)\,dx=\mathrm{f}(z)\,dz,$$

то отсюда заключаемъ

(9) $$\int f(x)\,dx=\int\mathrm{f}(z)\,dz.$$

Положимъ теперь, что величина интеграла $\int\mathrm{f}(z)\,dz$, дана уравненіемъ вида

(10) $$\int\mathrm{f}(z)\,dz=F(z)+C;$$

изъ сего уравненія выведемъ,

(11) $$\int f(x)\,dx=F[\varphi(x)]+C.$$

Примѣры. Принимая формулу (10) и полагая послѣдовательно $x\pm a=z$, $ax=z$, $\frac{x}{a}=z$, $x^2+a^2=z$, $l(x)=z$, $e^x=z$, $\sin x=z$, $\cos x=z$, по формулѣ (11), сопряженной съ уравненіемъ (5), выводимъ

$$\int\mathrm{f}(x\pm a)\,dx=F(x\pm a)+c,\quad \int\mathrm{f}(ax)\,dx=\frac{1}{a}F(ax)+c,$$
$$\int\mathrm{f}\left(\frac{x}{a}\right)dx=aF\left(\frac{x}{a}\right)+c,$$
$$\int x\,\mathrm{f}(x^2+a^2)dx=\tfrac{1}{2}F(x^2+a^2)+c,\quad \int x^{a-1}\mathrm{f}(x^a)dx=\frac{1}{a}F(x^a)+c,$$
$$\int\mathrm{f}(lx)\frac{dx}{x}=F(lx)+c,$$
$$\int e^x\mathrm{f}(e^x)\,dx=F(e^x)+c,\quad \int\cos x\,\mathrm{f}(\sin x)\,dx=F(\sin x)+c,$$
$$\int\sin x\,\mathrm{f}(\cos x)\,dx=-F(\cos x)+c.$$

Сличеніе сихъ послѣднихъ формулъ съ формулами, происходящими отъ непосредственнаго интегрированія, приводитъ къ слѣдующимъ:

$$\int\frac{dx}{x-a}=\tfrac{1}{2}\,l\,(x-a)^2+c,\ \int\frac{dx}{(x-a)^m}=-\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+c,$$

$$\int\frac{dx}{1+a^2x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}(ax)+c,$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{a}\right)+c,\ \int\frac{x\,dx}{x^2+a^2}=\tfrac{1}{2}\,l\,(x^2+a^2)+c,$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}+c,$$

$$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c,\ \int e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}+c,\ \int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+c,$$

$$\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+c,$$

$$\int\frac{l(x)}{x}dx=\tfrac{1}{2}[l(x)]^2+c,\ \int\frac{dx}{x\,l(x)}=l\,l\,(x)+c,\ \int\frac{dx}{x(lx)^m}=-\frac{1}{(m-1)(lx)^{m-1}}+c,$$

$$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\operatorname{arc\,tang}(e^x)+c,\ \int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}+c=\sec x+c,\ \int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}+c.$$

Интегрированіе чрезъ разложеніе. Сей родъ интегрированія производится помощію формулъ (6), когда функція подъ знакомъ $\int$ можетъ быть разложена на нѣсколько такихъ частей, что каждая изъ нихъ, будучи умножена на dx, даетъ произведеніе удобно интегрируемое. Сей способъ въ особенности употребляется въ томъ случаѣ, когда функція подъ знакомъ $\int$ будетъ или цѣлая функція, или раціональная дробь.

Примѣры. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tang}x-\operatorname{cot}x+C,$

$$\int(a+bx+cx^2+\ldots)dx=a\int dx+b\int x\,dx+c\int x^2dx+\ldots=ax+b\frac{x^2}{2}+c\frac{x^3}{3}+\ldots+C.$$

Интегрированіе по частямъ. Пусть u и v будутъ двѣ различныя функціи перемѣнной x, а u', v' соотвѣтствующія имъ производныя функціи; uv будетъ частная величина неизвѣстной y, удовлетворяющая дифференціальному уравненію $dy=udv+vdu=uv'dx+vu'dx$, изъ котораго получаемъ

$$y=uv+C=\int uv'dx+\int vu'dx=\int udv+\int vdu,$$

и слѣдовательно $\int udv=uv-(\int vdu-C)$, или, еще проще

$$(12) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du;$$

можно допустить что въ сей послѣдней формулѣ произвольное постоянное количество — C заключено въ интегралѣ $\int v du$.

Примѣры. $\int l(x)dx = xl(x) - \int x\frac{dx}{x} = x[l(x)-1]+C$, $\int xe^x dx = e^x(x-1)+C$, $\int x\cos dx = x\sin x + \cos x + C$, $\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C$, и проч...

Примѣчаніе. Необходимо замѣтить что произвольныя постоянныя количества, скрытно заключающіяся въ неопредѣленныхъ интегралахъ обѣихъ частей уравненія (12), могутъ имѣть весьма различныя численныя величины. Посему не трудно объяснить, по видимому, несообразную формулу

$$\int\frac{dx}{x\,l(x)} = 1 + \int\frac{dx}{x\,l(x)},$$

которую получаемъ, полагая въ уравненіи (12) $u = \frac{1}{l(x)}$ и $v = l(x)$.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ОСЬМОЙ.

О неопредѣленныхъ интегралахъ заключающихъ въ себѣ алгебрическія функціи.

Алгебрическими функціями называются такія функціи, которыя происходятъ отъ соединенія перемѣнныхъ и постоянныхъ величинъ между собою, посредствомъ простыхъ алгебрическихъ дѣйствій, каковы суть: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, и еще, возвышеніе перемѣнныхъ количествъ въ опредѣленныя степени. Алгебрическія функціи одной перемѣнной называются *раціональными*, когда онѣ содержатъ только цѣлыя степени сей перемѣнной, слѣдовательно, когда сіи функціи или цѣлыя, или представляются въ видѣ раціональныхъ дробей. Въ противномъ случаѣ, функціи именуются *ирраціональными*.

Означимъ теперь чрезъ $f(x)$ алгебрическую функцію перемѣнной x, и положимъ что требуется найти величину неопредѣленнаго интеграла $\int f(x)\,dx$. Если функція $f(x)$ раціональная, то можно будетъ разложить произведеніе $f(x)\,dx$ на нѣсколько членовъ, принимающихъ одинъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$(1)\qquad A x^m dx,\quad \frac{A\,dx}{x-a},\quad \frac{A\,dx}{(x-a)^m},\quad \frac{(A\mp B\sqrt{-1})\,dx}{x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1}},\quad \frac{(A\mp B\sqrt{-1})\,dx}{(x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1})^m},$$

гдѣ a, α, β, A, B означаютъ постоянныя вещественныя количества, а m цѣлое число; потомъ опредѣлимъ интегралы сихъ различныхъ членовъ, посредствомъ формулъ

$$\int Ax^m dx = A\frac{x^{m+1}}{m+1}+C,\ \int\frac{A\,dx}{x-a}=\tfrac{1}{2}Al(x-a)^2+C,\ \int\frac{A\,dx}{(x-a)^m}=-\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+C,$$

$$\int\frac{(A\mp B\sqrt{-1})\,dx}{x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1}}=(A\mp B\sqrt{-1})\int\frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+(B\pm A\sqrt{-1})\int\frac{\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(A\mp B\sqrt{-1})l[(x-\alpha)^2+\beta^2]+(B\pm A\sqrt{-1})\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}+C,$$

$$\int\frac{(A\mp B\sqrt{-1})\,dx}{(x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1})^m}=-\frac{A\mp B\sqrt{-1}}{(m-1)(x-\alpha\mp\beta\sqrt{-1})^{m-1}}+C,$$

изъ коихъ первыя четыре выводятся изъ правилъ доказанныхъ въ предъидущемъ урокѣ, а послѣднее, выведенное по аналогіи, соображаясь съ третьимъ уравненіемъ, можетъ быть впрочемъ легко повѣрено *à posteriori*.

Примѣры. $\int\left(\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right)dx=Al\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]$

$$+\,2B\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\int\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\tfrac{1}{4}\,l\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+C,\ \int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\tfrac{1}{2}\,l(x^2+1)+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\int\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx=\tfrac{1}{6}\,l\left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,\ \text{и пр.}$$

Когда функція $f(x)$ будетъ хотя и алгебрическою, но ирраціональною: то въ такомъ случаѣ уже нѣтъ общихъ правилъ, посредствомъ коихъ возможнобъ было опредѣлить точнымъ образомъ величину интеграла $\int f(x)\,dx$.

Правда, что опредѣленіе интеграла $\int f(x)dx$ было бы возможно, еслибъ, вводя вмѣсто перемѣнной x новую перемѣнную z, выраженіе $f(x)\,dx$ чрезъ то обратилось въ другое $\mathrm{f}(z)\,dz$, въ которомъ функція $\mathrm{f}(z)$ была бы раціональною. Но для подобнаго преобразованія не имѣется вѣрнаго способа, изключая только нѣкоторые случаи, коихъ число весьма ограничено. Займемся изслѣдованіемъ сихъ самыхъ случаевъ.

Изобразимъ сперва чрезъ $\mathrm{f}(x, z)$ раціональную функцію перемѣнныхъ x и z, гдѣ z есть ирраціональная функція перемѣнной x, опредѣляемая алгебрическимъ уравненіемъ какой либо степени въ отношеніи къ z, но первой степени въ разсужденіи x. Чтобъ дифференціальная функція $f(x, z)\,dx$ обратилась въ раціональную, и могла быть интегрирована: то для сего, очевидно, надлежитъ подставить выраженіе перемѣнной x въ z. Разсмотримъ въ частности тѣ случаи, когда величина перемѣнной z опредѣляется однимъ изъ слѣдующихъ двучленныхъ уравненій:

(2) $z^n - (ax + b) = 0, \quad (a_0 x + b_0)\,z^n - (a_1 x + b_1) = 0,$

или еще уравненіемъ второй степени

(3) $(a_0 x + b_0)\,z^2 - 2\,(a_1 x + b_1)\,z - (a_2 x + b_2) = 0;$

здѣсь a, b, a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2 изображаютъ постоянныя вещественныя количества, а n какое нибудь цѣлое число. Поелику же удовлетворяемъ уравненіямъ (2), полагая $z = (ax + b)^{\frac{1}{n}}$, или $z = \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_0 x + b_0}\right)^{\frac{1}{n}}$, а уравненію (3), полагая

$$z = \frac{a_1 x + b_1 + \sqrt{(a_1 x + b_1)^2 + (a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)}}{a_0 x + b_0};$$

то изъ сего слѣдуетъ, что дифференціальная функція

(4) $f\left[x, (ab + b)^{\frac{1}{n}}\right] dx$ или $f\left[x, \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_0 x + b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right] dx,$

обратится въ раціональную, и допуститъ интегрированіе, когда замѣнимъ перемѣнною z радикалъ $n^{\text{ой}}$ степени входящій въ оную функцію. Равнымъ образомъ и формулы

(5) $$\begin{cases} f\left[x, \dfrac{a_1 x + b_1 + \sqrt{(a_1 x + b_1)^2 + (a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)}}{a_0 x + b_0}\right] dx, \\ f\left[x, \sqrt{(a_1 x + b_1)^2 + (a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)}\right] dx, \end{cases}$$

обратятся въ раціональныя, когда подставимъ въ оныя вмѣсто x, выраженіе сей перемѣнной въ z, опредѣляемое уравненіемъ (3), или, что все равно, слѣдующимъ:

(6) $\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}=(a_0x+b_0)z-(a_1x+b_1)$.

Теперь положимъ что требуется обратить выраженіе

(7) $$f[x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}]\,dx,$$

въ другое, удобное къ интегрированію; здѣсь A, B, C изображаютъ постоянныя вещественныя количества. Очевидно, что надлежитъ для сего употребить уравненіе (6), приводя сперва выраженіе Ax^2+Bx+C къ виду $(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)$, что можно произвести многоразличными образами; дѣйствительно, для сего стоитъ только взять такую биномію a_1x+b_1, чтобы разность $Ax^2+Bx+C-(a_1x+b_1)^2$ могла разложиться на вещественные множители первой степени; сіе условіе будетъ выполнено, если положимъ

(8) $$Ab_1^2+Ca_1^2-Ba_1b_1+\tfrac{1}{4}B^2-AC>0.$$

Легко видѣть что самыя простыя величины для a_1 и b_1 удовлетворяющія сему неравенству, будутъ: 1°. когда $\frac{1}{4}B^2-AC>0$, то $a_1=0$, $b_1=0$; 2°. когда $A>0$, то $a_1=A^{\frac{1}{2}}$, $b_1=0$; 3°. когда $C>0$, то $b_1=C^{\frac{1}{2}}$, $a_1=0$. Сверхъ того, поелику имѣемъ

$Ax^2+Bx+C-(A^{\frac{1}{2}}x)^2=1\,.(Bx+C)$ и $Ax^2+Bx+C-(C^{\frac{1}{2}})^2=x(Ax+B)$,

то можно будетъ взять во второмъ случаѣ $a_0x+b_0=1$, а въ третьемъ $a_0x+b_0=x$. Изъ сего усматриваемъ, что если Ax^2+Bx+C разлагается на два вещественные множителя a_0x+b_0, a_2x+b_2: то функція (7) обратится въ раціональную, полагая

(9) $\sqrt{(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}=(a_0x+b_0)z$ или $\frac{a_2x+b_2}{a_0x+b_0}=z^2$

Въ противномъ случаѣ, радикалъ $\sqrt{(Ax^2+Bx+C)}$ не можетъ быть вещественнымъ количествомъ, развѣ что оба коеффиціента A и C будутъ въ одно время положительные. Во всѣхъ случаяхъ, выраженіе (7) обратимъ въ раціональную функцію, полагая

$$(10)\left\{\begin{array}{l}\text{когда } A > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt{(Ax^2+Bx+C)} = z - A^{\frac{1}{2}}x,\\ \text{а когда } C > 0,\ \sqrt{(Ax^2+Bx+C)} = xz - C^{\frac{1}{2}}\\ \text{или } \sqrt{(A+B\frac{1}{x}+C\frac{1}{x^2})} = z - C^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}.\end{array}\right.$$

Легко повѣрить *à posteriori* сіи различныя слѣдствія формулы (16).

Примѣры. Первое изъ уравненій (10) даетъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \int\frac{dz}{A^{\frac{1}{2}}z+\frac{1}{2}B} = \frac{l(Ax+\frac{1}{2}B+A^{\frac{1}{2}}\sqrt{Ax^2+Bx+C})}{A^{\frac{1}{2}}}+\mathrm{C},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = l(x+\sqrt{x^2+1})+C,\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l(x+\sqrt{x^2-1})+C, \text{ и проч....}$$

Необходимо замѣтить, что если означимъ чрезъ $f(u, v, w\ldots)$ цѣлую функцію перемѣнныхъ $u, v, w\ldots$ а чрезъ $p, q, r\ldots$ дѣлителей цѣлаго числа n: то дифференціальныя выраженія

$$(11)\qquad f[x, (ax+b)^{\frac{1}{p}}, (ax+b)^{\frac{1}{q}}, (ax+b)^{\frac{1}{r}}\ldots]\,dx,$$

$$f\left[x, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{q}}\ldots\right]dx$$

будутъ одного вида съ выраженіями (4), и могутъ быть интегрированы точно такимъ же образомъ. И такъ, полагая $x = z^6$, найдется:

$$\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx = 6\int\frac{z^2\,dz}{1+z} = 6\,[\tfrac{1}{2}z^2 - z + \tfrac{1}{2}l\,(1+z)^2] + C,$$

Прибавимъ еще, что дифференціальныя выраженія

$$(12)\ f[x^\mu, (ax^\mu+b)^{\frac{1}{n}}]\,.\,x^{\mu-1}\,dx,\quad f\left[x^\mu, \left(\frac{a_1x^\mu+b_1}{a_0x^\mu+b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right].\,x^{\mu-1}\,dx,$$

въ коихъ μ означаетъ какое нибудь постоянное количество, непосредственно приведутся къ виду выраженій (4), а выраженіе

$$(13) \qquad f\left[x, (a_0 x + b_0)^{\frac{1}{2}}, (a_1 x + b_1)^{\frac{1}{2}}\right] . dx$$

къ виду функціи (7), полагая въ выраженіяхъ (12) $x^{\mu} = y$, а въ выраженіи (13) $a_0 x + b_0 = y^2$.

Примѣры. Интегралъ функціи $\frac{x^{2m+1}}{\sqrt{(x^2-1)}}$ найдется, полагая $x^2 = y$, $y - 1 = z^2$, или просто $x^2 - 1 = z^2$; функціи же $\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}$, полагая $x - 1 = y^2$, потомъ $(y^2 + 2)^{\frac{1}{2}} = z - y$, или просто $(x - 1)^{\frac{1}{2}} + (x + 1)^{\frac{1}{2}} = z$.

Оканчивая сей урокъ, замѣтимъ, что во всѣхъ случаяхъ, когда только найдемъ величину неопредѣленнаго интеграла заключающаго алгебрическую функцію, сія величина будетъ составлена изъ нѣсколькихъ членовъ, изъ коихъ каждый будетъ имѣть одинъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$(14) \qquad f(x), \quad A . l\,[f(x)], \quad A . \operatorname{arc\,tang} f(x),$$

гдѣ $f(x)$ изображаетъ алгебрическую функцію перемѣнной x, а A постоянное количество. Выраженія $\operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\operatorname{arc\,cos} x$, и другія подобныя, очевидно, всегда могутъ быть приведены къ виду $A . \operatorname{arc\,tang} f(x)$.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ.

Объ интегрированіи и приведеніи въ простѣйшій видъ двучленныхъ дифференціаловъ; о нѣкоторыхъ другихъ дифференціальныхъ выраженіяхъ такого же рода.

Означимъ чрезъ a, b, a_1, b_1, λ, μ, ν постоянныя вещественныя количества, а чрезъ y перемѣнную величину, и положимъ $y^\lambda = x$. Выраженіе $(ay^\lambda + b)^\mu dy$, въ коемъ коэффиціентъ у dx будетъ нѣкоторая степень биноміи $ay^\lambda + b$, называется *двучленнымъ дифференціаломъ*; неопредѣленной интегралъ

$$(1) \qquad \int (ay^\lambda + b)^\mu dy = \frac{1}{\lambda}\int (ax+b)^\mu x^{\frac{1}{\lambda}-1} dx$$

будетъ равенъ произведенію $\frac{1}{\lambda}$ на другой интегралъ, который можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ, болѣе общемъ видѣ:

$$(2) \qquad \int (ax+b)^\mu (a_1 x + b_1)^\nu dx.$$

Симъ то послѣднимъ интеграломъ мы теперь займемся.

Интегралъ (2) легко опредѣлится, когда численныя величины показателей μ, ν и ихъ сумма $\mu+\nu$ будутъ всѣ при раціональныя числа, и сверхъ того одно изъ нихъ цѣлое. Дѣйствительно, означимъ чрезъ l, m, n какія нибудь цѣлыя числа. Для интегрированія дифференціальныхъ выраженій

$$(ax+b)^{\pm l}(a_1x+b_1)^{\pm\frac{m}{n}}dx, \quad (ax+b)^{\pm\frac{m}{n}}(a_1x+b_1)^{\pm l}dx,$$
$$(ax+b)^{\pm\frac{m}{n}}(a_1x+b_1)^{\pm l\mp\frac{m}{n}}dx,$$

стоитъ только положить послѣдовательно (*смотри* 28-й урокъ)

$$a_1 x + b_1 = z^n,\quad ax + b = z^n,\quad \frac{ax+b}{a_1x+b_1} = z^n.$$

Поелику формула $(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx$ не всегда можетъ быть интегрирована точнымъ образомъ: то не худо показать какимъ средствомъ опредѣленіе интеграла (2) приводится къ опредѣленію другихъ интеграловъ такого же рода, но въ коихъ показатели биномій $ax+b$, a_1x+b_1 будутъ другіе. Таковое преобразованіе можно учинить самымъ простымъ способомъ, посредствомъ уравненія (12) (27го урока), которому дадимъ такой видъ:

$$(3)\qquad \int uv\,.\,\tfrac{1}{2}\,dl\,(v^2) = uv - \int uv\,.\,\tfrac{1}{2}\,dl\,(u^2);$$

потомъ, будемъ полагать послѣдовательно что функціи u и v пропорціональны нѣкоторымъ степенямъ двухъ изъ слѣдующихъ трехъ выраженій:

$$(4)\qquad ax+b,\quad a_1x+b_1,\quad \frac{ax+b}{a_1x+b_1}.$$

Поелику сіи три количества, взятыя по два, даютъ шесть различныхъ переложеній: то очевидно что формула (3) дастъ также шесть различныхъ уравненій. Изчисленіе будетъ проще, принимая въ выкладкахъ количества u и v за положительныя; посему формулу (3) можно будетъ замѣнить слѣдующею:

$$(5)\qquad \int uv\,.\,dl\,(v) = uv - \int uv\,.\,dl\,(u);$$

также будемъ имѣть уравненія

$$dl(ax+b) = \frac{a\,dx}{ax+b},\quad dl(a_1x+b_1) = \frac{a_1\,dx}{a_1x+b_1},\quad dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \frac{(ab_1 - a_1b)\,dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)},$$

изъ коихъ выведемъ величину количества dx, и подставимъ оную въ интегралъ (2). Для краткости, означимъ чрезъ A сей самый интегралъ. Найдется:

1-е. Полагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $(ax+b)^{\mu}$, а v количеству $(a_1x+b_1)^{\nu+1}$,

$$A=\int\frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{a_1}dl(a_1x+b_1)=\int\frac{(ax+b)^{\mu}}{(\nu+1)a_1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}dl(a_1x+b_1)^{\nu+1}$$
$$=\frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)a_1}-\int\frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)a_1}dl(ax+b)^{\mu},$$

(6) $$\int(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}dx=\frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)a_1}-\frac{\mu a}{(\nu+1)a_1}\int(ax+b)^{\mu-1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}dx.$$

2-е. Полагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $(a_1x+b_1)^{\nu}$, а v количеству $(ax+b)^{\mu+1}$,

(7) $$\int(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}dx=\frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{(\mu+1)a}-\frac{\nu a_1}{(\mu+1)a}\int(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu-1}dx$$

3-е. Полагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu}$, а v количеству $(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}$,

$$A=\int\frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{a_1}dl(a_1x+b_1)=\int\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu}\cdot\frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1}dl(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}$$
$$=\frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1}-\int\frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1}dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu},$$

(8) $$\int(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}dx=\frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1}-\frac{\mu(ab_1-a_1b)}{(\mu+\nu+1)a_1}\int(ax+b)^{\mu-1}(a_1x+b_1)^{\nu}dx.$$

4-е. Полагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\left(\frac{a_1x+b_1}{ax+b}\right)^{\nu}$, а v количеешву $(ax+b)^{\mu+\nu+1}$,

(9) $$\int(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}dx=\frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{(\mu+\nu+1)a}-\frac{\nu(a_1b-ab_1)}{(\mu+\nu+1)a}\int(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu-1}dx.$$

5-е. Полагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2}$, а v количеству $\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}$,

$$A=\int\frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{ab_1-a_1b}dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)=\int\frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}\cdot\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}$$
$$=\frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}-\int\frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}dl(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2},$$

(10) $$\int(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}dx=$$
$$\frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}-\frac{(\mu+\nu+2)a_1}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}\int(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}dx.$$

6-е. Полагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $(ax+b)^{\mu+\nu+2}$, а v количеству $\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{-(\nu+1)}$,

$$(11)\qquad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx =$$
$$\frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)(a_1b-ab_1)} - \frac{(\mu+\nu+2)a}{(\nu+1)(a_1b-ab_1)}\int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}\,dx.$$

Помощію формулъ (6), (7), (8), (9), (10), (11), можно будетъ всегда выразить интегралъ (2) посредствомъ другаго интеграла одинаковаго съ нимъ вида, но въ которомъ каждая изъ двухъ биномій $ax+b$, a_1x+b_1 будетъ имѣть показателя, заключающагося между предѣлами 0 и -1. Дѣйствительно, для сего, стоитъ только употребить одинъ или нѣсколько разъ сряду формулы (8) и (9), или только одну изъ нихъ, когда показатели μ и ν будутъ положительные, или, если одинъ изъ нихъ положительный, а другой заключается между предѣлами 0 и -1. Напротивъ того, должно будетъ прибѣгнуть къ формуламъ (10) и (11), или только къ одной изъ нихъ, когда показатели μ и ν будутъ оба отрицательные. Наконецъ, если одинъ изъ двухъ показателей будетъ положительный, а другой менѣе -1, тогда, посредствомъ формулы (6) или (7) будемъ въ одно время уменьшать численныя величины обоихъ показателей до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не обратится въ количество заключающееся между предѣлами 0 и -1.

Когда показатели μ и ν будутъ цѣлые, то посредствомъ вышеозначенныхъ приведеній, обратимъ ихъ всегда или въ 0 или въ -1; послѣ сихъ приведеній, очевидно что интегралъ (2) будетъ зависѣть отъ одного изъ четырехъ слѣдующихъ:

$$(12)\quad \begin{cases} \int dx = x+C,\ \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{2a}\, l\,(ax+b)^2+C,\ \int \frac{dx}{a_1x+b_1} = \frac{1}{2a_1}\, l(a_1x+b_1)^2+C \\ \int \frac{dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)} = \frac{1}{ab_1-a_1b}\int dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \frac{1}{2(ab_1-a_1b)}\, l\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^2+C. \end{cases}$$

Вообще, когда функція $(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}dx$ будетъ допускать точное интегрированіе: то всегда, помощію найденныхъ нами формулъ въ семъ урокѣ, можно будетъ выразить интегралъ (2) посредствомъ другихъ простѣйшихъ интеграловъ, коихъ величины легко опредѣляются.

Для приложенія тѣхъ же самыхъ способовъ къ приведенію въ простѣйшій видъ интеграла (1), должно будетъ въ формулѣ (5) предположить u и v пропорціональными уже не степенямъ выраженій (4), но степенямъ слѣдующихъ другихъ выраженій:

$$(13)\qquad ax+b=ay^2+b,\quad x=y^2,\quad \frac{ax+b}{x}=\frac{ay^2+b}{y^2}.$$

Примѣръ. Положимъ, что требуется привести въ простѣйшій видъ интегралъ

$$\int\frac{dy}{(1+y^2)^n}=\int(1+y^2)^{-n}\,dy,$$

въ которомъ n означаетъ цѣлое число большее единицы. Должно положить u и v пропорціональными степенямъ количествъ y^2 и $\frac{1+y^2}{y^2}$; и поелику имѣемъ

$$dl\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)=2\left(\frac{y}{1+y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=-\frac{2dy}{y(1+y^2)},$$

то изъ формулы (5) выведемъ:

$$(14)\qquad \int\frac{dy}{(1+y^2)^n}=\int\frac{-y(1+y^2)^{-n+1}}{2}\,dl\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)$$

$$=\int\frac{y^{-2n+3}}{2(n-1)}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)^{-n+1}dl\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)^{-n+1}$$

$$=\frac{y(1+y^2)^{-n+1}}{2(n-1)}-\int\frac{y(1+y^2)^{n-1}}{2(n-1)}\,dl\,(y^{-2n+3})$$

$$=\frac{y}{2(n-1)(1+y^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}.$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЫЙ.

О неопредѣленныхъ интегралахъ заключающихъ въ себѣ неопредѣленно-степенныя, логариѳмическія, тригонометрическія и круговыя функціи.

Неопредѣленно-степенными называются такія функціи, въ которыя входятъ количества имѣющія перемѣнныхъ показателей; *логариѳмическими* такія, которыя заключаютъ въ себѣ логариѳмы; *тригонометрическія* функціи составлены изъ тригонометрическихъ линій, а *круговыя* изъ круговыхъ дугъ. Весьма бы полезно было имѣть средства для интегрированія дифференціальныхъ формулъ, содержащихъ подобныя функціи: но не имѣется къ тому вѣрныхъ способовъ; только, въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, весьма ограниченныхъ, точное интегрированіе удается, что мы теперь и намѣрены показать.

Если означимъ чрезъ f такую функцію, что неопредѣленный интегралъ $\int f(z)\,dz$ имѣетъ извѣстную величину: то въ семъ предположеніи, выведемъ величины интеграловъ

$$(1)\quad \int f(lx)\cdot\frac{dx}{x},\ \int e^x f(e^x)\,dx,\ \int\cos x\,.\,f(\sin x)\,dx,\ \int\sin x\,.\,f(\cos x)\,dx,$$

полагая послѣдовательно, какъ въ 27мъ урокѣ, $l(x)=z$, $e^x=z$, $\sin x=z$, $\cos x=z$. Таким же образомъ опредѣлятся и слѣдующіе три интеграла:

$$(2)\quad \int f(\operatorname{arc}\operatorname{tang}x)\frac{dx}{1+x^2},\ \int f(\operatorname{arc}\sin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int f(\operatorname{arc}\cos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

полагая въ первомъ $\operatorname{arc\,tang} x = z$, а въ двухъ послѣднихъ $\arcsin x = z$ или $\arccos x = z$.

Еще замѣтимъ, что если $f(u)$, $f(u, v)$, $f(u, v, w\ldots)$, будутъ изображать алгебрическія функціи перемѣнныхъ $u, v, w\ldots$: то стоитъ только положить $e^x = z$, чтобъ обратить въ алгебрическую функцію, выраженіе находящееся подъ знакомъ $\int$ въ интегралѣ

$$(3) \qquad \int f(e^x)\, dx;$$

также, полагая $\cos x = z$ или $\sin x = z$, достигаемъ той же цѣли въ разсужденіи двухъ интеграловъ

$$(4) \qquad \int f(\sin x, \cos x)\, dx,$$

$$\int f(\sin x, \sin 2x, \sin 3x \ldots \cos x, \cos 2x, \cos 3x \ldots)\, dx,$$

изъ коихъ второй не будетъ общѣе перваго, ибо можно въ ономъ вмѣсто синусовъ и косинусовъ дугъ $2x$, $3x\ldots$, поставить ихъ величины выраженныя посредствомъ $\sin x$ и $\cos x$, что производится помощію извѣстныхъ уравненій:

$$\cos nx + \sqrt{-1} \sin nx = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n,$$
$$\cos nx - \sqrt{-1} \sin nx = (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n.$$

Прибавимъ, что если въ первомъ изъ интеграловъ (4) положимъ $\sin x$ равнымъ не z, но $\pm z^{\frac{1}{2}}$; то сей интегралъ приметъ весьма простой видъ

$$(5) \qquad \int f\left[\pm z^{\frac{1}{2}}, (1-z)^{\frac{1}{2}}\right] . \frac{\pm dz}{2z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Напримѣръ, изобразивъ чрезъ μ, ν два постоянныя количества, имѣемъ

$$(6) \qquad \int \sin^\mu x . \cos^\nu x . dx = \pm \tfrac{1}{2} \int z^{\frac{\mu-1}{2}} (1-z)^{\frac{\nu-1}{2}}\, dz.$$

Наконецъ замѣтимъ, что предполагая извѣстными величины интеграловъ (3) и (4), легко вывести изъ оныхъ и величины слѣдующихъ:

(7) $$\int \mathrm{f}(e^{ax})\,dx,$$

(8) $$\int \mathrm{f}(\sin bx,\ \cos bx)\,dx,$$

$$\int \mathrm{f}(\sin bx,\ \sin 2bx,\ \sin 3bx\ldots,\ \cos bx,\ \cos 2bx,\ \cos 3bx\ldots)\,dx$$

ибо, надлежитъ только раздѣлить на a, или на b, полученныя функціи, и подставить потомъ въ оныя ax или bx вмѣсто x.

Теперь пусть будутъ P и z двѣ функціи перемѣнной x; положимъ, что первая изъ нихъ алгебрическая, а вторая имѣетъ алгебрическую производную z'. Если возмемъ

$$\int P\,dx = Q,\ \int Qz'\,dx = R,\ \int Rz'\,dx = S \text{ и проч....},$$

и получимъ для Q, R, $S\ldots$ извѣстныя функціи перемѣнной x: то посредствомъ нѣсколькихъ интегрированій по частямъ, легко будешь опредѣлить величину интеграла

(9) $$\int P\,z^n\,dx,$$

гдѣ n изображаетъ цѣлое число. Дѣйствительно найдется постепенно:

$$\int P\,z^n\,dx = Q\,z^n - n\int Q\,z'.\,z^{n-1}\,dx,$$

$$\int Q\,z'\,z^{n-1}\,dx = R\,z^{n-1} - (n-1)\int R\,z'.\,z^{n-2}\,dx,$$

и проч..., и слѣдовательно

(10) $$\int Pz^n dx = Qz^n - nRz^{n-1} + n(n-1)Sz^{n-2} - \text{ и проч... } + C.$$

Когда функція z изображена однимъ членомъ, то оная необходимо будетъ имѣть одинъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ: (*смотри* 28-й урокъ)

$$Al\,[\mathrm{f}(x)],\quad A\operatorname{arc\,tang}\mathrm{f}(x),$$

гдѣ A означаетъ постоянное количество, а $\mathrm{f}(x)$ алгебрическую функцію перемѣнной x.

Примѣры. Предположивъ, что функція P равна единицѣ, а z одной изъ слѣдующихъ функцій: $l(x)$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $l(x+\sqrt{x^2+1})$, и проч., то изъ формулы (10) выведемъ:

(11) $$\int (lx)^n\,dx =$$
$$x\,(lx)^n\left\{1-\frac{n}{lx}+\frac{n(n-1)}{(lx)^2}-\text{и проч.}\ldots\pm\frac{n\,(n-1)\ldots.3.2.1}{(lx)^n}\right\}+C,$$

(12) $$\int (\arcsin x)^n\,dx =$$
$$(\arcsin x)^n\left\{x+\frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x}-\frac{n\,(n-1)\,x}{(\arcsin x)^2}-\frac{n\,(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arcsin x)^3}+\ldots\right\}+C,$$

(13) $$\int (\arccos x)^n\,dx =$$
$$(\arccos x)^n\left\{x-\frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arccos x}-\frac{n\,(n-1)\,x}{(\arccos x)^2}+\frac{n\,(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arccos x)^3}+\ldots\right\}+C,$$

(14) $$\int [l\,(x+\sqrt{x^2+1})]^n\,dx =$$
$$[l(x+\sqrt{x^2+1})]^n\left\{x-\frac{n\sqrt{x^2+1}}{l\,(x+\sqrt{x^2+1})}+\frac{n(n-1)x}{[l(x+\sqrt{x^2+1})]^2}-\frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{x^2+1}}{[l(x+\sqrt{x^2+1})]^3}+\ldots\right\}+C,$$

и проч. . . .

Предполагая $P = x^{a-1}$, а $z = l\,(x)$, найдется:

(15) $$\int x^{a-1}(lx)^n dx = \frac{x^a}{a}\,(lx)^n\left[1-\frac{n}{alx}+\frac{n\,(n-1)}{a^2\,(lx)^2}-\text{и проч.}\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{a^n(lx)^n}\right]+C.$$

Вводя z вмѣсто перемѣнной x, предъидущія формулы обратятся въ слѣдующія:

(16) $$\int z^n e^z dz = z^n e^z\left[1-\frac{n}{z}+\frac{n(n-1)}{z^2}-\text{и проч.}\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{z^n}\right]+C,$$

(17) $$\int z^n \cos z dz = z^n\left\{\sin z\left[1-\frac{n(n-1)}{z^2}+\ldots\right]+\cos z\left[\frac{n}{z}-\frac{n(n-1)(n-2)}{z^3}+\ldots\right]\right\}+C,$$

(18) $$-\int z^n \sin z dz = z^n\left\{\cos z\left[1-\frac{n(n-1)}{z^2}+\ldots\right]-\sin z\left[\frac{n}{z}-\frac{n(n-1)(n-2)}{z^3}+\ldots\right]\right\}+C,$$

(19) $$\int z^n\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)dz = z^n\left\{\frac{e^z-e^{-z}}{2}\left[1+\frac{n(n-1)}{z^2}+\ldots\right]-\frac{e^z+e^{-z}}{2}\left[\frac{n}{z}+\frac{n(n-1)(n-2)}{z^3}+\ldots\right]\right\}+C,$$

(20) $$\int z^n e^{az} dz = \frac{z^n e^{az}}{a}\left\{1-\frac{n}{az}+\frac{n(n-1)}{a^2z^2}-\text{и проч.}\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{a^n z^n}\right\}+C.$$

Можно было бы непосредственно вывести сіи послѣднія формулы, помощію нѣсколькихъ интегрированій по частямъ, чрезъ что уменьшали бы постепенно показателя n, и наконецъ совсѣмъ уничтожили бы оный. Такъ, напримѣръ, формула (20) выводится изъ уравненій

$$(21) \qquad \int z^n e^{az} dz = \frac{z^n e^{az}}{a} - \frac{n}{a} \int z^{n-1} e^{az} dz,$$

$$\int z^{n-1} e^{az} dz = \frac{z^{n-1} e^{az}}{a} - \frac{n-1}{a} \int z^{n-2} e^{az} dz, \text{ и проч.}$$

Сіе послѣднее замѣчаніе относится ко всѣмъ интеграламъ, кои опредѣляются посредствомъ интеграла (10) предполагаемаго извѣстнымъ, вводя z вмѣсто перемѣнной x.

Интегрированіе по частямъ можетъ еще служить къ опредѣленію величинъ интеграловъ

$$(22) \qquad \int z^n e^{az} \cos bz\, dz, \quad \int z^n e^{az} \sin bz\, dz,$$

гдѣ a и b означаютъ постоянныя количества, а n цѣлое число. Такъ, напримѣръ, чтобъ получить общія величины двухъ интеграловъ $\int e^{az} \cos bz\, dz$, $\int e^{az} \sin bz\, dz$, стоитъ только придать два постоянныя произвольныя количества къ величинамъ сихъ самыхъ интеграловъ, выведенныхъ изъ уравненій

$$\int e^{az} \cos bz\, dz = \frac{e^{az} \cos bz}{a} + \frac{b}{a} \int e^{az} \sin bz\, dz,$$

$$\int e^{az} \sin bz\, dz = \frac{e^{az} \sin bz}{a} - \frac{b}{a} \int e^{az} \cos bz\, dz.$$

Впрочемъ, можно опредѣлить интегралы (22) простѣйшимъ способомъ, какъ мы то сей-часъ покажемъ.

Поелику имѣемъ (*смотри* конецъ пятаго урока),

$$d(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)\, dx \sqrt{-1},$$

то изъ сего выводимъ:

$$(23) \quad d[e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)] = (a + b\sqrt{-1}) e^{az} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz) dz,$$

$$(24) \quad \int e^{az} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)\, dz = \frac{e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)}{a + b\sqrt{-1}} + C,$$

гдѣ C вообще изображаетъ мнимое постоянное количество. Теперь замѣтимъ, что формулы (21), а посему и формула (20) равнозначущая съ формулою (21), будутъ имѣть мѣсто и въ такомъ случаѣ, когда подставимъ въ оныя вмѣсто неопредѣленно-степенной функціи e^{az}, слѣдующее произведеніе:

$$e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz),$$

а вмѣсто знаменателя a, мнимое количество $a + b\sqrt{-1}$. Посему будемъ имѣть

(25) $$\int z^n e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)\,dz =$$

$$\frac{z^n e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)}{a + b\sqrt{-1}} \left\{1 - \frac{n}{(a + b\sqrt{-1})z} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(a + b\sqrt{-1})^n z^n}\right\} + C.$$

Ежели вторую часть сего послѣдняго уравненія приведемъ къ виду $u + v\sqrt{-1}$, гдѣ u и v означаютъ вещественныя количества: то сіи количества будутъ изображать величины интеграловъ (22). Двѣ формулы, опредѣляющія сіи величины, будутъ заключать въ себѣ, какъ частные случаи, уравненія (16), (17), (18) и (20). Сверхъ того, оныя даютъ и уравненіе (19); предполагая же въ оныхъ $n = 0$, получимъ:

(26) $$\int e^{az}\cos bz\,dz = \frac{a\cos bz + b\sin bz}{a^2 + b^2}e^{az} + C,$$

$$\int e^{az}\sin bz\,dz = \frac{a\sin bz - b\cos bz}{a^2 + b^2}e^{az} + C.$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ.

О разысканіи величинъ, и о приведеніи въ простѣйшій видъ неопредѣленныхъ интеграловъ, въ коихъ функція находящаяся подъ знакомъ $\int$ есть произведеніе двухъ множителей равныхъ нѣкоторымъ степенямъ синуса и косинуса перемѣнной.

Пусть μ, ν будутъ два постоянныя количества; разсмотримъ интегралъ

$$(1) \qquad \int \sin^{\mu} x \,.\, \cos^{\nu} x \, dx.$$

Если положимъ $\sin^2 x = z$, или $\sin x = \pm z^{\frac{1}{2}}$, то сей интегралъ приметъ видъ

$$(2) \qquad \pm \tfrac{1}{2} \int z^{\frac{\mu-1}{2}} (1-z)^{\frac{\nu-1}{2}} \, dz.$$

Слѣдовательно оный легко опредѣлится, (*смотри* 29ᵗʰ урокъ), когда численныя величины обоихъ показателей $\frac{\mu-1}{2}$, $\frac{\nu-1}{2}$ и суммы ихъ $\frac{\mu+\nu-2}{2}$, будутъ всѣ три раціональныя числа, и сверхъ того, одно изъ нихъ цѣлое. Если показатели μ и ν будутъ оба цѣлые: то количества $\frac{\mu-1}{2}$, $\frac{\nu-1}{2}$, $\frac{\mu+\nu-2}{2}$, удовлетворяютъ сему условію, и слѣдовательно интегралъ (1) опредѣляется безъ малѣйшаго затрудненія.

Во всѣхъ случаяхъ, можно будетъ по крайней мѣрѣ привести опредѣленіе интеграла (1) или (2) къ опредѣленію нѣсколькихъ другихъ интеграловъ одинаковаго съ ними вида, но въ коихъ показатели количествъ $\sin x$ и $\cos x$, или z и $1-z$, будутъ другіе. Для сего, надлежитъ употребить, какъ выше, формулу (5) (29^го^ урока), именно,

(3) $$\int uv\,.\,dl(v) = uv - \int uv\,.\,dl(u),$$

предполагая что функціи u и v пропорціональны нѣкоторымъ степенямъ двухъ изъ трехъ количествъ z, $1-z$, $\frac{1-z}{z}$, или, что все равно, степенямъ двухъ изъ трехъ слѣдующихъ:

(4) $$\sin x,\quad \cos x,\quad \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cot x}.$$

Положимъ, напримѣръ, что желаемъ привести въ простѣйшій видъ интегралъ (1). Для сего, подставимъ сперва въ сей интегралъ величину дифференціала dx, опредѣленнаго однимъ изъ слѣдующихъ уравненій:

(5) $$dl\sin x = \frac{\cos x\,dx}{\sin x},$$

$$dl\cos x = -\frac{\sin x\,dx}{\cos x},\quad dl\operatorname{tang} x = -dl\cot x = \frac{dx}{\sin x\cos x};$$

потомъ, изъ формулы (3) выводимъ:

1°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\sin^{\mu-1} x$, а v количеству $\cos^{\nu+1} x$,

$$\int\sin^\mu x\cos^\nu x\,dx = \int -\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu+1}x\,dl\cos x = \int\frac{-\sin^{\mu-1}x}{\nu+1}\cos^{\nu+1}x\,dl\cos^{\nu+1}x$$

$$= -\frac{\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu+1}x}{\nu+1} + \int\frac{\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu+1}x}{\nu+1}\,dl\sin^{\mu-1}x,$$

(6) $$\int\sin^\mu x\cos^\nu x\,dx = -\frac{\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu+1}x}{\nu+1} + \frac{\mu-1}{\nu+1}\int\sin^{\mu-2}x\cos^{\nu+2}x\,dx.$$

2°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\cos^{\nu-1} x$, а v количеству $\sin^{\mu+1} x$,

(7) $$\int\sin^\mu x\cos^\nu x\,dx = \frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu-1}x}{\mu+1} + \frac{\nu-1}{\mu+1}\int\sin^{\mu+2}x\cos^{\nu-2}x\,dx.$$

3°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\operatorname{tang}^{\mu-1} x$, а v количеству $\cos^{\mu+\nu} x$,

$$\int\sin^\mu x\cos^\nu x\,dx = \int -\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu+1}x\,dl\cos x = \int\frac{-\operatorname{tang}^{\mu-1}x}{\mu+\nu}\cos^{\mu+\nu}x\,dl\cos^{\mu+\nu}x$$

$$=-\frac{\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu+1}x}{\mu+\nu}+\int\frac{\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu+1}x}{\mu+\nu}\,dl\,\mathrm{tang}^{\mu-1}x,$$

$$(8)\quad \int\sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx=-\frac{\sin^{\mu-1}x\cos^{\nu+1}x}{\mu+\nu}+\frac{\mu-1}{\mu+\nu}\int\sin^{\mu-2}x\cos^{\nu}x\,dx.$$

4°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\cot^{\nu-1}x$, а v количеству $\sin^{\mu+\nu-2}x$,

$$(9)\quad \int\sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx=\frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu-1}x}{\mu+\nu}+\frac{\nu-1}{\mu+\nu}\int\sin^{\mu}x\cos^{\nu-2}x\,dx.$$

5°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\cos^{\mu+\nu}x$, а v количеству $\mathrm{tang}\,x^{\mu+1}$,

$$\int\sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx=$$

$$\int\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu+1}x\,dl\,\mathrm{tang}\,x=\int\frac{\cos^{\mu+\nu+2}x}{\mu+1}\,\mathrm{tang}^{\mu+1}x\,dl\,\mathrm{tang}^{\mu+1}x$$

$$=\frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu+1}x}{\mu+1}-\int\frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu+1}x}{\mu+1}\,dl\cos^{\mu+\nu+2}x;$$

$$(10)\quad \int\sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx=\frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu+1}x}{\mu+1}+\frac{\mu+\nu+2}{\mu+1}\int\sin^{\mu+2}x\cos^{\nu}x\,dx.$$

6°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\sin^{\mu+\nu+2}x$, а v количеству $\cot^{\nu+1}x$,

$$(11)\quad \int\sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx=-\frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu+1}x}{\nu+1}+\frac{\mu+\nu+2}{\nu+1}\int\sin^{\mu}x\cos^{\nu+2}x\,dx.$$

Помощію формулъ (6), (7), (8), (9), (10), (11) можно будетъ всегда выразить интегралъ (1) посредствомъ другаго интеграла, одинаковаго съ нимъ вида, но въ которомъ каждое изъ количествъ $\sin x$, $\cos x$, будетъ имѣть показателемъ число содержащееся между предѣлами -1, $+1$. И дѣйствительно, для подобнаго преобразованія, стоитъ только употребить одинъ или нѣсколько разъ сряду формулы (8) и (9), или только одну изъ нихъ, когда показатели μ и ν оба положительные, или если одинъ изъ нихъ положительный, а другой заключается между предѣлами 0, -1. Напротивъ того, должно употреблять формулы (10) и (11), когда показатели μ и ν оба отрицательные, или, если одинъ изъ нихъ отрицательный, а другой заключается между предѣлами о и 1. Наконецъ, если одинъ изъ показателей будетъ положительный, но больше единицы, другой же отрицательный, но меньше — 1; тогда, посредствомъ формулъ (6) и (7), будемъ въ одно время уменьшать обоихъ показателей до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не обратится въ количество, заключающееся между предѣлами — 1 и + 1.

Если положимъ $\mu + \nu = 0$, то уравненія (6) и (7) обратятся въ слѣдующія:

$$(12)\qquad \int \tan^{\mu} x\,dx = \frac{\tan^{\mu-1} x}{\mu - 1} - \int \tan^{\mu-2} x\,dx,$$

$$\int \cot^{\nu} x\,dx = -\frac{\cot^{\nu-1} x}{\nu - 1} - \int \cot^{\nu-2} x\,dx.$$

Когда показатели μ и ν будутъ цѣлые, то поступая какъ было сказано выше, обратимъ наконецъ каждый изъ нихъ въ одно изъ трехъ количествъ $+1, 0, -1$, и интегралъ (1) чрезъ то необходимо приведется къ одному изъ девяти слѣдующихъ:

$$\int dx = x + C, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int \sin x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x + C,$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\tfrac{1}{2} l \cos^2 x + C, \quad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \tfrac{1}{2} l \sin^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \tfrac{1}{2} l \tan^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\tfrac{1}{2} dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tfrac{1}{2} l \tan^2 \frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x + \tfrac{1}{2}\pi)}{\sin(x + \tfrac{1}{2}\pi)} = \tfrac{1}{2} l \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Приложивъ сіи правила къ опредѣленію интеграловъ

$$\int \sin^n x\,dx, \int \cos^n x\,dx, \int \frac{\sin^n x}{\cos^n x} dx, \int \frac{\cos^n x}{\sin^n x} dx, \int \frac{dx}{\cos^n x}, \int \frac{dx}{\sin^n x},$$

гдѣ n изображаетъ цѣлое число, найдется: 1°. предполагая n четнымъ числомъ,

$$\int \sin^n x\,dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n}\left\{\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x+\ldots+\frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\sin x\right\}+\frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x+C,$$

$$\int \cos^n x\,dx =$$

$$\frac{\sin x}{n}\left\{\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x+\ldots+\frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\cos x\right\}+\frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x+C,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1}-\frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3}+\frac{\operatorname{tang}^{n-5}x}{n-5}-\text{и проч}\ldots\pm\operatorname{tang}x\mp x+C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}dx}{n-1}+\frac{\cot^{n-3}x}{n-3}-\frac{\cot^{n-5}x}{n-5}+\text{и проч}\ldots\pm\cot x\mp x+C,$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sin x}{n-1}\left\{\sec^{n-1}x+\frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\sec x\right\}+C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x\,dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n-1}\left\{\operatorname{cosec}^{n-1}x+\frac{n-2}{n-3}\operatorname{cosec}^{n-3}x+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\operatorname{cosec}x\right\}+C;$$

2°. предполагая n нечетнымъ числомъ,

$$\int \sin^n x\,dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n}\left\{\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x+\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\sin^{n-5}x+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right\}+C,$$

$$\int \cos^n x\,dx =$$

$$\frac{\sin x}{n}\left\{\cos^{n-1}x+\frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x+\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5}x+\ldots+\frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right\}+C,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x\,dx =$$

$$\frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1}-\frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3}+\frac{\operatorname{tang}^{n-5}x}{n-5}-\text{ и проч}\ldots\pm\frac{\operatorname{tang}^2 x}{2}\pm\tfrac{1}{2}\,l\cos^2 x+C,$$

$$\int \cot^n x\,dx =$$

$$-\frac{\cot^{n-1}x}{n-1}+\frac{\cot^{n-3}x}{n-3}-\frac{\cot^{n-5}x}{n-5}+\text{ и проч}\ldots\mp\frac{\cot^2 x}{2}\mp\tfrac{1}{2}\,l\sin^2 x+C,$$

$$\int \sec^n x\,dx =$$

$$\frac{\sin x}{n-1}\left\{\sec^{n-1}x+\frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x+\ldots+\frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\sec^2 x\right\}+\frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\tfrac{1}{2}l\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x\,dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n-1}\left\{\operatorname{cosec}^{n-1}x+\frac{n-2}{n-3}\operatorname{cosec}^{n-3}x+\ldots+\frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\operatorname{cosec}^2 x\right\}+\frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\tfrac{1}{2}l\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}+C.$$

Оканчивая сей урокъ, мы покажемъ нѣсколько способовъ, могущихъ служить, подобно предъидущимъ, къ приведенію въ простѣйшій видъ и къ опредѣленію интеграла $\int \sin^{\pm m} x \cos^{\pm m} x dx$, въ которомъ m и n изображаютъ два цѣлыя числа. Во первыхъ, очевидно, что интегралъ $\int \sin^{-m} x \cos^{-n} x dx$ обратится въ другіе простѣйшіе, когда умножимъ одинъ или нѣсколько разъ функцію подъ знакомъ $\int$ на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Сверхъ того, дифференціальное выраженіе $\sin^{\pm m} x \cos^{\pm n} x dx$ можно обратить въ раціональное, 1°. когда n есть нечетное число, полагая $\sin x = z$, 2°. когда m есть нечетное число, полагая $\cos x = z$. Наконецъ замѣтимъ, что величины интеграловъ $\int \sin^m x dx$, $\int \cos^n x dx$, $\int \sin^m x \cos^n x dx$, опредѣляются весьма простымъ образомъ по разложеніи $\sin^m x$, $\cos^n x$ и $\sin^m x \cos^n x$ на линейныя функціи количествъ $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x \ldots \cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x \ldots$, что производится посредствомъ извѣстныхъ формулъ, (смотри *Analyse algébrique* Гл. VII).

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ.

Переходъ отъ неопредѣленныхъ интеграловъ къ опредѣленнымъ.

Опредѣлить интегралъ уравненія

$$dy = f(x)\,dx, \tag{1}$$

или интегрировать дифференціальное выраженіе $f(x)\,dx$, отъ $x = x_0$, значитъ, найти такую непрерывную функцію перемѣнной x, которая удовлетворяла бы двумъ условіямъ, именно, чтобъ ея дифференціалъ былъ равенъ $f(x)\,dx$, и чтобъ оная уничтожалась для $x = x_0$. Поелику сія функція опредѣляется общею формулой $\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C$: то посему оная обратится въ интегралъ $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, если самая функція $f(x)$ будетъ непрерывною относительно къ x, между двумя предѣлами сего интеграла. Положимъ теперь, что общая величина для y, выведенная изъ уравненія (1), представлена въ видѣ $\varphi(x) + \int \chi(x)\,dx$, гдѣ функціи $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ обѣ непрерывны между сими же предѣлами x_0 и x. Очевидно, что искомая функція будетъ равна $\varphi(x) - \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \chi(x)\,dx$. Основываясь на семъ замѣчаніи, легко увидимъ во что обращаются формулы доказанныя въ предъидущихъ урокахъ, когда подчинимъ обѣ части каждой изъ оныхъ, уничтожаться для данной величины перемѣнной x. Такъ, напримѣръ, легко усматриваемъ, что уравненія (9) и (12) (27^го урока), именно $\int f(x)\,dx = \int \mathrm{f}(z)\,dz$, и $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ или $\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx$, превратятся въ слѣдующія:

(2) $\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{z_0}^{z} \mathrm{f}(z)dz$, и (3) $\int_{x_0}^{x} uv'dx = uv - u_0v_0 - \int_{x_0}^{x} vu'dx$, гдѣ z_0, u_0 и v_0 означаютъ величины перемѣнныхъ z, u и v, соотвѣтствующія величинѣ $x = x_0$.

Полагая въ формулахъ (2) и (3) $x = X$, и изобразивъ, въ семъ предположеніи, чрезъ Z, U и V соотвѣтствующія величины перемѣнныхъ z, u и v, найдется:

(4) $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}(z)dz$ и (5) $\int_{x_0}^{X} uv'dx = UV - u_0v_0 - \int_{x_0}^{X} vu'dx$.

Когда желаемъ приложить способъ интегрированія чрезъ подстановленіе, или интегрированія по частямъ къ разысканію величинъ опредѣленныхъ интеграловъ, или къ приведенію ихъ въ простѣйшій видъ: тогда, вмѣсто формулъ (9) и (12) (27го урока), употребляются сіи послѣднія двѣ формулы; что касается до опредѣленныхъ интеграловъ, выводимыхъ чрезъ непосредственное интегрированіе, или чрезъ разложеніе: то оные опредѣляются формулою (18) (26го урока), или формулою (2) (23го урока). Основываясь на сихъ правилахъ и на способахъ изложенныхъ въ предъидущихъ урокахъ, можно будетъ найти величины многихъ опредѣленныхъ интеграловъ; выведемъ теперь величины замѣчательнѣйшихъ изъ оныхъ.

Означимъ чрезъ m цѣлое число, чрезъ a, β, μ, ν положительныя количества, чрезъ a, A, B, C . . . какія нибудь постоянныя величины, наконецъ, чрезъ ε количество безконечно-малое; изъ формулъ доказанныхъ въ 27мъ и 28мъ урокахъ, выводимъ:

$$\int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a},\quad \int_0^1 x^{-a-1}\,dx = \infty,\quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

$$\int_0^\infty e^{ax}\,dx = \infty,\quad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a},$$

$$\int_0^1 (A + Bx + Cx^2 \ldots)\,dx = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{3} \ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{x^m - 1}{x - 1}\,dx = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots + \frac{1}{m},\quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a},\quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}}\frac{x\,dx}{x^2+a^2}=l\left(\frac{\mu}{\nu}\right),\quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{x\,dx}{x^2+a^2}=0,\quad \int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{\pi}{\beta},\quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}}\frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=l\left(\frac{\mu}{\nu}\right),\quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=0,$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}}\left\{\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx=2Al\left(\frac{\mu}{\nu}\right)+2\pi B,$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}}\left\{\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right\}dx=2\pi B.$$

Сверхъ того, означивъ вообще чрезъ $\frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)}$ раціональную дробь, коей знаменатель не могъ бы уничтожиться ни для какой вещественной величины перемѣнной x, чрезъ x_1, x_2 и проч..., тѣ изъ мнимыхъ корней уравненія $F(x)=0$, въ коихъ коеффиціентъ при $\sqrt{-1}$ положительный, и чрезъ $A_1-B_1\sqrt{-1}$, $A_2-B_2\sqrt{-1}$, и проч. . . . величины дроби $\frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)}$ соотвѣтствующія симъ самымъ корнямъ, получится формула:

$$(6)\qquad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}}\frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)}dx=2(A_1+A_2+\ldots)\,l\left(\frac{\mu}{\nu}\right)+2\pi(B_1+B_2+\ldots).$$

Когда сумма $A_1+A_2+\ldots$ равна нулю, то вторая часть сей формулы не будетъ заключать въ себѣ произвольнаго множителя $l\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$, въ слѣдствіе чего получимъ:

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)}dx=2\pi(B_1+B_2+\ldots);$$

сумма же $A_1+A_2+\ldots$ уничтожается въ томъ случаѣ, когда степень функціи $F(x)$ превосходитъ по крайней мѣрѣ двумя единицами степень функціи $\mathrm{f}(x)$. Можно вывести сіе же заключеніе, основываясь на замѣчаніи оканчивающимъ 25-й урокъ.

Если бы степень функціи $F(x)$ превосходила только одною единицею степень функціи $f(x)$: то величина интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{F(x)}dx$ была бы неопредѣленная, а общая его величина, доставляемая уравненіемъ (6), заключала бы постоянное произвольное отношеніе $\frac{\mu}{\nu}$. Но, полагая что сіе произвольное постоянное отношеніе равно единицѣ, получимъ уравненіе (7), которое, въ семъ случаѣ, доставитъ только главную величину упомянутаго интеграла. Прибавимъ, что сія главная величина не измѣнится, если, сверхъ мнимыхъ корней x_1, x_2, и проч...., уравненіе $F(x)=0$, будетъ имѣть и вещественные корни, что происходитъ отъ того, что всѣ интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A\,dx}{x\pm a}$ имѣютъ главныя величины равныя нулю.

Примѣры. Пусть m и n будутъ два цѣлыя числа, и $m<n$. Сдѣлавъ $\frac{2m+1}{2n}=a$, найдется:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=$$

$$\frac{2\pi}{2n}[\sin a\pi+\sin 3a\pi+\ldots+\sin(2n-1)a\pi]=\frac{\pi}{n\,.\,\sin a\pi}=\frac{\pi}{n\,.\,\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}},$$

откуда, полагая $z=x^{2n}$, получимъ:

$$(8)\qquad \int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1+z}=2n\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Также, выводя изъ неопредѣленныхъ величинъ интеграловъ, главныя ихъ величины, имѣемъ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}}=$$

$$\frac{2\pi}{2n}[\sin 2a\pi+\sin 4a\pi+\ldots+\sin(2n-2)a\pi]=\frac{\pi}{n\,.\,\mathrm{tang}\,a\pi}=\frac{\pi}{n\,.\,\mathrm{tang}\frac{(2m+1)\pi}{2n}},$$

$$(9)\qquad \int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1-z}=2n\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}}=n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}}=\frac{\pi}{\mathrm{tang}\,a\pi}.$$

Равнымъ образомъ, изъ доказанныхъ формулъ въ 29мъ и 30мъ урокахъ, выведемъ:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^n} = \frac{m-1}{n-m}\int_0^\infty \frac{x^{m-2}dx}{(1+x)^n} = \frac{(m-1)\ldots 3.2.1}{(n-m)\ldots(n-3)(n-2)}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^n} =$$
$$\frac{1.2.3\ldots(m-1)\times 1.2.3\ldots(n-m-1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}} =$$
$$\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-z}\,dz = 1.2.3\ldots n,\quad \int_0^\infty z^n e^{-az}\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\cos bz\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-az}\cos bz\,dz = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\sin bz\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-az}\sin bz\,dz = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Наконецъ, изъ формулъ доказанныхъ въ 31мъ урокѣ, выводимъ: во 1хъ. предполагая n четнымъ числомъ,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^n x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^n x\,dx,$$
$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\operatorname{tang}^n x\,dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \tfrac{1}{3} \pm 1 \mp \frac{\pi}{4};$$

во 2хъ. предполагая n нечетнымъ числомъ,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^n x\,dx = \frac{2.4.6\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(n-2)n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^n x\,dx,$$
$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\operatorname{tang}^n x\,dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\,l\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Способы интегрированія показанные нами, часто доставляютъ средства къ преобразованію даннаго опредѣленнаго интеграла въ другой простѣйшій. Такъ, напримѣръ, въ слѣдствіе формулъ выведенныхъ въ 27мъ урокѣ, имѣемъ, какова бы ни была функція $f(x)$,

$$(10)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x \pm a)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x)\, dx, \\ \int_0^{\infty} \mathrm{f}(ax)\, dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \mathrm{f}(x)\, dx, \text{ и проч....} \\ \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a^{\mu}}\int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-x}\, dx, \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx, \text{ и проч....} \end{cases}$$

Когда, въ интегралѣ относительномъ къ перемѣнной x, функція подъ знакомъ $\int$ заключаетъ другое количество μ, коего величина произвольная: то сіе количество μ можно принимать за новую перемѣнную, а самый интегралъ за функцію количества μ. Между функціями сего рода, примѣчательна та, которую Г. *Лежандръ* означилъ буквою Γ, и которая, для положительныхъ величинъ количества μ, опредѣляется уравненіемъ

$$(11)\qquad \Gamma(\mu) = \int_0^1 \left[l\left(\tfrac{1}{x}\right)\right]^{\mu-1} dx = \int_0^{\infty} z^{\mu-1} e^{-z} dz.$$

Ейлеръ и Г. *Лежандръ* весьма много занимались изслѣдованіемъ свойствъ сей функціи; въ слѣдствіе выше доказаннаго, оная удовлетворяетъ уравненіямъ

$$(12)\quad \begin{cases} \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 1.2, .. \Gamma(n) = 1.2.3...(n-1), \\ \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} dz = \frac{\Gamma(n)}{a^n}, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} \cos bz\, dz = \dfrac{\Gamma(n) \cos\left(n.\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}, \\ \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} \sin bz\, dz = \dfrac{\Gamma(n) \sin\left(n.\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}, \end{cases}$$

$$(14)\quad \int_0^{\infty} z^{\mu-1} e^{-az} dz = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}},\ \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(1+x)^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)},$$

въ коихъ n означаетъ цѣлое число, m другое цѣлое же число, но меньшее n, а μ какое нибудь количество.

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ТРЕТІЙ.

Дифференцированіе и интегрированіе подъ знакомъ $\int$. Интегрированіе дифференціальныхъ выраженій заключающихъ въ себѣ нѣсколько перемѣнныхъ независимыхъ величинъ.

Изобразимъ чрезъ x и y двѣ независимыя перемѣнныя величины, чрезъ $f(x,y)$ какую нибудь функцію сихъ двухъ перемѣнныхъ, а чрезъ x_0 и X двѣ частныя величины перемѣнной x. Полагая $\Delta y = \alpha dy$, и употребляя знакоположенія принятыя въ 13мъ урокѣ, найдется:

$$\Delta_y \int_{x_0}^{X} f(x,y)dx = \int_{x_0}^{X} f(x,y+\Delta y)dx - \int_{x_0}^{X} f(x,y)dx = \int_{x_0}^{X} \Delta_y f(x,y)dx,$$

потомъ, раздѣливъ на αdy, и переходя къ предѣлу полагая $\alpha = 0$, получимъ:

$$(1) \qquad \frac{d}{dy}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{X} \frac{df(x,y)}{dy}\,dx.$$

Равнымъ образомъ имѣемъ

$$(2) \qquad \frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{df(x,y)}{dy}\,dx.$$

Изъ сихъ формулъ слѣдуетъ, что для дифференцированія интеграловъ $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx$, $\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$ относительно къ y, надлежитъ только *дифференцировать подъ знакомъ* $\int$ *функцію* $f(x,y)$. Также, выводимъ и то слѣдствіе, что уравненія

$$(3) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx = F(y), \quad \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx = F(x,y),$$

$$\int f(x,y)\,dx = F(x,y) + C,$$

ствовать вещественнымъ корнямъ. Въ слѣдствіе сего, для $F(x) = 1 + x^2$, $x_1 = \sqrt{-1}$, найдется,

$$(18) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = \pi f(\sqrt{-1});$$

а для $F(x) = 1 - x^2$, $x_1 = -1$, $x_2 = +1$,

$$(19) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [f(-1) - f(1)] \sqrt{-1}.$$

Сія послѣдняя формула даетъ главную величину интеграла входящаго въ оную.

Примѣры. Пусть μ будетъ число заключающееся между 0 и 2. Если возмемъ $f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1}$, то мнимое выраженіе $f(x + y\sqrt{-1}) = (y - x\sqrt{-1})^{\mu-1}$ будетъ имѣть одну, совершенно опредѣленную величину, для всѣхъ возможныхъ положительныхъ величинъ перемѣнной y (*смотри Analyse algébrique*, Глав. VII); изъ формулъ же (18) и (19) выведемъ:

$$(20) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2} dx = [(-\sqrt{-1})^{\mu-1} + (\sqrt{-1})^{\mu-1}] \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^2} = \pi, \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [(\sqrt{-1})^{\mu} + (-\sqrt{-1})^{\mu}], \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1-x^2} = \frac{\pi\cos(\frac{1}{2}\mu\pi)}{2\sin(\frac{1}{2}\mu\pi)} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{tang}\,(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{cases}$$

Подставляя z вмѣсто x^2 и $2a$ вмѣсто μ въ послѣднія изъ уравненій (20) и (21), найдемъ опять формулы (8) и (9) 32$^{\text{го}}$ урока, которыя такимъ образомъ будутъ доказаны, равно какъ и первое изъ уравненій (14) 33$^{\text{го}}$ урока, для всѣхъ возможныхъ величинъ количества a, заключающихся между предѣлами 0 и 1.

(6) $\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y} F(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy.$

Дѣйствительно, изъ формулы (2) выводимъ $\frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)dydx = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$, потомъ, умноживъ обѣ части на dy, и взявъ интегралы относительно къ y, отъ $y = y_0$, получимъ опять формулу (6). Слѣдовательно имѣемъ

$$(7)\qquad \begin{cases} \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx\,dy, \\ \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx\,dy. \end{cases}$$

Формулы (6) и (7) показываютъ, что для интегрированія относительно къ y, и отъ $y = y_0$, выраженій $\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx$, умноженныхъ на дифференціалъ dy, надлежитъ *интегрировать подъ знакомъ* $\int$ также отъ $y = y_0$, функцію $f(x,y)$, умноженную на сей самый дифференціалъ.

Часто интегрированіе подъ знакомъ $\int$, доставляетъ средство находить величины нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ, не смотря на то, что не имѣемъ возможности опредѣлить соотвѣтствующія величины неопредѣленныхъ интеграловъ. И такъ, хотя интегралъ $\int \frac{x^{\mu} - x^{\nu}}{l(x)} \cdot \frac{dx}{x}$ (гдѣ μ и ν изображаютъ два положительныя количества), въ функціи x и неизвѣстенъ, однако же можно найти опредѣленный интегралъ $\int_0^1 \frac{x^{\mu} - x^{\nu}}{l(x)} \cdot \frac{dx}{x}$; дѣйствительно, для положительныхъ величинъ количества μ, имѣемъ вообще

$$(8)\qquad \int_0^1 x^{\mu-1}\,dx = \frac{1}{\mu},$$

отсюда выводимъ, умноживъ обѣ части на $d\mu$, потомъ взявъ интегралъ относительно къ μ, отъ $\mu = \nu$,

$$(9)\qquad \int_0^1 \frac{x^{\mu} - x^{\nu}}{l(x)} \cdot \frac{dx}{x} = l\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Между таковыми интегралами, замѣчательны многіе другіе; опредѣлимъ величины нѣкоторыхъ изъ нихъ.

Если означимъ чрезъ a, b, c положительныя количества, и умноживъ на da формулы

$$(10)\quad \int_0^\infty e^{-ax}dx=\frac{1}{x},\ \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{a}{a^2+b^2},\ \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2},$$

станемъ ихъ потомъ интегрировать отъ $a=c$, по вышеизложенному правилу, то найдемъ:

$$(11)\quad \begin{cases}\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}dx=l\left(\frac{a}{c}\right),\ \int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}l\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\right),\\ \int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\sin bx\,dx=\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b}-\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{b}.\end{cases}$$

Полагая въ сихъ формулахъ $c=0$ и $a=\infty$, получимъ

$$(12)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x}=\infty,\ \int_0^\infty \cos bx\frac{dx}{x}=\infty,\ \int_0^\infty \sin bx\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Также, поелику для положительныхъ величинъ количества b (*смотри* 32й урокъ), имѣемъ

$$\int_0^\infty z^{b-1}e^{-z(1+x)}dz=\frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b},$$

а слѣдовательно и

$$\frac{x^{a-1}}{(1+x)^b}=\frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-zx}z^{b-1}e^{-z}dz,$$

то предполагая a, b и $b-a$ положительными, выведемъ:

$$(13)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b}=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}\int_0^\infty z^{b-a-1}e^{-z}dz=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)};$$

потомъ, сдѣлавъ $b=1$, и предполагая a вида $\frac{2m+1}{2n}$, а также наблюдая что $\Gamma(1)=1$, найдется (*смотри* формулу (8) 32го урока):

$$(14)\qquad \begin{cases}\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi},\quad [\Gamma(\frac{1}{2})]^2=\pi,\\ \Gamma(\frac{1}{2})=\pi^{\frac{1}{2}}=\int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}e^{-z}dz=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx.\end{cases}$$

Теперь пусть будутъ $\varphi(x,y)$ и $\chi(x,y)$ двѣ функціи удовлетворяющія уравненію

$$(15) \qquad \frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}.$$

Подставляя послѣдовательно обѣ части сего уравненія вмѣсто функціи $f(x,y)$ въ формулу (6), получится слѣдующая:

$$(16) \quad \int_{x_0}^{x} [\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{y} [\chi(x,y) - \chi(x_0,y)]\, dy.$$

Сія формула справедлива когда функціи $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ остаются обѣ конечными и непрерывными относительно къ перемѣннымъ x и y, между предѣлами интегрированія.

Положимъ теперь что ищемъ функцію u двухъ перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющую уравненію

$$(17) \qquad du = \varphi(x,y)\, dx + \chi(x,y)\, dy,$$

или, что все равно, двумъ слѣдующимъ:

$$(18) \qquad \frac{du}{dx} = \varphi(x,y), \qquad (19) \quad \frac{du}{dy} = \chi(x,y).$$

Очевидно, что рѣшеніе сего вопроса будетъ только тогда возможно, когда формула (15), коей каждая часть равна $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, будетъ имѣть мѣсто. Если сіе условіе выполнено: то предложенный вопросъ легко разрѣшится. Дѣйствительно, пусть x_0 и y_0 будутъ какія нибудь частныя величины перемѣнныхъ x и y, а C произвольное постоянное количество. Дабы удовлетворить уравненію (18), стоитъ только взять

$$(20) \qquad u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\, dx + v,$$

гдѣ v означаетъ произвольную функцію перемѣнной y; поелику же изъ формулы (20) выводимъ

$$\frac{du}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x,y)}{dy} dx + \frac{dv}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\chi(x,y)}{dx} dx + \frac{dv}{dy} = \chi(x,y) - \chi(x_0,y) + \frac{dv}{dy},$$

то очевидно что удовлетворимъ и уравненію (19), если положимъ

$$(21) \quad \frac{dv}{dy} - \chi(x_0,y) = 0, \; v = \int \chi(x_0,y)\, dy = \int_{y_0}^{y} \chi(x_0,y)\, dy + C$$

Слѣдовательно, общая величина для функціи u будетъ:

$$(22)\quad u=\int_{x_0}^{x}\varphi(x,y)dx+\int\chi(x_0,y)dy=\int_{x_0}^{x}\varphi(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y}\chi(x_0,y)\,dy+C.$$

Когда въ предъидущихъ урокахъ перемѣнимъ между собою измѣняемыя x и y, то получимъ другое выраженіе для функціи u, которое, въ слѣдствіе формулы (16), окажется равнозначущимъ съ выраженіемъ (22).

Интегрированіе дифференціала функціи трехъ, четырехъ... перемѣнныхъ независимыхъ количествъ, такъ же легко производится какъ и интегрированіе дифференціала функціи содержащей двѣ перемѣнныя независимыя. Такъ, напримѣръ, если при слѣдующія условія

$$(23)\quad \frac{d\chi(x,y,z)}{dz}=\frac{d\psi(x,y,z)}{dy},\quad \frac{d\psi(x,y,z)}{dx}=\frac{d\varphi(x,y,z)}{dz},\quad \frac{d\varphi(x,y,z)}{dx}=\frac{d\chi(x,y,z)}{dy}$$

будутъ выполнены: то общая величина функціи u, удовлетворяющая уравненію

$$(24)\quad du=\varphi(x,y,z)dx+\chi(x,y,z)\,dy+\psi(x,y,z)dz,$$

будетъ:

$$(25)\quad u=\int_{x_0}^{x}\varphi(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}\chi(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}\psi(x_0,y_0,z)\,dz+C,$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 изображаютъ какія нибудь частныя величины перемѣнныхъ x, y, z.

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Сравненіе обоихъ родовъ простыхъ интеграловъ, получаемыхъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ, чрезъ двойное интегрированіе.

Положимъ что функціи $\varphi(x,y)$ и $\chi(x,y)$ удовлетворяютъ уравненію (15) предъидущаго урока. Интегрируя два раза сіе уравненіе, именно, одинъ разъ относительно къ x, между предѣлами x_0 и X, а другой разъ относительно къ y, между предѣлами y_0 и Y, найдется:

$$(1)\quad \int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx=\int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(x_0,y)]\,dy.$$

Сія послѣдняя формула показываетъ весьма примѣчательное отношеніе, существующее между интегралами входящими въ оную. Но оная перестаетъ быть справедливою, когда функціи $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ дѣлаются безконечными для одной, или нѣсколькихъ системъ величинъ перемѣнныхъ x и y, заключающихся между предѣлами $x=x_0$, $x=X$, и $y=y_0$, $y=Y$. Предположимъ сперва что имѣемъ одну только систему обращающую въ безконечныя величины функціи $\varphi(x,y)$ и $\chi(x,y)$; пусть будутъ $x=a$ и $y=b$, частныя значенія перемѣнныхъ x и y, соотвѣтствующія сей системѣ. Въ семъ частномъ случаѣ, выраженія, получаемыя чрезъ двойное интегрированіе обѣихъ частей формулы (15) ($33^{го}$ урока), могутъ различествовать одно отъ другаго. Но они сдѣлаются опять равными, если въ изчисленіи замѣняли каждый интегралъ, относительный къ x, общею его величиною. Примѣчанія сего достаточно, чтобы видѣть какимъ образомъ уравненіе (1) должно быть измѣнено. Дѣйствительно, означивъ чрезъ ε безконечно-малое число, найдется, въ настоящемъ предположеніи,

$$(2)\ \begin{cases}\int_{x_0}^{a-\varepsilon}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx+\int_{a+\varepsilon}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx\\ =\int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(a+\varepsilon,y)+\chi(a-\varepsilon,y)-\chi(x_0,y)]\,dx;\end{cases}$$

откуда выводимъ, полагая что ε безпрестанно уменьшаясь, стремится къ нулю,

$$(3)\quad \int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]dx=\int_{x_0}^{X}[\chi(X,y)-\chi(x_0,y)]dy-\Delta,$$

гдѣ величина Δ опредѣляется формулой

$$(4)\qquad \Delta=\text{пр.}\int_{y_0}^{Y}[\chi(a+\varepsilon,y)-\chi(a-\varepsilon,y)]\,dy.$$

Въ общемъ случаѣ, количество Δ будетъ равно суммѣ нѣсколькихъ членовъ, подобныхъ второй части уравненія (4).

Примѣры. Полагая $\varphi(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\chi(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $x_0=-1$, $X=1$, $y_0=-1$, $Y=1$, уравненія (3) и (4) даютъ:

$$\int_{-1}^{1}\frac{-2dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{1}\frac{2\,dy}{1+y^2}-\Delta,\qquad \Delta=\text{пр.}\int_{-1}^{1}\frac{2\varepsilon\,dy}{\varepsilon^2+y^2}=2\pi.$$

Легко видѣть что функціи $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ будутъ удовлетворять уравненію (15) (33[го] урока), если $\varphi(x,y)dx+\chi(x,y)dy=f(u)\,du$, а посему

$$(5)\qquad \varphi(x,y)=f(u)\frac{du}{dx},\quad \chi(x,y)=f(u)\frac{du}{dy},$$

гдѣ u означаетъ какую нибудь функцію перемѣнныхъ x, y.

Также легко удостовѣриться въ томъ, что формулы (1) и (3) имѣютъ мѣсто при вышеприведенныхъ условіяхъ, даже въ томъ случаѣ, когда функціи $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ будутъ мнимыя. Положимъ, напримѣръ, что функція $f(x)$ есть алгебрическая, и что $u=x+y\sqrt{-1}$. Изъ уравненій (5) выводимъ $\varphi(x,y)$

$= f(x+y\sqrt{-1})$, $\chi(x;y) = \sqrt{-1}\,f(x+y\sqrt{-1})$, а изъ формулы (3)

$$(6)\qquad \begin{cases} \int_{x_0}^{X} [f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})]\,dx = \\ \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} [f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1})]\,dy - \Delta. \end{cases}$$

Въ сей послѣдней формулѣ, Δ уничтожится, если функція $f(x+y\sqrt{-1})$ будетъ конечная и непрерывная для всѣхъ величинъ перемѣнныхъ x и y, содержащихся между предѣлами $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. Но если между сими самыми предѣлами, функція $f(x+y\sqrt{-1})$ обращается въ величину безконечную для системы $x = a$, $y = b$: то величина количества Δ опредѣлится уравненіемъ (4); и предположивъ для краткости,

$$(7)\ (x-a-b\sqrt{-1})f(x) = F(x),\ y = b+\varepsilon z,\ z_0 = -\frac{b-y_0}{\varepsilon},\ Z = \frac{Y-b}{\varepsilon},$$

найдется:

$$(8)\ \Delta = \sqrt{-1}\,пр.\int_{y_0}^{Y} [f(a+\varepsilon+y\sqrt{-1}) - f(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})]\,dy$$

$$= \sqrt{-1}\,пр.\int_{z_0}^{Z} \left\{\frac{F[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1+z\sqrt{-1}} - \frac{F[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1+z\sqrt{-1}}\right\} dz.$$

Теперь пусть будетъ

$$(9)\quad \frac{F[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1+z\sqrt{-1}} - \frac{F[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1+z\sqrt{-1}} = \varpi(\varepsilon) + \sqrt{-1}\,\psi(\varepsilon),$$

$$(10)\qquad \frac{\varpi(\varepsilon)-\varpi(0)}{\varepsilon} = \alpha,\quad \frac{\psi(\varepsilon)-\psi(0)}{\varepsilon} = \beta,$$

гдѣ $\varpi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$, а слѣдовательно и α, β, изображаютъ количества вещественныя. Сверхъ того положимъ что Y болѣе y_0, и что функціи $F(x+y\sqrt{-1})$, $F'(x+y\sqrt{-1})$ остаются конечными и непрерывными относительно къ перемѣннымъ x и y между предѣлами x_0, X, y_0, Y. Поелику, въ слѣдствіе формулы (9) имѣемъ,

$$\varpi'(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\psi'(\varepsilon)=F'[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]-F'[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]$$
$$=F'(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})-F'(a-\varepsilon+y\sqrt{-1}),$$

то очевидно, что численныя величины количествъ $\varpi'(\varepsilon), \psi'(\varepsilon)$ будутъ также весьма малыя, равно какъ и численныя величины двухъ количествъ α и β, которыя могутъ быть представлены въ видѣ $\varpi'(\theta\,\varepsilon)$ и $\psi'(\theta\,\varepsilon)$, гдѣ θ означаетъ число меньшее единицы. Посему, найдется:

$$np.\int_{z_0}^{Z}\varepsilon(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,dz=np.\int_{y_0}^{Y}(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,dy=0,$$
$$np.\int_{z_0}^{Z}[\varpi(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\psi(\varepsilon)]dz=\int_{z_0}^{Z}[\varpi(0)+\sqrt{-1}\,\psi(0)]dz,$$

потомъ, сдѣлавъ $\mathfrak{f}=F(a+b\sqrt{-1})=np.\,\varepsilon f(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)$, получимъ:

$$(11)\quad \Delta=\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}[\varpi(0)+\sqrt{-1}\,\psi(0)]dz=2\mathfrak{f}\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z}{1+z^2}=2\pi\mathfrak{f}\sqrt{-1}.$$

Еслибъ имѣли $y_0=b$ или $Y=b$, то въ такомъ случаѣ слѣдовало бы брать, интегралъ относительный къ z въ формулѣ (11), между предѣлами $z=0$, $z=\infty$, или между предѣлами $z=-\infty$, $z=0$, а посему величина количества Δ обратилась бы въ $\pi\mathfrak{f}\sqrt{-1}$. Въ томъ же самомъ предположеніи, первая часть уравненія (6) изображаетъ главную величину интеграла неопредѣленнаго, (*смотри* урокъ 24). Замѣтимъ также что $a+b\sqrt{-1}$ есть корень уравненія

$$(12)\qquad f(x)=\pm\infty.$$

Если бы сіе уравненіе имѣло нѣсколько такихъ корней, коихъ вещественныя части заключались бы между предѣлами x_0, X, а коеффиціенты при $\sqrt{-1}$ между предѣлами y_0, Y: то, означивъ чрезъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ сіи самые корни, а чрезъ $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_m$ истинныя величины произведеній

$$(x-x_1)f(x),\quad (x-x_2)f(x)\ldots(x-x_m)f(x),$$

соотвѣтствующія предположеніямъ $x - x_1 = 0$, $x - x_2 = 0$... $x - x_m = 0$, найдется:

$$(13) \qquad \Delta = 2\pi\,[\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots \mathrm{f}_m]\sqrt{-1}$$

Прибавимъ, что должно брать только половину каждаго изъ количествъ f_1, $\mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_m$, когда въ соотвѣтствующемъ оному корню, коеффиціентъ при $\sqrt{-1}$ равенъ одному изъ предѣловъ y_0 или Y.

Когда функція $f(x + y\sqrt{-1})$ уничтожается, 1°. для $x = \pm\infty$, каковъ бы ни былъ y; 2°. для $y = \infty$, каковъ бы ни былъ x: то взявъ $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, $y_0 = 0$, $Y = \infty$, изъ формулы (6) выведемъ:

$$(14) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \Delta.$$

Когда функція $f(x)$ представляется въ видѣ $\frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)}$, и если неуничтожающіеся члены изъ ряда f_1, $\mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_m$ всѣ соотвѣтствуютъ корнямъ уравненія

$$(15) \qquad F(x) = 0:$$

то очевидно что выраженіе Δ можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$(16) \qquad \Delta = 2\pi\left[\frac{\mathrm{f}(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{\mathrm{f}(x_2)}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\mathrm{f}(x_m)}{F'(x_m)}\right]\sqrt{-1},$$

а уравненіе (14) обращается въ слѣдующее:

$$(17) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)}\,dx = 2\pi\left[\frac{\mathrm{f}(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{\mathrm{f}(x_2)}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\mathrm{f}(x_m)}{F'(x_m)}\right]\sqrt{-1}.$$

Во второй части сей послѣдней формулы должно принимать только вещественные корни уравненія (15) и тѣ мнимые корни, для коихъ коеффиціенты при $\sqrt{-1}$ будутъ положительные, наблюдая то, чтобы брать только половину тѣхъ изъ членовъ ряда $\frac{\mathrm{f}(x_1)}{F'(x_1)}$, $\frac{\mathrm{f}(x_2)}{F'(x_2)} \cdots \frac{\mathrm{f}(x_m)}{F'(x_m)}$, которые будутъ соотвѣтствовать вещественнымъ корнямъ. Въ слѣдствіе сего, для $F(x) = 1 + x^2$, $x_1 = \sqrt{-1}$, найдется,

(18) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{1+x^2} dx = \pi \mathrm{f}(\sqrt{-1});$$

а для $F(x) = 1 - x^2$, $x_1 = -1$, $x_2 = +1$,

(19) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(x)}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [\mathrm{f}(-1) - \mathrm{f}(1)] \sqrt{-1}.$$

Сія послѣдняя формула даетъ главную величину интеграла входящаго въ оную.

Примѣры. Пусть μ будетъ число заключающееся между 0 и 2. Если возмемъ $\mathrm{f}(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1}$, то мнимое выраженіе $\mathrm{f}(x + y\sqrt{-1}) = (y - x\sqrt{-1})^{\mu-1}$ будетъ имѣть одну, совершенно опредѣленную величину, для всѣхъ возможныхъ положительныхъ величинъ перемѣнной y (*смотри Analyse algébrique*, Глав. VII); изъ формулъ же (18) и (19) выведемъ:

(20) $$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2} dx = [(-\sqrt{-1})^{\mu-1} + (\sqrt{-1})^{\mu-1}] \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^2} = \pi, \\ &\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{aligned}\right.$$

(21) $$\left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [(\sqrt{-1})^{\mu} + (-\sqrt{-1})^{\mu}], \\ &\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1-x^2} = \frac{\pi\cos(\frac{1}{2}\mu\pi)}{2\sin(\frac{1}{2}\mu\pi)} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{tang}\,(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{aligned}\right.$$

Подставляя z вмѣсто x^2 и $2a$ вмѣсто μ въ послѣднія изъ уравненій (20) и (21), найдемъ опять формулы (8) и (9) 32$^{\text{го}}$ урока, которыя такимъ образомъ будутъ доказаны, равно какъ и первое изъ уравненій (14) 33$^{\text{го}}$ урока, для всѣхъ возможныхъ величинъ количества a, заключающихся между предѣлами 0 и 1.

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ.

Дифференцированіе опредѣленныхъ интеграловъ относительно къ перемѣнной входящей въ функцію находящуюся подъ знакомъ $\int$, между предѣлами интегрированія. Интегралы высшихъ порядковъ для функцій содержащихъ одну перемѣнную.

Пусть будетъ

(1) $$A = \int_{z_0}^{Z} f(x, z)\, dz$$

опредѣленный интегралъ относительно къ z. Если въ семъ интегралѣ, будемъ измѣнять отдѣльно, и независимо одно отъ другаго, три количества Z, z_0, x: то въ слѣдствіе формулъ (5) (26^го урока), и формулы (2) (33^го урока), получимъ:

(2) $$\frac{dA}{dZ} = f(x, Z), \quad \frac{dA}{dz_0} = -f(x, z_0), \quad \frac{dA}{dx} = \int_{z_0}^{Z} \frac{df(x, y)}{dx}\, dz.$$

Полагая же что оба количества z_0 и Z, дѣлаются функціями перемѣнной x, и принимая посему A за функцію одной только измѣняемой x, найдется:

(3) $$\frac{dA}{dx} = \int_{z_0}^{Z} \frac{df(x, y)}{dx}\, dz + f(x, Z)\frac{dZ}{dx} - f(x, z_0)\frac{dz_0}{dx}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда z_0 будетъ постоянное количество, а $f(x, Z)$ равна нулю, то просто будетъ:

(4) $$\frac{d}{dx}\int_{z_0}^{Z} f(x, z)\, dz = \int_{z_0}^{Z} \frac{df(x, z)}{dx}\, dz.$$

Примѣръ. Означимъ чрезъ x_0 частную, постоянную величину перемѣнной x, и положимъ $z_0 = x_0$, $Z = x$, $f(x, z) = (x - z)^m f(z)$; получимъ формулу

$$(5)\qquad \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}(x-z)^m f(z)\,dz = m\int_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1} f(z)\,dz,$$

изъ коей выведемъ

$$(6)\qquad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1} f(z)\,dz\,dx = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x}(x-z)^m f(z)\,dz,$$

и

$$(7)\qquad \iint_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1} f(z)\,dz\,dx = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x}(x-z)^m f(z)\,dz + C,$$

гдѣ C изображаетъ постоянное произвольное количество. Если возмемъ m равнымъ единицѣ: то въ силу формулы (6) получимъ:

$$(8)\qquad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz\,dx = \int_{x_0}^{x}(x-z) f(z)\,dz.$$

Теперь легко рѣшить слѣдующую задачу:

Задача. *Найти общую величину перемѣнной y, удовлетворяющую уравненію*

$$(9)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Рѣшеніе. Поелику уравненіе (9) можетъ быть изображено въ видѣ

$$d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = f(x)\,dx,$$

то интегрируя обѣ части онаго относительно къ x, выведемъ

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + c;$$

или, что все равно,

$$(10)\qquad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz + c.$$

Интегрируя опять относительно къ перемѣнной x нѣсколько разъ сряду, между предѣлами x_0, x, сверхъ того, соображаясь съ формулами (6) и (8), и придавая постоянное произвольное количество послѣ каждаго интегрированія, найдется постепенно:

$$(11)\quad\begin{cases}\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int_{x_0}^{x}(x-z)f(z)\,dz+c\,(x-x_0)+c_1,\\ \dfrac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}=\int_{x_0}^{x}\dfrac{(x-z)^2}{1.2}f(z)\,dz+c\dfrac{(x-x_0)^2}{1.2}+c_1\,(x-x_0)+c_2,\\ \text{и проч}\ldots\\ \dfrac{dy}{dx}=\int_{x_0}^{x}\dfrac{(x-z)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}f(z)dz+c\,\dfrac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}+c_1\dfrac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)}+c_2\dfrac{(x-x_0)^{n-4}}{1.2\ldots(n-4)}+\ldots+c_{n-1};\end{cases}$$

и наконецъ

$$(12)\quad y=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)\,dz+c\,\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+c_1\frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}$$
$$+c_2\frac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)}\ldots+c_{n-1}\,(x-x_0)+c_n,$$

гдѣ c, c_1, $c_2\ldots c_{n-1}$, c_n изображаютъ различныя постоянныя произвольныя количества. Замѣтимъ также что опредѣленный интегралъ заключающійся во второй части уравненія (12), легко можетъ быть приведенъ къ другому виду помощію формулы (17) (22$^{\text{го}}$ урока). Дѣйствительно, подставивъ въ сію формулу z вмѣсто x, и x вмѣсто X, получимъ

$$(13)\quad \int_{x_0}^{x}f(z)\,dz=\int_{0}^{x-x_0}f(x_0+z)\,dz=\int_{0}^{x-x_0}f(x-z)\,dz,$$

и слѣдовательно

$$(14)\quad \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)\,dz=\int_{0}^{x-x_0}\frac{(x-x_0-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(x_0+z)dz$$
$$=\int_{0}^{x-x_0}\frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(x-z)\,dz.$$

Полагая, для большей простоты, $x_0=0$, величина перемѣнной y, опредѣляемая уравненіемъ (12), обратится въ слѣдующую:

$$(15)\quad y=\int_{0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)\,dz+c\,\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+c_1\frac{x^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}$$
$$+c_2\frac{x^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)}+\ldots+c_{n-1}\,x+c_n,$$

и формула (14), въ семъ предположеніи, приметъ видъ

$$(16)\quad \int_{0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)\,dz=\int_{0}^{x}\frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(x-z)\,dz.$$

Когда употребляемъ неопредѣленные интегралы, и желаемъ только показать послѣдовательныя интегрированія: то величины функцій

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\ \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}},\ \text{и проч.} \dots y,$$

выведенныя изъ уравненія (9), изображаются слѣдующимъ образомъ:

$$\int f(x)\,dx,\ \int.\int f(x)\,dx\,.\,dx,\ \int.\int.\int f(x)\,dx\,.\,dx\,.\,dx,$$
$$\text{и проч.} \dots \int.\int.\int \dots \int f(x)\,dx \dots dx\,.\,dx\,.\,dx.$$

Сіи послѣднія выраженія называются интегралами перваго, втораго, третьяго ... порядка, и наконецъ $n^{\text{го}}$ *порядка*, относительно къ перемѣнной x. Для краткости, мы условимся впредь означать ихъ знакоположеніями

$$(17)\qquad \int f(x)\,dx,\ \iint f(x)\,dx^2,\ \iiint f(x)\,dx^3, \dots \int\int \dots f(x)\,dx^n,$$

и вмѣсто сихъ послѣднихъ будемъ употреблять слѣдующія:

$$(18)\ \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,\ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^2,\ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^3, \dots \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \dots f(x)\,dx^n,$$

когда каждое интегрированіе относительно къ x, будетъ произведено между предѣлами x_0, x. Посему имѣемъ:

$$(19)\qquad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \dots f(x)\,dx^n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\,3\dots(n-1)} f(z)\,dz =$$
$$\frac{1}{1.2\dots(n-1)} \left\{ \begin{array}{l} x^{n-1}\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_{x_0}^{x} z f(z)\,dz \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \int_{x_0}^{x} z^2 f(z)\,dz \dots \pm \int_{x_0}^{x} z^{n-1} f(z)\,dz \end{array} \right\},$$

или, что все равно,

$$(20)\qquad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \dots f(x)\,dx^n =$$
$$\frac{1}{1.2\dots(n-1)} \left\{ x^{n-1}\int_{x_0}^{x} f(x)dx - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_{x_0}^{x} x^2 f(x)dx \dots \pm \int_{x_0}^{x} x^{n-1} f(x)dx \right\}.$$

Сію послѣднюю формулу можно непосредственно вывесть помощію нѣсколькихъ интегрированій по частямъ.

Теперь пусть $F(x)$ будетъ частная величина перемѣнной y, удовлетворяющая уравненію (9), такъ что

(21) $$F^{(n)}(x)=f(x).$$

Если $F(x)$, и ея послѣдовательныя производныя, до производной $n^{\text{го}}$ порядка, будутъ непрерывныя между предѣлами x_0, x: то полагая въ формулахъ (10), (11) и (12) $x=x_0$, найдется:

(22) $c=F^{(n-1)}(x_0)$, $c_1=F^{(n-2)}(x_0)$, $c_2=F^{(n-3)}(x_0)$,..$c_{n-1}=F'(x_0)$, $c_n=F(x_0)$, и формула (12) даетъ

(23) $$F(x)=F(x_0)+\frac{x-x_0}{1}F'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x_0)$$
$$+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^n}{1.2.3\ldots n}f(z)\,dz.$$

Изъ сей послѣдней, соединенной съ уравненіемъ (19), выводится слѣдующая формула:

(24) $$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}..f(x)dx^n=F(x)-F(x_0)-\frac{x-x_0}{1}F'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{1.2}F''(x_0)\ldots$$
$$-\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x_0),$$

заключающая, какъ частный случай, формулу (17) ($26^{\text{го}}$ урока). Предполагая $x_0=0$, уравненіе (24) приводится къ

(25) $$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n=F(x)-F(0)-\frac{x}{1}F'(0)$$
$$-\frac{x^2}{1.2}F''(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0).$$

Примѣръ. Пусть $F(x)=e^x$; имѣемъ $f(x)=F^{(n)}(x)=e^x$, и слѣдственно

(26) $$\int_0^x\int_0^x\ldots e^x dx^n=e^x-1-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{1.2}\ldots-\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}=\int_0^x\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}e^z dz.$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ.

Преобразованіе какихъ ни-есть функцій перемѣнной x или $x+h$ въ цѣлыя функціи перемѣнной x или h, съ дополнительнымъ опредѣленнымъ Интеграломъ. Другія выраженія для сихъ самыхъ Интеграловъ.

Если въ уравненіе (23) предъидущаго урока, подставимъ вмѣсто функціи $f(z)$ величину оной $F^{(n)}(z)$, выведенную изъ формулы (21): то, при тѣхъ же самыхъ условіяхъ, найдется:

$$(1)\qquad F(x)=F(x_0)+\frac{x-x_0}{1}F'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}F''(x_0)\dots$$
$$+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}F^{(n-1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}F^{(n)}(z)\,dz,$$

потомъ, взявъ $x_0=0$,

$$(2)\qquad F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\dots$$
$$+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\int_0^x\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}F^{(n)}(z)\,dz.$$

Полагая теперь $F(x)=f(x+h)$, и измѣняя порядокъ буквъ x и h, получимъ уравненіе:

$$(3)\qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\int_0^h\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{(n)}(x+z)\,dz,$$

въ которомъ послѣдній членъ можетъ быть представленъ въ различныхъ видахъ, ибо (въ слѣдствіе формулъ (14) и (19) 35^го урока) имѣемъ:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^h\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{(n)}(x+z)\,dz=\int_0^h\frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\,dz=\\&\int_0^{x+h}\frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{(n)}(z)\,dz=\int_0^h\int_0^h\dots f^{(n)}(x+z)\,dz^n.\end{aligned}\right.$$

Въ уравненіи (3) предполагается, что функціи $f(x+z)$, $f'(x+z), \ldots f^{(n)}(x+z)$, суть непрерывныя между предѣлами $z=0$, $z=h$. Можно вывести оное непосредственно изъ формулы (1), полагая $x=x_0+h$, потомъ, поставляя x вмѣсто x_0, а f вмѣсто F. Въ такомъ случаѣ, послѣдній членъ второй части, обратится въ третій изъ интеграловъ заключающихся въ формулѣ (4).

Впрочемъ, можно прямо доказать уравненіе (3), посредствомъ нѣсколькихъ интегрированій по частямъ, придерживаясь способа изложеннаго Г. *Прони* въ разсужденіи напечатанномъ въ 1805 году. Дѣйствительно, подставляя сперва въ формулу (3) предъидущаго урока, x_0+h вмѣсто x, а потомъ x вмѣсто x_0, получимъ:

$$(5)\qquad \int_0^h f(x+z)\,dz=\int_0^h f(x+h-z)\,dz;$$

слѣдовательно

$$(6)\quad f(x+h)-f(x)=\int_0^h f'(x+z)\,dz=\int_0^h f'(x+h-z)\,dz.$$

Интегрируя по частямъ нѣсколько разъ сряду, имѣемъ:

$$(7)\ \int f'(x+h-z)\,dz=\frac{z}{1}f'(x+h-z)+\int\frac{z}{1}f''(x+h-z)\,dz$$

$$=\frac{z}{1}f'(x+h-z)+\frac{z^2}{1.2}f''(x+h-z)+\int\frac{z^2}{1.2}f'''(x+h-z)\,dz$$

$=$ и проч. . . .

$$=\frac{z}{1}f'(x+h-z)+\frac{z^2}{1.2}f''(x+h-z)\ldots$$

$$+\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x+h-z)+\int\frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\,dz,$$

потомъ, производя каждое интегрированіе между предѣлами $z=0$, $z=h$, и предполагая что функціи $f(x+z)$, $f'(x+z)\ldots$ $f^{(n)}(x+z)$, остаются непрерывными между сими самыми предѣлами, получимъ:

$$(8) \qquad \int_0^h f'(x+h-z)\,dz = \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x)\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+h-z)\,dz.$$

Легко видѣть теперь, что изъ формулы (6), выводится уравненіе, которое будетъ согласоваться, въ слѣдствіе формулы (4), съ уравненіемъ (3). Сей же самый способъ можетъ еще служить для доказательства уравненія (2).

Интегралы заключающіеся во вторыхъ частяхъ формулъ (2) и (3), не только могутъ быть замѣнены нѣсколькими другими, подобными тѣмъ интеграламъ, которые формула (4) содержитъ; но изъ уравненія (13) (23го урока), должно еще заключить, что они равны двумъ произведеніямъ слѣдующаго вида:

$$(9) \qquad F^{(n)}(\theta x)\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,dz = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x),$$

$$(10) \qquad f^{(n)}(x+\theta h)\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,dz = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

гдѣ θ означаетъ неизвѣстное число, которое будучи менѣе единицы, можетъ впрочемъ различествовать для каждаго произведенія. Слѣдовательно имѣемъ

$$(11) \qquad F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots$$
$$+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x).$$

$$(12) \qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Необходимо замѣтить, что функція $F(x)$ и ея послѣдовательныя производныя, должны быть непрерывныя, въ формулѣ (11), между предѣлами 0, x; а функція $f(x+z)$ и ея послѣдовательныя производныя, въ формулѣ (12), между предѣлами $z=0$, $z=h$.

Теперь пусть будетъ $u = f(x, y, z \ldots)$ функція нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ величинъ $x, y, z \ldots$; и положимъ

$$(13) \qquad F(\alpha) = f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz, \ldots).$$

Подставляя α вмѣсто x, въ формулу (11), выведемъ изъ оной, въ силу правилъ доказанныхъ въ 14[мъ] урокѣ,

$$(14) \qquad f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz, \ldots)$$
$$= u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u \ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n} F^{(n)}(\theta\alpha).$$

Если предположимъ, что количество α есть безконечно-малое, то и разность

$$F^{(n)}(\theta\alpha) - F^{(n)}(0) \quad \text{или} \quad F^{(n)}(\theta\alpha) - d^n u$$

будетъ также безконечно-малая; означивъ оную чрезъ β, получится

$$(15) \qquad f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz, \ldots)$$
$$= u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u \ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} d^{n-1}u + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^n u + \beta).$$

Когда вмѣсто нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ, возмемъ только одну измѣняемую x, и положимъ $y = f(x)$: то получимъ формулу

$$(16)\, f(x+\alpha dx) = y + \frac{\alpha}{1} dy + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2y + \ldots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} d^{n-1}y + \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^n y + \beta).$$

Положимъ теперь, что для частной величины $x = x_0$, функція $f(x)$ и ея послѣдовательныя производныя до производной $n-1$ порядка, всѣ уничтожаются. Въ семъ случаѣ, изъ формулы (12), выводимъ:

$$(17) \qquad f(x_0 + h) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x_0 + \theta h);$$

потомъ, подставляя въ сію послѣднюю формулу вмѣсто конечнаго количества h, безконечно-малое i, получимъ

$$(18) \qquad f(x_0 + i) = \frac{i^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x_0 + \theta i).$$

Когда, между функціями $f(x), f'(x) \ldots f^{(n-1)}(x)$, одна только первая не уничтожается для $x = x_0$, то очевидно, что вмѣсто уравненія (18), должно принимать слѣдующее:

$$(19) \qquad f(x_0 + i) - f(x_0) = \frac{i^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x_0 + \theta i).$$

Если, въ томъ же самомъ предположеніи, напишемъ x вмѣсто x_0, и сдѣлаемъ $f(x) = y$, $\Delta x = i = \alpha h$: то уравненіе (19) получитъ видъ

$$(20) \qquad \Delta y = \frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}(d^n y + \beta),$$

гдѣ β, равно какъ и α, означаютъ количества безконечно-малыя. Изъ уравненія (16) можно также вывести формулу (20), наблюдая что для величины перемѣнной x, обращающей въ нуль производныя функціи $f'(x), f''(x) \ldots f^{(n-1)}(x)$, равнымъ образомъ уничтожаются и дифференціалы dy, $d^2y \ldots d^{n-1}y$.

Уравненіе (20) доставляетъ средство къ рѣшенію 4-й задачи 6го урока, во многихъ случаяхъ, когда способъ, который мы прежде изложили, недостаточенъ. И дѣйствительно, предположимъ что y и z означаютъ двѣ функціи перемѣнной x, и что для частнаго значенія x, напримѣръ $x = x_0$, не только дробь $s = \frac{z}{y}$ обращается въ $\frac{0}{0}$, но и слѣдующія еще дроби: $\frac{z'}{y'}$, $\frac{z''}{y''} \ldots \frac{z^{(m-1)}}{y^{(m-1)}}$. Въ такомъ случаѣ, полагая $\Delta x = \alpha dx$, и изобразивъ чрезъ β, γ, два безконечно-малыя количества, получимъ, для $x = x_0$,

$$(21) \quad \Delta y = \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m}(d^m y + \beta), \quad \Delta z = \frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m}(d^m z + \gamma).$$

$$(22) \quad s = \text{пр.}\frac{z + \Delta z}{y + \Delta y} = \text{пр.}\frac{\Delta z}{\Delta y} = \text{пр.}\frac{d^m z + \gamma}{d^m y + \beta} = \frac{d^m z}{d^m y} = \frac{z^{(m)}}{y^{(m)}}.$$

Примѣръ. Для $x = 0$, будемъ имѣть

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{d^2(\sin^2 x)}{d^2(1 - \cos x)} = \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x} = 2.$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ.

Тейлорова и Маклоренова теоремы. Распространеніе сихъ теоремъ на функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Безконечнымъ рядомъ или *строкою* называется совокупность безконечнаго числа членовъ

(1) $$u_0,\ u_1,\ u_2 \dots u_n, \text{ и проч.} \dots$$

выводимыхъ одинъ изъ другаго по извѣстному закону. Изобразимъ чрезъ

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

сумму n первыхъ членовъ, гдѣ n означаетъ какое ни есть цѣлое, положительное число. Если, для величинъ количества n возрастающихъ по произволенію, сумма s_n будетъ постепенно приближаться къ нѣкоторому предѣлу s: то безконечный рядъ получаетъ названіе *сходящагося ряда*, а предѣлъ s, изображаемый слѣдующимъ образомъ:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{ и проч.}$$

именуется его *суммою*. Напротивъ того, если сумма s_n не приближается ни къ какому опредѣленному предѣлу, между тѣмъ какъ n увеличивается до безконечности: то безконечный рядъ называется *расходящимся рядомъ*, и не имѣетъ уже тогда суммы. Въ томъ и другомъ случаѣ, членъ соотвѣтствующій указателю n, именно u_n, именуется *общимъ членомъ*. Сверхъ того, если въ первомъ предположеніи возмемъ $s = s_n + r_n$: то r_n будетъ изображать *остатокъ* безконечнаго ряда, отъ $n^{\text{го}}$ члена.

Условившись въ сихъ опредѣленіяхъ, изъ формулъ (2) и (3) (36$^{\text{го}}$ урока) выводимъ по слѣдствіе, что безконечные ряды

$$(2)\qquad F(0),\ \frac{x}{1}F'(0),\ \frac{x^2}{1.2}F''(0),\ \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0),\ \text{и проч.}\ldots,$$

$$(3)\qquad f(x),\ \frac{h}{1}f'(x),\ \frac{h^2}{1.2}f''(x),\ \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x),\ \text{и проч.}\ldots,$$

будутъ сходящіеся, и сверхъ того сумма перваго будетъ равна $F(x)$, а втораго $f(x+h)$, когда величины двухъ интеграловъ

$$(4)\qquad \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z)\,dz = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x),$$

$$(5)\qquad \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x+z)\,dz = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

будутъ стремиться, для безконечно-возрастающихъ величинъ количества n, къ предѣлу нуль. Въ слѣдствіе сего найдемъ:

$$(6)\ F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}F'''(0)+\text{и проч.}\ldots,$$

если выраженіе (4) уничтожается для безконечныхъ величинъ количества n; также

$$(7)\ f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\text{и проч.}\ldots$$

если выраженіе (5) удовлетворяетъ сему же самому условію. Формулы (6) и (7) заключаютъ въ себѣ теоремы Маклорена и Тейлора. Когда интегралы (4) и (5) удовлетворяютъ предписаннымъ условіямъ: то теоремы сіи служатъ къ разложенію двухъ функцій $F(x)$ и $f(x+h)$ въ безконечные ряды, простирающіеся по цѣлымъ и восходящимъ степенямъ количествъ x и h. Остатки же сихъ безконечныхъ рядовъ опредѣляются двумя интегралами, о коихъ мы сей-часъ упомянули.

Изобразимъ теперь чрезъ $u=f(x, y, z\ldots)$ функцію нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ величинъ x, y, $z\ldots$; вмѣсто уравненій (2) и (3) предъидущаго урока, должно будетъ теперь употребить уравненіе (14), которое даетъ:

$$(8)\qquad f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz,\ldots)$$
$$=u+\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\frac{\alpha^3}{1.2.3}d^3u+\text{и проч.}\ldots,$$

если только членъ $\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta\alpha)$, или, лучше, интегралъ

$$(9)\qquad \int_0^\alpha \frac{(\alpha-v)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(v)\,dv,$$

изображаемый симъ членомъ, будетъ уничтожаться для безконечныхъ величинъ количества n. Посему, полагая $\alpha=1$, найдется:

$$(10)\,f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ldots)=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\text{и проч.}\ldots;$$

сія послѣдняя формула будетъ имѣть мѣсто, если интегралъ

$$(11)\qquad \int_0^1 \frac{(1-v)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(v)\,dv$$

удовлетворяетъ вышеупомянутому условію. Когда вмѣсто нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z\ldots$ возмется одна только перемѣнная x; то уравненіе (10) получитъ видъ

$$(12)\qquad f(x+dx)=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\text{и проч.}\ldots$$

Сіе уравненіе будетъ равнозначущее съ уравненіемъ (7), то есть, съ *Тейлоровою* формулою. Полагая въ семъ уравненіи x равнымъ нулю, и поставляя потомъ α вмѣсто dx, получится теорема *Маклорена*. Прибавимъ, что уравненіе (10), а также и то, которое выведется изъ онаго, когда вмѣсто $x, y, z\ldots$ поставимъ нули, а вмѣсто $dx, dy, dz\ldots$ величины $x, y, z\ldots$ даютъ средство распространить теоремы *Тейлора* и *Меклорена* на функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Замѣтимъ еще, что уравненія (6), (8), (10), (12) равнозначущи съ уравненіями (4), (6), (7), (8) (19[го] урока), въ томъ случаѣ, когда $F(x)$ и $f(x)$ изображаютъ цѣлыя функціи, степени n относительно къ x.

Поелику, въ слѣдствіе формулы (19) (22[го] урока), интегралъ (4) равенъ произведенію вида

$$(13) \qquad x\frac{(x-\theta x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(\theta x),$$

гдѣ θ есть число меньшее единицы: то ясно, что для безконечныхъ величинъ количества n, сей интегралъ уничтожается, если функція

$$(14) \qquad \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z)$$

обратится въ нуль для всѣхъ величинъ количества z, заключающихся между предѣлами 0 и x. Очевидно, что сіе послѣднее условіе будетъ выполнено, когда численная величина выраженія $F^{(n)}(\theta x)$ предполагаемаго вещественнымъ, или модуль сего выраженія если оное будетъ мнимое, не будетъ возрастать до безконечности, между тѣмъ какъ n будетъ увеличиваться. И дѣйствительно, поелику количество $m(n-m)=\left(\frac{n}{2}\right)^2-\left(\frac{n}{2}-m\right)^2$ возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ m, между предѣлами $m=1$, $m=\frac{n}{2}$, и какъ посему

$$1.(n-1)<2.(n-2)<3.(n-3)<\ldots,\ 1.2.3\ldots(n-1)>(n-1)^{\frac{n-1}{2}}:$$

то утвердительно можно сказать, что численная величина, или модуль выраженія (14), будетъ всегда меньше численной величины, или модуля произведенія

$$(15) \qquad \left(\frac{x-z}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1}F^{(n)}(z);$$

произведеніе же сіе обратится въ нуль въ принятомъ предположеніи, именно для $n=\infty$.

Примѣры. Полагая постепенно

$$F(x)=e^x,\ F(x)=\sin x,\ F(x)=\cos x,$$

найдемъ, для соотвѣтствующихъ величинъ функціи $F^{(n)}(\theta x)$, слѣдующія выраженія:

$$e^{\theta x},\quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right),\quad \cos\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right).$$

Такъ какъ сіи послѣднія количества остаются конечными при всякой величинѣ для x, между тѣмъ какъ n увеличиваетсся: то изъ сего заключаемъ, что теорема *Маклорена* можетъ быть всегда приложена къ тремъ вышеприведеннымъ функціямъ. Въ слѣдствіе сего будемъ имѣть, для какихъ ни есть величинъ перемѣнной x, и для положительныхъ величинъ количества A,

$$(16)\quad \begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{и проч.} \ldots \\ A^x = e^{xl(A)} = 1 + \frac{x\,l\,A}{1} + \frac{x^2(l\,A)^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3\,(l\,A)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{и проч.} \ldots \end{cases}$$

$$(17)\quad \sin x = \sin(0) + \frac{x}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^2}{1.2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \text{и проч.}$$
$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{и проч.}$$

$$(18)\quad \cos x = \cos(0) + \frac{x}{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^2}{1.2}\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \text{и проч.}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{и проч.}$$

Когда функція $F^{(n)}(\theta x)$, для безконечныхъ величинъ количества n, обращается въ безконечность: то выраженіе (14) можетъ иногда приближаться къ предѣлу нуль. Сіе случится, напримѣръ для $F(x) = l\,(1 + x)$, когда перемѣнной x припишутся величины меньшія единицы. Дѣйствительно, предполагая $z = \theta x$, $\theta < 1$, $x^2 < 1$, получимъ въ семъ случаѣ,

$$(19)\qquad \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3.\,.(n-1)} F^{(n)}(z) = \pm \frac{(x-z)^{n-1}}{(1+z)^n} = \frac{x^{n-1}}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

но какъ дробь $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$, очевидно будетъ меньше единицы, то ясно, что выраженіе (19) уничтожится, когда возмемъ $n = \infty$. Слѣдственно, для всѣхъ величинъ перемѣнной x заключающихся между предѣлами -1 и $+1$, будемъ имѣть:

$$(20)\qquad l\,(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ и проч.} \ldots$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ОСЬМОЙ.

Правила относящіяся къ сходящимся рядамъ. Приложеніе сихъ правилъ къ Маклореновой теоремѣ.

Займемся изысканіемъ условій при которыхъ какой ни-есть безконечный рядъ будетъ сходящійся. Сіе изысканіе весьма важно, ибо когда желаемъ разложить какую-либо функцію въ безконечный рядъ: то необходимо, чтобы сей рядъ былъ сходящійся, иначе оный не будетъ выражать величины данной функціи, то есть, функція не будетъ равна своему разложенію. Такъ, напримѣръ, уравненія (6) и (7) будутъ имѣть мѣсто только въ такомъ случаѣ, когда ряды (2) и (3) будутъ сходящіеся.

Одинъ изъ простѣйшихъ рядовъ есть геометрическая прогрессія

(1) $$a, \quad ax, \quad ax^2, \text{ и проч.} \dots$$

которой общій членъ есть ax^n. Сумма же n первыхъ членовъ сей прогрессіи, равна

$$a(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = a\frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}.$$

Ежели предположимъ, что численная величина x, или модуль сей величины когда она будетъ мнимая, меньше единицы: то оная сумма $\frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$, при возрастающихъ величинахъ n, будетъ приближаться къ предѣлу $\frac{a}{1-x}$, и въ семъ случаѣ рядъ (1) будетъ сходящійся. Если же численная величина x, или ея модуль когда она есть мнимая, будетъ больше единицы:

то сумма $\frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$, съ увеличенiемъ n, будетъ непрестанно увеличиваться, и превзойдетъ наконецъ всякую данную величину. Въ семъ последнемъ случаѣ, рядъ (1) будетъ непремѣнно расходящiйся. Въ обоихъ случаяхъ, величина a можетъ быть вещественная, или мнимая.

Теперь разсмотримъ рядъ

$$(2) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n, \text{ и проч.} \ldots$$

составленный изъ какихъ ни-есть вещественныхъ, или мнимыхъ членовъ. Дабы судить, будетъ ли сей рядъ сходящiйся, или расходящiйся: то нѣтъ никакой надобности разсматривать первые его члены; можно начать съ слѣдующихъ:

$$(3) \qquad u_m,\ u_{m+1},\ u_{m+2}, \text{ и проч.} \ldots$$

гдѣ m можетъ означать число, столь великое, сколько пожелаемъ. Изобразимъ чрезъ ρ численную величину, или модуль общаго члена u_n; очевидно что рядъ (3) будетъ сходящiйся, или расходящiйся, при тѣхъ же условiяхъ какъ и рядъ модулей

$$(4) \qquad \rho_m,\ \rho_{m+1},\ \rho_{m+2}, \text{ и проч.} \ldots$$

На семъ основанiи, легко вывести двѣ слѣдующiя теоремы:

1-я Теорема. *Изобразивъ чрезъ λ предѣлъ, или наиболѣшiй изъ предѣловъ, къ которому, или къ которымъ стремится величина $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, между тѣмъ какъ n увеличивается: окажется, что строка (2) будетъ сходящаяся если $\lambda < 1$, а расходящаяся, когда $\lambda > 1$.*

Доказательство. Положимъ сперва $\lambda < 1$; количество $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, съ увеличенiемъ n, не можетъ непрестанно приближаться къ предѣлу λ, не сдѣлавшись меньше такого числа μ, которое удовлетворяетъ условiю $\lambda < \mu < 1$. Слѣдовательно, можно всегда дать числу m такую большую величину, что положивъ

$n = m$, будемъ имѣть постоянно $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}} < \mu$, $\varrho_n < \mu^n$. Очевидно, что тогда члены строки (4), будутъ менѣе соотвѣтствующихъ имъ членовъ слѣдующей геометрической прогрессіи:

(5) $\mu^m, \ \mu^{m+1}, \ \mu^{m+2}$, и проч. . . . ;

но какъ сія послѣдняя строка, по причинѣ $\mu < 1$, есть сходящаяся, то и рядъ (2) непремѣнно долженъ быть также сходящійся.

Предположимъ теперь, что $\lambda > 1$, и возмемъ число μ такое, чтобы $\lambda > \mu > 1$. Очевидно, что величина $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$, съ непрестаннымъ увеличеніемъ количества n, не можетъ безконечно приближаться къ λ, не превзойдя наконецъ μ; слѣдовательно, при весьма большой величинѣ n, необходимо будетъ $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}} > \mu$ или $\varrho_n > \mu^n > 1$, и окажется, что рядъ (4) будетъ содержать безконечное число членовъ превышающихъ единицу; сего достаточно для удостовѣренія въ томъ, что ряды (2), (3) и (4) расходящіеся.

2-я Теорема. *Если отношеніе* $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$ *приближается, съ непрестаннымъ увеличеніемъ* n, *къ постоянному предѣлу* λ: *то рядъ* (2) *будетъ сходящійся въ томъ случаѣ, когда* $\lambda < 1$, *а расходящійся, когда* $\lambda > 1$.

Доказательство. Выберемъ по произволенію число ε меньшее разности между 1 и λ. Очевидно, что можно взять такое число m, что положивъ n равнымъ m, или n болѣе m, соотвѣтствующая величина отношенія $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$, будетъ заключаться между предѣлами $\lambda - \varepsilon$, $\lambda + \varepsilon$. Слѣдовательно величины членовъ строки (4) будутъ заключаться, между величинами соотвѣтствующихъ имъ членовъ двухъ слѣдующихъ геометрическихъ прогрессій:

$\varrho^m,\ \varrho^m(\lambda-\varepsilon),\ \varrho^m(\lambda-\varepsilon)^2,\ \varrho^m(\lambda-\varepsilon)^3,$ и проч....
$\varrho^m,\ \varrho^m(\lambda+\varepsilon),\ \varrho^m(\lambda+\varepsilon)^2,\ \varrho^m(\lambda+\varepsilon)^3,$ и проч....
которыя, при $\lambda < 1$, суть объ сходящіеся, а когда $\lambda > 1$, то онѣ будутъ обѣ расходящіеся. Слѣдовательно, и проч....

Примѣчаніе. Легко доказать, что выраженія $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$ и $(\varrho_n)^{\frac{1}{n}}$, съ увеличеніемъ n, приближаются къ одному и тому же предѣлу, если сей предѣлъ есть опредѣленное количество. (*Смотри Analyse algébrique*, Гл. VI).

Приложивъ теоремы (1) и (2) къ *Маклоренову* ряду

(6) $F(o),\ \frac{x}{1}F'(o),\ \frac{x^2}{1.2}F''(o),\ \frac{x^3}{1.2.3}F'''(o),$ и проч....

получимъ слѣдующее предложеніе:

3-я *Теорема. Означимъ чрезъ ϱ_n численную величину, или модуль производной функціи $F^{(n)}(o)$, и чрезъ λ предѣлъ къ которому непрестанно стремится наибольшая изъ величинъ отношенія $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$, при непрестанномъ увеличеніи количества n; рядъ* (6) *будетъ сходящійся, когда численная величина, или модуль количества x будетъ менѣе $\frac{1}{\lambda}$, а расходящійся, когда оная величина, или оный модуль превзойдетъ $\frac{1}{\lambda}$. За число λ можно будетъ взять величину отношенія $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$, при $n=\infty$.*

Примѣры. Полагая послѣдовательно
$F(x)=e^x$, $F(x)=\sin x$, $F(x)=\cos x$, $F(x)=l(1+x)$, $F(x)=(1+x)^\mu$, гдѣ μ есть количество постоянное, увидимъ что соотвѣтствующія величины дроби $\frac{1}{\lambda}$ будутъ,

$$\infty,\ \infty,\ \infty,\ 1,\ 1.$$

Слѣдовательно, ряды представляемые уравненіями (16), (17), (18) (37-го урока) будутъ сходящіеся между предѣлами

$x = -\infty$, $x = +\infty$, то есть, для какихъ ни-есть величинъ перемѣнной x. Напротивъ того, рядъ

(7) $1, \frac{\mu}{1}x, \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2, \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3, \ldots \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n$, и проч.

и тотъ, который представленъ формулой (20) (37[го] урока), будутъ сходящіеся при вещественныхъ величинахъ x, только между предѣлами $x = -1$, $x = +1$.

Мы уже замѣтили, что когда x есть величина вещественная, когда количество z заключается между предѣлами 0 и x, и когда функція $\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z)$ дѣлается равною нулю при n безконечномъ: то сумма ряда (6) равняется $F(x)$. Изъ сказаннаго же нами въ семъ урокѣ слѣдуетъ, что функція $\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z)$ будетъ равняться нулю, при $n = \infty$, когда, при n неопредѣленномъ, оная будетъ общимъ членомъ сходящагося ряда, то есть, когда, по 3-й теоремѣ, численная величина выраженія

(8) $$\frac{x-z}{n}\,\frac{F^{(n-1)}(z)}{F^{(n)}(z)}$$

съ увеличеніемъ n, будетъ приближаться къ предѣлу меньшему единицы.

Примѣръ. Пусть будетъ $F(x) = (1+x)^{\mu}$, гдѣ μ есть постоянное количество. Подставивъ въ выраженіе (8) θx вмѣсто z, получимъ выраженіе

$$x\frac{1-\theta}{1+\theta x}\,\frac{\mu-n}{n} = -x\frac{1-\theta}{1+\theta x}\left(1-\frac{\mu}{n}\right),$$

которое, для возрастающихъ величинъ количества n, будетъ приближаться къ предѣлу имѣющему видъ $-x \times \frac{1-\theta}{1+\theta x}$; численная величина онаго предѣла будетъ меньше единицы, предполагая $x^2 < 1$. Слѣдовательно, при семъ условіи, имѣемъ

(9) $(1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 +$ и проч....

Равнымъ образомъ докажется, что уравненіе

(10) $(1+ax)^{\mu}=1+\frac{\mu}{1}ax+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^2x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}a^3x^3+$ и проч....
имѣетъ мѣсто, для вещественныхъ, или мнимыхъ величинъ постояннаго количества a, когда численная величина перемѣнной x, будетъ меньше численной величины, или модуля дроби $\frac{1}{a}$.

Не должно заключать что рядъ (6), предполагаемый сходящимся, имѣетъ всегда суммою $F(x)$, и что $F(x)$ равна нулю, когда всѣ члены сего ряда уничтожаются (*). Въ противномъ можно удостовѣриться разсматривая функціи $F(x)=e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ и $F(x)=e^{-x^2}+e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$; первая не будетъ тожественно равна нулю, не смотря на то, что каждый членъ ея разложенія уничтожается отдѣльно; вторая же, именно $F(x)=e^{-x^2}+e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$, даетъ по разложеніи рядъ, имѣющій суммою e^{-x^2}, а не настоящую $e^{-x^2}+e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$.

(*) Переводя сіе сочиненіе, я долгомъ поставилъ себѣ ни въ какомъ случаѣ не отступать отъ подлинника; по сему сохранено здѣсь сіе замѣчаніе, хотя въ справедливости онаго Математики и не соглашаются съ г. *Коши*. Возраженія, сдѣланныя по сему предмету Г. *Поассонъ*, можно видѣть въ *Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1822 г. на *стран*. 84 — 85.

Примѣчаніе переводчика.

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ.

О неопредѣленно-степенныхъ и Логариѳмическихъ мнимыхъ выраженіяхъ. Употребленіе сихъ выраженій при разысканіи величинъ опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ Интеграловъ.

Въ 37мъ урокѣ уже доказано, что неопредѣленно-степенное выраженіе A^x (въ которомъ A изображаетъ постоянное, положительное количество, а x перемѣнную вещественную), имѣетъ суммою рядъ состоящій изъ членовъ

(1) $$1,\ \frac{x\,l\,A}{1},\ \frac{x^2(l\,A)^2}{1.2},\ \frac{x^3(l\,A)^3}{1.2.3},\ \text{и проч.}\ldots,$$

слѣдовательно, для какихъ ни-есть вещественныхъ величинъ x, имѣемъ формулу,

(2) $$A^x = 1 + \frac{x\,l\,A}{1} + \frac{x^2(l\,A)^2}{1.2} + \frac{x^3(l\,A)^3}{1.2.3} + \text{ и проч.}\ldots$$

Въ силу же 3-й. теоремы 38го урока, рядъ (1) будетъ сходящійся для какихъ ни-есть мнимыхъ величинъ перемѣнной x: то по сему условились распространить формулу (2) на всѣ возможные случаи, и употреблять оную даже при мнимыхъ величинахъ измѣняемой x, дабы составить себѣ ясное понятіе о функціи A^x. На семъ основаніи, легко будетъ вывести, изъ уравненія (2), различныя замѣчательныя формулы, которыя теперь приведемъ.

Полагая въ уравненіи (2) $A = e$; получимъ

(3) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{ и проч.}\ldots.$$

Изобразивъ чрезъ z перемѣнную вещественную, и взявъ $x = z\sqrt{-1}$, уравненіе (3) обратится въ слѣдующее:

$$e^{z\sqrt{-1}} = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \text{и проч.}\ldots$$

$$= 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{и проч.}\ldots + \left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \text{и проч.}\ldots\right)\sqrt{-1},$$

которое даетъ

(4) $$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\,.\sin z.$$

Такимъ же точно образомъ найдется:

(5) $$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\,.\sin z;$$

соединяя между собой уравненія (4) и (5), получимъ:

(6) $$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Также, означимъ чрезъ a и b двѣ вещественныя постоянныя величины, и возмемъ $x = (a + b\sqrt{-1})z$. Въ такомъ предположеніи, вторая часть формулы (3) будетъ изображать не иное что какъ разложеніе мнимой функціи $e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}.\sin bz)$, получаемое посредствомъ *Маклореновой* теоремы. Посему

(7) $$e^{(a+b\sqrt{-1})z} = e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\,.\sin b z) = e^{az}\,.\,e^{bx\sqrt{-1}}.$$

Сія послѣдняя формула подобна тожественному уравненію $e^{(a+b)z} = e^{az}.e^{bz}$; изъ сего послѣдняго можно вывести, по аналогіи, уравненіе $e^{(a+b\sqrt{-1})z} = e^{az}.e^{bz\sqrt{-1}}$, замѣняя вещественную постоянную величину b, мнимою $b\sqrt{-1}$. Легко усмотрѣть, основываясь на формулѣ (7), что уравненіе

(8) $$e^{x+y} = e^x.\,e^y$$

имѣетъ мѣсто для какихъ ни-есть мнимыхъ величинъ перемѣнныхъ x и y. Также, сличеніе формулы (2) съ (3), приведетъ насъ къ заключенію, что при всякой величинѣ x, имѣемъ

(9) $$A^x = e^{x\,l\,(A)}.$$

Изобразимъ теперь чрезъ u и v два количества вещественныя, и будемъ искать различныя величины x, удовлетворяющія двумъ уравненіямъ:

$$(10)\qquad A^x = u + v\sqrt{-1},\qquad\qquad (11)\qquad e^x = u + v\sqrt{-1}.$$

Сіи величины x будутъ изображать различныя *логариѳмы* количества $u + v\sqrt{-1}$, при основаніи A въ формулѣ (10), и при основаніи e въ формулѣ (11), слѣдовательно Неперовы логариѳмы въ послѣднемъ случаѣ. Но какъ въ слѣдствіе уравненія (9), логариѳмъ выраженія $u + v\sqrt{-1}$ для системы коей основаніе есть A, равенъ Неперову логариѳму того же самаго выраженія раздѣленному на $l(A)$, то очевидно, что достаточно будетъ опредѣлить x изъ уравненія (11). И такъ, означивъ чрезъ α и β двѣ величины вещественныя, и положивъ $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ въ формулѣ (11), получимъ:

$$e^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = u + v\sqrt{-1};$$

откуда (въ силу формулы (7)), $e^{\alpha}\cos\beta = u$, $e^{\alpha}\sin\beta = v$, слѣдовательно

$$(12)\qquad e^{\alpha} = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(13)\qquad \cos\beta = \frac{u}{\sqrt{(u^2+v^2)}},\quad \sin\beta = \frac{v}{\sqrt{(u^2+v^2)}}.$$

Уравненію (12) удовлетворяемъ одною только вещественною величиною количества α, именно, полагая $\alpha = \frac{1}{2}\,l\,(u^2 + v^2)$. Уравненіямъ же (13), удовлетворимъ, когда u положительное, всѣми величинами заключающимися въ формулѣ

$$(14)\qquad \beta = 2n\pi + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u},$$

разумѣя подъ n произвольное цѣлое число; когда же u отрицательное, тогда величины β опредѣлятся формулой

$$(15)\qquad \beta = (2n+1)\,\pi + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u}.$$

Слѣдовательно, выраженіе $u + v\sqrt{-1}$ имѣетъ безконечное множество мнимыхъ логариѳмовъ. Простѣйшій изъ сихъ логариѳмовъ, полагая u положительнымъ, соотвѣтствуетъ предположенію $n = 0$, и равняется величинѣ $\frac{1}{2}l(u^2+v^2)+\sqrt{-1}\,.\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{v}{u}\right)$. Сію-то величину мы будемъ изображать чрезъ $l(u+v\sqrt{-1})$ (*смотри Analyse algébrique*, Гл. IX); посему, для положительныхъ величинъ количества u, будемъ имѣть

$$(16)\qquad l(u+v\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\,l(u^2+v^2)+\sqrt{-1}.\ \mathrm{arc\,tang}\frac{v}{u};$$

сей самый логариѳмъ, для $v = 0$, имѣетъ вещественную величину равную $l(u)$.

Изобразимъ теперь чрезъ r величину положительную, и чрезъ t вещественную дугу, заключающуюся между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; уравненіе

$$(17)\qquad x = r(\cos t+\sqrt{-1}.\sin t) = r\,e^{t\sqrt{-1}},$$

доставитъ слѣдующее:

$$(18)\qquad l(x) = l(r)+t\sqrt{-1}.$$

Формулы, употребляемыя при диффенцированіи вещественныхъ неопредѣленно-степенныхъ и логариѳмическихъ выраженій, справедливы и въ томъ случаѣ, когда сіи выраженія будутъ мнимыя. И такъ, легко видѣть, что имѣемъ во 1$^{\text{хъ}}$. для мнимыхъ величинъ перемѣнной x,

$$(19)\qquad d\,e^x = e^x\,dx, \qquad\qquad (20)\qquad dl(\pm x) = \frac{dx}{x};$$

во 2$^{\text{хъ}}$. для вещественныхъ величинъ перемѣнныхъ x, y, z, и постоянныхъ количествъ α, β, a, b, также вещественныхъ,

$$(21)\qquad d\,e^{x+y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}}\,(dx+dy\sqrt{-1}),$$

$$(22)\qquad d\,l[\pm(x+y\sqrt{-1})] = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}},$$

(23) $dl[\pm(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})]=\frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}, \; dl[\pm(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})]=\frac{dx}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}},$

(24) $$d e^{(a+b\sqrt{-1})z}=e^{(a+b\sqrt{-1})z}(a+b\sqrt{-1})dz.$$

Въ сихъ формулахъ, должно принимать выраженіе, которагo берется Неперовъ логариѳмъ, или съ $+$, или съ $-$, смотря по тому, будетъ ли вещественная часть сего выраженія положительная, или отрицательная. Изъ сихъ самыхъ формулъ, непосредственно выводимъ и слѣдующія:

(25) $$\begin{cases} \int\frac{(A-B\sqrt{-1})dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}=(A-B\sqrt{-1})l[\pm(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})]+C, \\ \int\frac{(A+B\sqrt{-1})dx}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}=(A+B\sqrt{-1})l[\pm(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})]+C, \end{cases}$$

(26) $$\begin{cases} \int e^{(a+b\sqrt{-1})z}dz=\frac{e^{(a+b\sqrt{-1})z}}{a+b\sqrt{-1}}+C, \\ \int z^n e^{(a+b\sqrt{-1})z}dz=\frac{z^n e^{(a+b\sqrt{-1})z}}{a+b\sqrt{-1}}\left\{1-\frac{n}{(a+b\sqrt{-1})z}+\frac{n(n-1)}{(a+b\sqrt{-1})^2z^2}-\dots\right\}+C, \end{cases}$$

которыя согласуются съ формулами выведенными въ 28$^{\text{мъ}}$ и 30$^{\text{мъ}}$ урокахъ.

Неопредѣленно-степенныя и логариѳмическія мнимыя выраженія, могутъ быть съ выгодою употребляемы при разысканіи нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Напримѣръ, по второй изъ формулъ (26) видимъ, что можно замѣнить вещественное постоянное количество a, мнимою величиною $a+b\sqrt{-1}$ въ интегралѣ

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}dz=\frac{1.2.3\dots n}{a^{n+1}},$$

найденномъ въ 32$^{\text{мъ}}$ урокѣ. Въ слѣдствіе сего получимъ формулу

(27) $$\int_0^\infty z^n e^{-(a+b\sqrt{-1})z}dz=\frac{1.2.3\dots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}},$$

которая равнозначуща съ одною изъ тѣхъ, кои выведены были въ 32$^{\text{мъ}}$ же урокѣ, именно съ слѣдующею:

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}(\cos bz + \sqrt{-1}\,.\sin bz)\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}}.$$

Равнымъ образомъ очевидно, что формула (18) 34$^{\text{го}}$ урока, имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда предположимъ, что функція $f(x)$ не алгебрическая, а опредѣляется послѣдовательно уравненіями

$$f(x) = e^{ax\sqrt{-1}}, \quad f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1} e^{ax\sqrt{-1}}, \quad f(x) = \frac{(-x\sqrt{-1})e^{ax\sqrt{-1}}}{l(1-rx\sqrt{-1})},$$

гдѣ μ, a, r изображаютъ три постоянныя положительныя количества, изъ коихъ первое, заключается между предѣлами 0 и 2. Въ семъ предположеніи, найдется:

$$(28)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \pi e^{-a},$$

$$(29)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2} e^{ax\sqrt{-1}}\,dx = 2\int_0^\infty x^{\mu-1} \sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - ax\right)\frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-a},$$

$$(30)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})\,e^{ax\sqrt{-1}}}{l(1-rx\sqrt{-1})}.\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax.\,l(1+r^2x^2) + 2\cos ax.\,\operatorname{arc\,tang} rx}{[\frac{1}{2}l(1+r^2x^2)]^2 + [\operatorname{arc\,tang} rx]^2}.\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{l(1+r)}.$$

УРОКЪ СОРОКОВОЙ.

Интегрированіе посредствомъ рядовъ.

Разсмотримъ рядъ

(1) $$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots u_n, \text{ и проч.} \ldots$$

коего различные члены изображаютъ функціи перемѣнной x, непрерывныя между предѣлами $x=x_0$ и $x=X$. Помноживъ на dx каждый изъ сихъ членовъ, и интегрируя потомъ между сими самыми предѣлами, получимъ другой рядъ, составленный изъ опредѣленныхъ интеграловъ

(2) $$\int_{x_0}^{X} u_0 dx,\ \int_{x_0}^{X} u_1 dx,\ \int_{x_0}^{X} u_2 dx,\ \int_{x_0}^{X} u_3 dx, \ldots \int_{x_0}^{X} u_n dx, \text{ и проч.} \ldots$$

Сравнивая сей послѣдній рядъ съ рядомъ (1), легко будетъ доказать слѣдующую теорему.

1-я Теорема. *Положимъ что предѣлы x_0 и X оба конечныя количества, и что рядъ (1) есть сходящійся, не только для частныхъ значеній $x=x_0$ и $x=X$, но и для всѣхъ величинъ перемѣнной x, заключающихся между предѣлами x_0 и X. Въ семъ предположеніи, рядъ (2) будетъ также сходящійся; и если изобразимъ чрезъ s сумму ряда (1): то рядъ (2) будетъ имѣть суммою интегралъ $\int_{x_0}^{X} s\,dx$. Или, что все равно, уравненіе*

(3) $$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{ и проч.} \ldots$$

необходимо доставляетъ и слѣдующее:

(4) $\int_{x_0}^{X} s dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \int_{x_0}^{X} u_2 dx + \int_{x_0}^{X} u_3 dx +$ и проч....

Доказательство. Означимъ чрезъ

(5) $$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

сумму n первыхъ членовъ ряда (1), и чрезъ r_n остатокъ онаго, начиная отъ $n^{\text{го}}$ члена. Получимъ

(6) $$s = s_n + r_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + r_n,$$

и слѣдовательно

(7) $$\int_{x_0}^{X} s dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \int_{x_0}^{X} u_2 dx + \ldots + \int_{x_0}^{X} u_{n-1} dx + \int_{x_0}^{X} r_n dx.$$

Но поелику въ слѣдствіе формулы (14), 23^го^ урока, интегралъ $\int_{x_0}^{X} r_n dx$ будетъ равенъ произведенію $r_n (X - x_0)$, соотвѣтствующему нѣкоторой величинѣ x, заключающейся между предѣлами x_0 и X, и какъ сверхъ того, сіе произведеніе, для безконечныхъ величинъ n обращается въ нуль въ настоящемъ предположеніи: то и очевидно, что полагая въ формулѣ (7) $n = \infty$, получится уравненіе (4).

Слѣдствіе 1-е. Поставляя въ формулу (4) x вмѣсто X, получимъ слѣдующую:

(8) $\int_{x_0}^{X} s dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \int_{x_0}^{X} u_2 dx +$ и проч...,

которая справедлива, подобно формулѣ (3), между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$.

Слѣдствіе 2-е. Положимъ что рядъ (1) есть сходящійся для $x = x_0$, и для всѣхъ величинъ перемѣнной x, заключающихся между предѣлами x_0 и X; но дѣлается расходящимся для втораго предѣла, то есть для $x = X$. И въ семъ предположеніи, уравненія (3) и (8) будутъ имѣть мѣсто между предѣлами x_0 и X. Уравненіе (4) будетъ также имѣть мѣсто, если только интегралы, входящіе во вторую его часть, будутъ сами составлять рядъ сходящійся. Дѣйствительно, легко видѣть, что при семъ условіи, обѣ части уравненія (8) будутъ изображать функціи перемѣнной x, непрерывныя въ сопредѣльности частнаго значенія $x = X$ (*смотри Analyse algébrique*, на стран. 131); предполагая же что x приближается къ сему предѣлу X, и наконецъ дѣлается оному равнымъ, получимъ уравненіе (4). Напротивъ того, уравненіе (4) не будетъ имѣть мѣста, если интегралы, входящіе во вторую часть онаго, будутъ составлять расходящійся рядъ.

Слѣдствіе 3-е. Положимъ что рядъ (1) есть сходящійся между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$, но дѣлается расходящимся для одного изъ двухъ предѣловъ, или для обоихъ. Означивъ, въ семъ предположеніи, чрезъ ξ_0 и ξ два количества, содержащіяся между величинами x_0 и X, получимъ уравненіе

$$(9)\ \int_{\xi_0}^{\xi} s\,dx = \int_{\xi_0}^{\xi} u_0\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} u_1\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} u_2\,dx + \text{ и проч.}\ldots,$$

потомъ, предположивъ что ξ_0 стремится къ предѣлу x_0, а ξ къ X, получимъ опять формулу (4), лишь бы только интегралы входящіе во вторую часть оной, сами составляли рядъ сходящійся.

Сіе замѣчаніе справедливо даже и въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ предѣловъ x_0, или X, или даже оба въ одно время обращаются въ безконечность. Такъ, напримѣръ, можно взять $x_0 = -\infty$, $X = \infty$.

Слѣдствіе 4-е. Пусть будетъ $u_n = a_n x^n$, гдѣ a_n изображаетъ коеффиціентъ вещественный, или мнимый. Означимъ чрезъ ρ_n численную величину, или модуль количества a_n, и чрезъ λ наибольшую величину выраженія $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, при $n = \infty$. Рядъ (1) будетъ сходящійся между предѣлами $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$ (*смотри* 3-ю теор. 38го урока). Слѣдовательно, положивъ что x заключается между сими предѣлами, и взявъ

$$(10) \qquad s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{ и проч.} \ldots,$$

получимъ

$$(11) \qquad \int_0^x s\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \text{ и проч.} \ldots$$

Сіе послѣднее уравненіе будетъ имѣть мѣсто (*смотри* 2-е слѣдствіе) даже для частныхъ значеній $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$, если только сіи частныя величины не обратятъ рядъ $a_0 x$, $\frac{1}{2} a_1 x^2$, $\frac{1}{3} a_2 x^3$, и проч. въ расходящійся.

Посредствомъ изложенныхъ въ семъ урокѣ правилъ, можно будетъ разложить многіе интегралы въ сходящіеся ряды, которые доставятъ величины для сихъ интеграловъ до такой степени точности, какой пожелаемъ. Въ этомъ и состоитъ способъ *Интегрированія посредствомъ рядовъ*. Сей способъ съ удобностію можетъ быть приложенъ къ разложенію въ ряды различныхъ функцій. Для сего, чаще всего, функцію выражаютъ посредствомъ опредѣленнаго интеграла, который уже потомъ, разлагается въ рядъ по изъясненнымъ правиламъ.

Примѣры. Для разложенія въ ряды функцій $l(1+x)$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, употребимъ слѣдующія формулы:

$$l(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}, \quad \operatorname{arc\,tang} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\operatorname{arc\,sin} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx;$$

поелику же, между предѣлами $x = -1$, $x = +1$, имѣемъ:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \text{ и проч.} \ldots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \text{ и проч.} \ldots$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{ и проч.} \ldots,$$

то и найдемъ, между сими самыми предѣлами, посредствомъ интегрированія по рядамъ,

$$(12)\quad \begin{cases} l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{ и проч.} \ldots \\ \text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{ и проч.} \ldots \\ \text{arc sin}\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{ и проч.} \end{cases}$$

Полагая въ уравненіяхъ (12) $x = 1$, получаемъ ряды сходящіеся; слѣдовательно имѣемъ (слѣдствіе 2-е),

$$(13)\quad \begin{cases} l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \text{ и проч.} \ldots \\ \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{ и проч.} \ldots \\ \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \text{ и проч.} \ldots \end{cases}$$

Легко доказать (*смотри Analyse algébrique*, на стран. 163), что два сходящіеся ряда, простирающіеся по возрастающимъ и цѣлымъ степенямъ перемѣнной x, не могутъ имѣть суммъ равныхъ для весьма малыхъ величинъ сей перемѣнной, если коеффиціенты при одинакихъ степеняхъ x не равны между собою въ обоихъ рядахъ. Изъ сего замѣчанія, совокупно съ 5-ю теоремою (38го урока), слѣдуетъ, что если два ряда будутъ сходящіеся, и будутъ имѣть одинакія суммы для величинъ x, заключающихся между предѣлами $-r$, $+r$ [полагая что r означаетъ величину положительную]: то они удовлетворятъ сему же самому условію при тѣхъ мнимыхъ величинахъ x, для коихъ модуль будетъ меньше r. Основываясь на сихъ замѣчаніяхъ, легко вывести слѣдующую теорему.

2-я Теорема. *Положимъ что функціи $f(x, z)$ и*

$$(14)\qquad F(x) = \int_{z_0}^{Z} f(x,\, z)\, dz$$

могутъ быть разложены посредствомъ Маклореновой *теоремы въ ряды сходящіеся, простирающіеся по возрастающимъ и цѣлымъ степенямъ перемѣнной* x: *для вещественныхъ величинъ* z, *содержащихся между предѣлами* z_0 и Z, *и для величинъ* x, *заключающихся между предѣлами* $-r$, $+r$; *если для мнимыхъ величинъ* x, *суммы сихъ рядовъ будутъ, какъ и прежде, равняться функціямъ* $f(x, z)$, $F(x)$: *то уравненіе* (14) *будетъ имѣть мѣсто при всякой мнимой величинѣ* x, *коей модуль будетъ менѣе* r.

Примѣръ. Такъ какъ, при какой ни-есть величинѣ n, имѣемъ

$$\pi^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+x)^2} dz = e^{-x^2}\int_0^{\infty} e^{-z^2}\left(e^{-2zx} + e^{2zx}\right) dz,$$

и слѣдовательно

$$\text{(15)} \qquad \int_0^{\infty} e^{-z^2}\left(\frac{e^{2zx} + e^{-2zx}}{2}\right) dz = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} e^{x^2},$$

то посему, замѣняя величину x количествомъ $x\sqrt{-1}$, получимъ:

$$\text{(16)} \qquad \int_0^{\infty} e^{-z^2}.\cos 2zx . dz = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}.$$

Сія послѣдняя формула, найденная Г. *Лапласомъ*, весьма полезна при рѣшеніи многихъ задачъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ СОЧИНИТЕЛЯ.

По напечатаніи сего сочиненія, я усмотрѣлъ, что помощію весьма простой формулы, можно привести къ дифференціальному изчисленію рѣшеніе многихъ задачъ, которыя были отнесены къ интегральному. Сперва я приведу сію формулу; потомъ покажу главныя приложенія оной.

Въ урокѣ 7мъ было доказано, что ежели функціи $f(x)$ и $f'(x)$ будутъ непрерывныя между двумя предѣлами $x=x_0$ и $x=X$: то изобразивъ чрезъ θ число меньшее единицы, будемъ имѣть формулу

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}=f'[x_0+\theta(X-x_0)].$$

Совершенно подобнымъ образомъ, можно будетъ доказать и слѣдующую:

$$(1)\qquad \frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=\frac{f'[x_0+\theta(X-x_0)]}{F'[x_0+\theta(X-x_0)]},$$

гдѣ θ означаетъ, какъ и выше, число меньшее единицы, а $F(x)$ такую функцію перемѣнной x, которая, или постоянно возрастаетъ, или постоянно уменьшается отъ предѣла $x=x_0$, до предѣла $x=X$, и остается непрерывною, вмѣстѣ съ ея производною $F'(x)$, между сими самыми предѣлами.

Можно также прямо доказать формулу (1), основываясь на правилахъ изложенныхъ въ 6мъ урокѣ (стр. 28). Дѣйствительно, изъ сихъ правилъ слѣдуетъ, что въ настоящемъ предположеніи, функція $F(x)$ будетъ постоянно удерживать одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ величинъ x, отъ $x=x_0$ до $x=X$.

Слѣдовательно, если изобразимъ чрезъ A и B наибольшую и наименьшую изъ величинъ, которыя отношеніе $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ способно принять между сими предѣлами: то оба произведенія $F'(x) \times \left[\frac{f'(x)}{F'(x)} - A\right] = f'(x) - AF'(x)$, $F'(x) \times \left[B - \frac{f'(x)}{F'(x)}\right] = BF'(x) - f'(x)$ останутся постоянно положительными, или постоянно отрицательными, между тѣми же предѣлами $x = x_0$ и $x = X$. Слѣдовательно, обѣ функціи

$$f(x) - AF(x), \quad BF(x) - f(x),$$

коихъ производныя равны двумъ вышеприведеннымъ произведеніямъ, будутъ въ одно время, или возрастать, или уменьшаться, отъ перваго предѣла до втораго. И такъ, разность между крайними величинами первой функціи, именно,

$$f(X) - f(x_0) - A[F(X) - F(x_0)],$$

и разность между крайними величинами другой, именно,

$$B[F(X) - F(x_0)] - [f(X) - f(x_0)],$$

будутъ два количества съ одинакими знаками; отсюда заключаемъ, что величина разности

$$f(X) - f(x_0)$$

будетъ заключаться между величинами двухъ произведеній

$$A[F(X) - F(x_0)], \quad B[F(X) - F(x_0)],$$

а дробь

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)},$$

между предѣлами A и B. Поелику же предполагается, что обѣ функціи $f'(x)$ и $F'(x)$ суть непрерывныя между предѣлами $x = x_0$, $x = X$: то посему, всякое количество, заключающееся между величинами A и B, будетъ равно выраженію вида

$$\frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]},$$

гдѣ θ означаетъ число меньшее единицы. И такъ, необходимо будетъ существовать такое число θ, которое, будучи менѣе единицы, удовлетворитъ уравненію (1), что и слѣдовало доказать.

Полагая $X = x_0 + h$, уравненіе (1) приметъ видъ:

$$(2) \qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{F(x_0+h)-F(x_0)} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}.$$

Сіе послѣднее уравненіе, заключающее въ себѣ, какъ частный случай, уравненіе (6) 7^го урока, можетъ быть приложено къ рѣшенію многихъ замѣчательныхъ вопросовъ, что мы теперь вкратце покажемъ.

Положимъ сперва, что обѣ функціи $f(x)$ и $F(x)$ уничтожаются при $x = x_0$; возмемъ для краткости $\theta h = h_1$. Въ семъ предположеніи, формула (2) даетъ

$$(3) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)},$$

гдѣ h_1 есть количество имѣющее одинакій знакъ съ h, но численную величину меньшую численной величины сего самаго количества h. Еслибъ всѣ функціи

$$\begin{gathered} f(x),\quad f'(x),\quad f''(x), \ldots . f^{(n-1)}(x), \\ F(x),\quad F'(x),\quad F''(x), \ldots . F^{(n-1)}(x), \end{gathered}$$

уничтожались при $x = x_0$ и оставались непрерывными, равно какъ и функціи $f^{(n)}(x)$ и $F^{(n)}(x)$, между предѣлами $x = x_0$, $x = x_0 + h$: то, предполагая что каждая изъ функцій

$$F(x),\ F'(x),\ F''(x) \ldots F^{(n-1)}(x)$$

увеличивается, или уменьшается отъ перваго предѣла до втораго, и означивъ чрезъ h_1, h_2, ... h_n количества съ одинакими знаками, удовлетворяющія условіямъ $h_1 > h_2 > \ldots > h_n$, получимъ сверхъ уравненія (3), рядъ подобныхъ уравненій, именно:

$$(4) \qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)} = \frac{f''(x_0+h_2)}{F''(x_0+h_2)} = \ldots = \frac{f^{(n)}(x_0+h_n)}{F^{(n)}(x_0+h_n)}.$$

Сравнивъ въ формулѣ (4) только двѣ крайнія дроби, и замѣнивъ величину h_n произведеніемъ θh, получимъ:

$$(5)\qquad \frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)},$$

гдѣ θ означаетъ, какъ и выше, число меньшее единицы. Наконецъ, подставимъ въ уравненіе (5), вмѣсто конечнаго количества h, другое безконечно-малое i; будемъ имѣть

$$(6)\qquad \frac{f(x_0+i)}{F(x_0+i)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta i)}{F^{(n)}(x_0+\theta i)}.$$

Полагая въ формулахъ (5) и (6), $F(x)=(x-x_0)^n$, найдемъ $F^{(n)}(x)=1.2.3\ldots.n$, и слѣдовательно

$$(7)\quad \frac{f(x_0+h)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots.n},\qquad (8)\quad \frac{f(x_0+i)}{i^n}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta i)}{1.2.3\ldots n}.$$

Сіи послѣднія уравненія равнозначущи съ формулами (4) и (5) (15[го] урока), и совершенно подобны формуламъ (17) и (18) (36[го] урока). Оныя съ удобностію могутъ быть приложены къ разысканію *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ*, а также и къ опредѣленію истинныхъ значеній дробей представляющихся въ видѣ $\frac{0}{0}$. Впрочемъ, для рѣшенія сей послѣдней задачи, по большой части, достаточно будетъ формулы (6). Дѣйствительно, положимъ, что оба члена дроби

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

и ихъ послѣдовательныя производныя, до производной $n-1$ порядка, уничтожаются для $x=x_0$. Формула (6) вообще будетъ имѣть мѣсто для весьма малыхъ численныхъ величинъ количества i, ибо, чаще всего, каждая изъ функцій

$$F(x),\quad F'(x),\quad F''(x)\ldots\ldots F^{(n-1)}(x)$$

будетъ непрестанно возрастать, или уменьшаться, начиная отъ частной величины $x=x_0$, до другой величины, весьма мало разнствующей отъ x_0; посему, полагая въ формулѣ (6) i безконечно-малымъ, получимъ

$$(9) \qquad пр.\ \frac{f(x_0+i)}{F(x_0+i)} = пр.\ \frac{f^{(n)}(x_0+\theta i)}{F^{(n)}(x_0+\theta i)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(x_0)}.$$

Поставляя въ формулу (7) нуль вмѣсто x_0, также букву φ вмѣсто f, будемъ имѣть

$$(10) \qquad \varphi(h) = \frac{h^n}{1.2.3..n}\varphi^{(n)}(\theta h).$$

Замѣтимъ, что сія послѣдняя формула имѣетъ мѣсто въ томъ предположеніи, что функціи

$$\varphi(h),\ \varphi'(h),\ \varphi''(h), \ldots \varphi^{(n)}(h),$$

всѣ непрерывныя, начиная отъ предѣла $h=0$, и всѣ уничтожаются, за изключеніемъ функціи $\varphi^{(n)}(h)$, для $h=0$.

Изобразимъ теперь чрезъ $f(x)$ произвольную функцію перемѣнной x, но такую, что функціи

$$f(x+h),\ f'(x+h),\ f''(x+h), \ldots f^{(n)}(x+h),$$

всѣ остаются непрерывными относительно къ h, начиная отъ $h=0$. Помощію формулы (10), легко будетъ изъ $f(x+h)$, или, что все равно, изъ разности $f(x+h)-f(x)$, извлечь рядъ членовъ, пропорціональныхъ цѣлымъ положительнымъ степенямъ количества h; дѣйствительно, поелику разность $f(x+h)-f(x)$, принимаемая за функцію количества h, уничтожается при $h=0$, и какъ производная перваго порядка сей разности относительно къ h равняется $f'(x+h)$: то очевидно что формула (10) обратится въ слѣдующую:

$$(11) \qquad f(x+h)-f(x) = \frac{h}{1}f'(x+\theta h),$$

когда въ оной вмѣсто $\varphi(h)$, поставимъ $f(x+h)-f(x)$, и положимъ сверхъ того $n=1$.

Ежели во второй части послѣдняго уравненія, положимъ $\theta=0$; то получимъ членъ $\frac{h}{1}f'(x)$, и вычтя оный изъ первой части, остатокъ будетъ новая функція количества h, именно:

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x).$$

Поелику сія новая функція количества h, уничтожается при $h=0$, равно какъ и ея производная перваго порядка, и какъ сверхъ того, ея производная втораго порядка есть функція $f''(x+h)$: то взявъ $\varphi(h)=f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)$, и положивъ $n=2$, получимъ, въ слѣдствіе формулы (10),

$$(12)\qquad f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)=\frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta h).$$

Ежели во второй части уравненія (12), положимъ, какъ выше, $\theta=0$, то получимъ членъ $\frac{h^2}{1.2}f''(x)$, и вычтя оный изъ первой части, остатокъ будетъ третья функція количества h, именно:

$$f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x).$$

Поелику же сія третья функція количества h уничтожается при $h=0$, равно какъ и ея производныя перваго и втораго порядковъ, и какъ сверхъ того ея производная третьяго порядка есть функція $f'''(x+h)$: то взявъ $\varphi(h)=f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)$, и положивъ $n=3$, получимъ, въ слѣдствіе формулы (10),

$$(13)\ f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)=\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x+\theta h);$$

и проч. Продолжая далѣе точно такимъ же образомъ, выведемъ формулу

$$(14)\qquad f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\ldots$$
$$-\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

которая совершенно подобна уравненію (12), 36^го урока. Если въ сей формулѣ положимъ $x=0$, поставимъ x вмѣсто h, и F вмѣсто f (разумѣя подъ $F(x)$ произвольную функцію перемѣнной x), то найдемъ:

$$(15)\ F(x)-F(0)-\frac{x}{1}F'(0)-\frac{x^2}{1.2}F''(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}F^{(n-1)}(0)=\frac{x^n}{1.2.3..n}F^{(n)}(\theta x).$$

Сіе послѣднее уравненіе совершенно подобно формулѣ (11) (36$^{\text{го}}$ урока). Впрочемъ, оную можно и прямо доказать слѣдующимъ образомъ.

Пусть $F(x)$ будетъ какая-либо функція перемѣнной x, а $\varpi(x)$ цѣлая алгебрическая функція степени $n-1$, удовлетворяющая условнымъ уравненіямъ

$$\varpi(0)=F(0),\ \varpi'(0)=F'(0),\ \varpi''(0)=F''(0),\ \text{и проч.}\ldots$$
$$\varpi^{(n-1)}(0)=F^{(n-1)}(0).$$

Функція же $\varpi^{(n)}(x)$ очевидно будетъ равна нулю. Подставляя теперь, въ формулу (10), x вмѣсто h, также $F(x)-\varpi(x)$ вмѣсто $\phi(x)$, получимъ:

$$(16)\qquad F(x)-\varpi(x)=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\theta x);$$

но какъ въ 19$^{\text{мъ}}$ урокѣ было доказано, что

$$(17)\ \varpi(x)=\varpi(0)+\frac{x}{1}\varpi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varpi''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varpi^{(n-1)}(0)$$
$$=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0):$$

то и очевидно, что формула (16) доставляетъ уравненіе (15).

Замѣтимъ, что когда вторыя части уравненій (14) и (15) будутъ приближаться къ предѣлу нуль для возрастающихъ величинъ количества n: то въ такомъ случаѣ, можно изъ сихъ уравненій вывести *Тейлорову* и *Маклоренову* теоремы.

Полагая въ формулѣ (8) $x_0=0$, получимъ:

$$(18)\qquad \frac{f(i)}{i^n}=\frac{f^{(n)}(\theta i)}{1.2.3\ldots n}.$$

Сія послѣдняя формула имѣетъ мѣсто въ томъ предположеніи, что функціи

$$f(i),\ f'(i),\ f''(i), \ldots\ldots f^{(n-1)}(i),\ f^{(n)}(i),$$

непрерывны для весьма малыхъ численныхъ величинъ количества i, и сверхъ того, что онѣ всѣ уничтожаются, за исключеніемъ послѣдней, для $i=0$. Въ такомъ случаѣ и отношенія

$$\frac{f(i)}{i},\ \frac{f(i)}{i^2}, \ldots \frac{f(i)}{i^{n-1}},$$

которыя соотвѣтственно равны выраженіямъ вида

$$\frac{f'(\theta i)}{1},\ \frac{f''(\theta i)}{1.2}, \ldots \frac{f^{(n-1)}(\theta i)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

всѣ уничтожаются, при $i=0$. Слѣдовательно, когда i и $f(i)$ будутъ изображать два количества безконечно-малыя: то отношеніе

$$\frac{f(i)}{i^n}$$

будетъ первое изъ неуничтожающихся въ ряду членовъ геометрической прогрессіи

$$(19) \qquad f(i),\ \frac{f(i)}{i},\ \frac{f(i)}{i^2},\ \frac{f(i)}{i^3}, \text{ и проч.} \ldots$$

если только функція $f^{(n)}(0)$ будетъ также первая изъ неуничтожающихся въ ряду количествъ

$$(20) \qquad f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0), \text{ и проч.} \ldots$$

Прибавимъ, что въ настоящемъ предположеніи, выраженіе

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}$$

будетъ изображать (въ слѣдствіе формулы (18)) истинную величину дроби $\frac{f(i)}{i^n}$, соотвѣтствующую частному значенію $i=0$.

Сказанное предъ симъ, приводитъ насъ къ раздѣленію безконечно-малыхъ количествъ на различные классы. Для сего, изобразимъ чрезъ i весьма малое число, и чрезъ $f(i)$ функцію сего числа. Разсмотримъ двѣ слѣдующія функціи: $\frac{f(i)}{i^{n-1}}$, $\frac{f(i)}{i^n}$, предположивъ, что n есть цѣлое число, большее нуля. Если, при $i = 0$, $\frac{f(i)}{i^{n-1}} = 0$, а $\frac{f(i)}{i^n} = \infty$: то мы назовемъ $f(i)$ безконечно-малою величиною $n^{\text{го}}$ *класса*. Если же послѣдняя функція, то есть $\frac{f(i)}{i^n}$, при $i = 0$, будетъ какая нибудь опредѣленная величина: то $f(i)$ именуется безконечно-малою величиною $n^{\text{го}}$ *порядка*; такъ что безконечно-малая величина $n^{\text{го}}$ порядка будетъ, нѣкоторымъ образомъ, предѣлъ безконечно-малой величины $n^{\text{го}}$ класса. Такъ, напримѣръ, $\operatorname{tang}(i^{\frac{5}{2}})$ будетъ безконечно-малая величина $3^{\text{го}}$ класса; ибо, при $i = 0$, $\frac{\operatorname{tang}(i^{\frac{5}{2}})}{i^2} = 0$, а $\frac{\operatorname{tang}(i^{\frac{5}{2}})}{i^3} = \infty$. Функція же $\operatorname{tang}(i^3)$ есть безконечно-малая величина $3^{\text{го}}$ порядка, ибо, при $i = 0$, $\frac{\operatorname{tang}(i^3)}{i^2} = 0$, а $\frac{\operatorname{tang}(i^3)}{i^3} = 1$.

Условившись въ сихъ опредѣленіяхъ, легко вывести, въ слѣдствіе изложенныхъ правилъ, слѣдующія предложенія:

1-я Теорема. *Если изобразимъ чрезъ $f(i)$ безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ класса: то первый изъ неуничтожающихся членовъ ряда (20), будетъ членъ $f^{(n)}(0)$, который въ семъ предположеніи обратится въ безконечность. Если же членъ $f^{(n)}(0)$ имѣетъ какую-либо опредѣленную величину, разнствующую отъ нуля: то $f(i)$ будетъ безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ порядка.*

2-я Теорема. *Если изобразимъ чрезъ $f(i)$ безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ класса, и положимъ, что функція $f(x)$ и послѣдовательныя ея производныя, до производной $n^{\text{го}}$ порядка, всѣ непрерывны между предѣлами $x = 0$, $x = h$: то получимъ формулу*

$$(21) \qquad f(h) = \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} f^{(m)}(\theta h),$$

въ которой m можетъ изображать число меньшее, или равное количеству n.

Если въ послѣднее уравненіе поставимъ i вмѣсто h, также n вмѣсто m: то получимъ формулу (18). Посредствомъ сей послѣдней, легко вывести слѣдующую теорему:

3-я Теорема. *Пусть $f(i)$ будетъ безконечно-малое количество $n^{го}$ порядка. Сіе количество перемѣнитъ знакъ вмѣстѣ съ i, если n будетъ число нечетное, и постоянно будетъ имѣть одинъ и тотъ же знакъ съ количествомъ $f^{(n)}(0)$, когда n будетъ четное число.*

Въ сей послѣдней теоремѣ, подобно какъ и въ формулѣ (18) предполагается, что функція $f(i)$ и ея послѣдовательныя производныя, до производной $n^{го}$ порядка, остаются непрерывными относительно къ i, въ сопредѣльности частной величины $i=0$. Если бы сіе условіе не удовлетворялось, то количество $f^{(n)}(0)$ могло бы имѣть нѣсколько величинъ; и если сіи величины не всѣ съ одинакими знаками, то 3-я теорема не будетъ имѣть мѣста. Сіе случится, напримѣръ, для безконечно-малаго количества $f(i) = \sqrt{(i^2)}$. Въ семъ предположеніи, производная

$$f'(i) = \frac{i}{\sqrt{(i^2)}}$$

будетъ имѣть разрывъ непрерывности при $i=0$, и получитъ двѣ величины, именно, $+1$ и -1, смотря по тому, будетъ ли количество i положительное, или отрицательное. Впрочемъ, очевидно, что выраженіе $\sqrt{(i^2)}$, которое можно принимать за безконечно-малое количество перваго порядка, удерживаетъ постоянно положительный знакъ, будетъ ли количество i положительное, или отрицательное. То же самое должно разумѣть и о безконечно-маломъ количествѣ $\sqrt{(i^6)}$, которое можно принимать за безконечно-малое количество третьяго порядка, и проч....

Помощію 1-й теоремы, легко будетъ судить, къ какому классу, или порядку относится данное безконечно-малое количество. Такъ, напримѣръ, посредствомъ сей теоремы, увидимъ, что изъ четырехъ слѣдующихъ функцій:

$$\frac{1}{l(i)}, \quad \sqrt{(i)}, \quad i^{\frac{2}{3}}, \quad \sin i,$$

первыя три изображаютъ безконечно-малыя количества перваго класса, а послѣдняя, безконечно-малое количество перваго порядка. Такимъ же точно образомъ увидимъ, что изъ четырехъ функцій

$$\frac{i}{l(i)}, \quad i^{\frac{3}{2}}, \quad \sin^2 i, \quad 1 - \cos i,$$

первыя двѣ изображаютъ безконечно-малыя величины втораго класса, а двѣ послѣднія, безконечно-малыя величины втораго порядка; окажется также, что изъ трехъ функцій

$$\frac{i^2}{l(i)}, \quad i^3, \quad i - \sin i,$$

первая есть безконечно - малое количество третьяго класса, а двѣ послѣднія, безконечно-малыя количества третьяго порядка; и такъ далѣе.

Когда безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ класса, или $n^{\text{го}}$ порядка помножится на величину постоянную, или на такую функцію количества i, которой предѣлъ есть величина опредѣленная, разнствующая отъ нуля: то въ такомъ случаѣ, очевидно, получимъ въ произведеніи безконечно-малую величину того же самаго класса, или порядка, именно, $n^{\text{го}}$.

Легко также доказать, что безконечно-малыя количества высшихъ классовъ имѣютъ численныя величины мéньшія, противъ численныхъ величинъ безконечно - малыхъ количествъ низшихъ классовъ. Дѣйствительно, изобразимъ чрезъ $\varphi(i)$ и $\chi(i)$ два безконечно-малыя количества, первое $n^{\text{го}}$ класса, второе $m^{\text{го}}$; и положимъ $m < n$. Очевидно, что изъ двухъ дробей $\frac{\varphi(i)}{i^m}$, $\frac{\chi(i)}{i^m}$, одна только первая обратится въ нуль, при $i = 0$; слѣдовательно отношеніе $\frac{\varphi(i)}{\chi(i)}$ будетъ также стремиться къ нулю; а для сего необходимое условіе есть то, чтобы численная величина числителя сей дроби, была менѣе численной величины ея знаменателя, ибо самая дробь должна быть менѣе единицы.

Докажемъ наконецъ слѣдующую теорему:

4-я Теорема. *Изобразивъ чрезъ i и $f(i)$ двѣ величины безконечно-малыя, окажется, что отношеніе*

$$(22)\qquad \frac{f(i)}{f'(i)},$$

при $i=0$, будетъ имѣть, или одну величину равную нулю, или нѣсколько величинъ, между которыми необходимо будетъ заключатся величина сего отношенія равная нулю.

Доказательство. Очевидно, что достаточно будетъ доказать 4-ю теорему только въ томъ случаѣ, когда производная функція $f'(i)$ обращается въ нуль вмѣстѣ съ функціей $f(i)$, при $i=0$; ибо отношеніе $\frac{f(i)}{f'(i)}$, во всякомъ другомъ предположеніи, будетъ равно нулю, по причинѣ, что $f(i)=0$, для $i=0$. Но если также $f'(i)=0$, то дробь $\frac{f(i)}{f'(i)}$ представляется въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$. Когда функціи $f(i)$ и $f'(i)$ будутъ обѣ непрерывныя относительно къ i, въ сопредѣльности частнаго значенія $i=0$: то легко будетъ доказать, помощію формулы (18), что отношеніе $\frac{f(0)}{f'(0)}$ обращается въ нуль въ настоящемъ случаѣ. Дѣйствительно, при такомъ условіи, выводимъ изъ формулы (18), полагая въ оной $n=1$

$$(23)\qquad f(i)=if'(\theta i),$$

и слѣдовательно

$$(24)\qquad \frac{f(i)}{f'(i)}=i\frac{f'(\theta i)}{f'(i)},$$

разумѣя подъ θ число меньшее единицы. Положимъ теперь, что въ формулѣ (24), численная величина количества i уменьшается до безконечности. Такъ какъ, въ настоящемъ предположенiи, $f'(0)=0$, то легко видѣть, что изъ двухъ функцiй $f'(\theta i)$ и $f'(i)$, первая будетъ стремиться къ нулю скорѣе нежели вторая, ибо произведенiе θi заключается между двумя предѣлами 0 и i. Слѣдовательно, всѣ величины дроби $\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$ будутъ менѣе единицы, а величины произведенiя $i\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$, весьма мало будутъ разнствовать отъ нуля. Посему предѣлы, или одинъ изъ предѣловъ величинъ дроби $i\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}=\frac{f(i)}{f'(i)}$, будетъ равняться нулю.

Примѣчанiе 1-е. Легко удостовѣриться въ справедливости 4-й теоремы въ разсужденiи слѣдующихъ функцiй:

$$\sin i,\quad 1-\cos i,\quad e^{-\left(\frac{1}{i}\right)^2},\quad i^3\sin\frac{1}{i},\ \text{и проч.}\ldots$$

Сiя самая теорема справедлива даже и въ томъ случаѣ, когда функцiя $f(i)$ будетъ только вещественною и безконечно-малою, при опредѣленномъ знакѣ количества i; можно сiе видѣть, принимая послѣдовательно за функцiю $f(i)$, одну изъ слѣдующихъ:

$$l(i),\quad \sqrt{(i)},\quad e^{-\frac{1}{i}},\quad e^{-\left(\frac{1}{i}\right)^3},\ \text{и проч.}\ldots$$

изъ которыхъ 1я, 3я и 4я не будутъ изображать безконечно-малыхъ количествъ, а 2я, обратится въ мнимую величину, при i отрицательномъ. Наконецъ, сiя теорема можетъ быть справедлива, когда функцiя $f'(i)$ дѣлается прерывною, для $i=0$. Такъ, напримѣръ, полагая

$$f(i)=i\sin\frac{1}{i}, \tag{25}$$

увидимъ, что производная функцiя

$$f'(i)=\sin\frac{1}{i}-\frac{1}{i}\cos\frac{1}{i}, \tag{26}$$

дѣлается неопредѣленною, слѣдовательно прерывною, при $i=0$; отношенiе (22), опредѣляемое посредствомъ уравненiй (25) и (26), то есть

(27) $$\frac{f(i)}{f'(i)} = \frac{i}{1 - \frac{1}{i}\cot\frac{1}{i}},$$

для $i = 0$, имѣетъ безчисленное множество величинъ, изъ коихъ одна будетъ равна нулю.

Примѣчаніе 2-е. Положимъ, что функція $f(i)$ и ея производныя, до $(n-1)^{\text{го}}$ порядка, всѣ непрерывны относительно къ i, въ сопредѣльности частнаго значенія $i = 0$, и что сверхъ того, количества

(28) $$f(0),\ f'(0),\ f''(0), \ldots \ldots f^{(n-1)}(0),$$

всѣ уничтожаются. Когда станемъ уменьшать количество i до безконечности, то каждое изъ отношеній

(29) $$\frac{f(i)}{f'(i)},\ \frac{f'(i)}{f''(i)},\ \frac{f''(i)}{f'''(i)}, \ldots \ldots \frac{f^{(n-1)}(i)}{f^{(n)}(i)},$$

будетъ стремиться къ одному предѣлу, или къ нѣсколькимъ предѣламъ, изъ коихъ одинъ будетъ равенъ нулю; слѣдовательно также и произведеніе всѣхъ сихъ дробей, именно

(30) $$\frac{f(i)}{f^{(n)}(i)},$$

будетъ приближаться къ тому же предѣлу нуль.

То-же самое должно разумѣть и о произведеніяхъ

(31) $$\frac{f'(i)}{f^{(n)}(i)},\ \frac{f''(i)}{f^{(n)}(i)}, \ldots \ldots \frac{f^{(n-2)}(i)}{f^{(n)}(i)},$$

получаемыхъ чрезъ умноженіе нѣкоторыхъ изъ дробей (29), однѣ на другія.

КОНЕЦЪ.

ПРИМѢЧАНІЯ ПЕРЕВОДЧИКА.

Примѣчаніе I.

Положимъ что дроби

$$\frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}},$$

поставлены по порядку ихъ величинъ, и что всѣ знаменатели оныхъ $b', b'', b''', \ldots b^{(n)}$ имѣютъ одинакіе знаки; посему будетъ

$$\begin{array}{ll}
\frac{a'}{b'} = \frac{a'}{b'} & \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} > \frac{a'}{b'} \\
\frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''} & \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} > \frac{a''}{b''} \\
\frac{a'}{b'} < \frac{a'''}{b'''} & \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} > \frac{a'''}{b'''} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\frac{a'}{b'} < \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} & \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} = \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}.
\end{array}$$

по уничтоженіи знаменателей, выйдетъ:

$$\begin{array}{ll}
a'b' = a'b' & a^{(n)}b' > a'b^{(n)} \\
a'b'' < a''b' & a^{(n)}b'' > a''b^{(n)} \\
a'b''' < a'''b' & a^{(n)}b''' > a'''b^{(n)} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a'b^{(n)} < a^{(n)}b' & a^{(n)}b^{(n)} = a^{(n)}b^{(n)}.
\end{array}$$

Сложивъ сіи послѣднія неравенства, получимъ два слѣдующія:

$$a'(b'+b''+b'''+\ldots+b^{(n)}) < b'(a'+a''+a'''+\ldots+a^{(n)})$$
$$a^{(n)}(b'+b''+b'''+\ldots+b^{(n)}) > b^{(n)}(a'+a''+a'''+\ldots+a^{(n)}).$$

Раздѣляя первое изъ нихъ на $b'(b'+b''+b'''+b^{(n)})$, а второе на $b^{(n)}(b'+b''+b'''+\ldots+b^{(n)})$, имѣемъ:

$$\frac{a'}{b'} < \frac{a'+a''+a'''+\ldots+a^{(n)}}{b'+b''+b'''+\ldots+b^{(n)}} < \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}.$$

Итакъ, дробь $\frac{a'+a''+a'''+\ldots+a^{(n)}}{b'+b''+b'''+\ldots+b^{(n)}}$ будетъ болѣе наименьшей, и менѣе наибольшей изъ дробей $\frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \ldots; \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$; слѣдовательно, оная выразитъ среднюю между сими дробями.

Примѣчаніе II.

Должно доказать, что имѣя

$$\text{(a)} \qquad \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\ldots\ldots,$$

или, что все равно,

$$\frac{ax}{x^2}=\frac{by}{y^2}=\frac{cz}{z^2}=\ldots\ldots,$$

будетъ также

$$\text{(b)} \qquad \frac{ax+by+cz+\ldots}{x^2+y^2+z^2+\ldots}=\pm\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2+\ldots)}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}.$$

Для сего, положивъ

$$\begin{array}{ll} ax=ax & x^2=x^2 \\ by=m\,.\,ax & y^2=m\,.\,x^2 \\ cz=m'.\,ax & z^2=m'.\,x^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

получимъ:

$$\text{(c)} \qquad \frac{ax+by+cz+\ldots}{x^2+y^2+z^2+\ldots}=\frac{ax+m\,.\,ax+m'.\,ax+\ldots}{x^2+m\,.\,x^2+m'.\,x^2+\ldots}=\frac{a}{x}.$$

Также, уравненія (a) даютъ

$$\frac{a^2}{x^2}=\frac{b^2}{y^2}=\frac{c^2}{z^2}=\ldots,$$

и полагая

$$\begin{array}{ll} a^2=a^2 & x^2=x^2 \\ b^2=n\,.\,a^2 & y^2=n\,.\,x^2 \\ c^2=n'.\,a^2 & z^2=n'.\,x^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

получимъ:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{x^2+y^2+z^2+\ldots}=\frac{a^2+n\,.\,a^2+n'.\,a^2+\ldots}{x^2+n\,.\,x^2+n'.\,x^2+\ldots}=\frac{a^2}{x^2};$$

слѣдовательно

$$\frac{a}{x}=\pm\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2+\ldots)}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}.$$

Сравнивъ сію послѣднюю величину для $\frac{a}{x}$ съ величиною опредѣляемою уравненіемъ (c), получимъ уравненіе (b), которое слѣдовало доказать.

Примѣчаніе III.

Разсмотримъ рядъ количествъ

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2)\ \ldots\ldots\ f(x_{n-1}),$$

который можетъ быть также представленъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{(x_1-x_0)f(x_0)}{x_1-x_0},\quad \frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{x_2-x_1},\quad \frac{(x_3-x_2)f(x_2)}{x_3-x_2},\ \ldots\ \frac{(X-x_{n-1})f(x_{n-1})}{X-x_{n-1}}.$$

Но какъ, по предположенію, всѣ разности x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, ... $X-x_{n-1}$ имѣютъ одинакіе знаки: то сумма числителей всѣхъ сихъ дробей, раздѣленная на сумму ихъ знаменателей, будетъ *средняя* между величинами дробей $\frac{(x_1-x_0)f(x_{n-1})}{x_1-x_0}$, $\frac{(x_2-x_1)f(x_1)}{x_2-x_1}$, $\frac{(x_3-x_2)f(x_2)}{x_3-x_2}$, ... $\frac{(X-x_{n-1})f(x_{n-1})}{X-x_{n-1}}$, или, что все равно, средняя между величинами функцій $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)\ldots f(x_{n-1})$, которую можно выразить чрезъ $f[x_0+\theta(X-x_0)]$ (разумѣя подъ θ количество положительное, меньшее единицы). Посему получимъ уравненіе

$$\frac{(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+(x_3-x_2)f(x_2)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})}{X-x_0}=f[x_0+\theta(X-x_0)],$$

которое доставляетъ

$$(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+(x_3-x_2)f(x_2)+\ldots$$
$$+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})=(X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)],$$

что и надлежало доказать.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

стран.	строк.	Напечатано:	Надобно поправить.
3.	посл.	дуаляющимся	удаляющимся
8.	4.	однѣ	одни
8.	13.	однѣ	одни
8.	8 сниз.	Алгебраическія	Алгебрическія
9.	3.	онѣ	они
9.	4.	однѣ	одни
22.	1.	$f'(y)$	$F'(y)$
24.	2 сниз.	s	s^2
28.	3 сниз.	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
31.	7.	$x^2 . x^{\frac{2}{3}},$	$x^2, x^{\frac{2}{3}},$
31.	18.	$x = \frac{1}{2}p$	$x = -\frac{1}{2}p$
34.	4.	*функціи.*	*функціей.*
34.	9.	$\frac{\infty}{\infty}, \infty,$	$\frac{\infty}{\infty}, \infty^0,$
38.	3.	$\frac{f(X)-(x_0)}{X-x_0}$	$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$
38.	5.	$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
38.	9.	$x = x^0 + h$	$x = x_0 + h$
41.	1.	Δa	Δx
47.	14.	принимаемыхъ	принимаемой
62.	1.	$dy^{(n)} = y^{(n-1)} . h.$	$dy^{(n-1)} = y^{(n)} . h.$
67.	8.	будешъ полная	будешъ полная, или часшная
69.	5 сниз.	чшо	чшо
76.	2 сниз.	$d_z,$	$d_x,$
79.	14.	чшо	чшо
80.	15.	члучаѣ	случаѣ
90.	15.	крайнѣй	крайней
91.	4.	$d^m u =$	$d^{2m} u =$

стран.	строк.	Напечатано:	Надобно поправить.
108.	6 сниз.	$f(x) - A\varphi(x)$	$f(x) - A_0\varphi(x)$
115.	4.	θ	θ_0
115.	5.	θ	θ_0
120.	3.	$= \ldots = \theta_{n-1} = 0.$	$= \ldots = \theta_{n-1} = 1.$
132.	2.	постоянныя	положительныя
135.	4 сниз.	$f(x) = \pm\infty,$	$f(a) = \pm\infty,$
141.	10.	$\int_{x_0}^{X}$	$\int_{x_1}^{x}$
143.	6.	порядку,	порядку
155.	9 сниз.	$(ab + b)^{\frac{1}{n}}$	$(ax + b)^{\frac{1}{n}}$
194.	12.	$\frac{df(x,y)}{dx}$	$\frac{df(x,z)}{dx}$
194	16.	$\frac{df(x,y)}{dx}$	$\frac{df(x,z)}{dx}$
206.	11 сниз.	α	x
208.	6 сниз.	$= \frac{x^{n-1}}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$	$= \pm \frac{x^{n-1}}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$
212.	3.	сходящіеся,	сходящіяся,
212.	4.	расходящіеся.	расходящіяся.
232.	2 сниз.	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n-1)}(x)$